Univ. of
Toronto
Library

BINDING LIST SEP 1 5 1922.

MEMORIAS

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS Y ARTES

DE

BARCELONA

TOMO VII

MEMORIAS

DE LA

REAL ACADEMIA

DE

CIENCIAS Y ARTES

DE

BARCELONA

Tomo VII. — Años 1908 á 1909

BARCELONA

A. LÓPEZ ROBERT, IMPRESOR

63—Calle Conde del Asalto,—63

1908-1909

AS
302
B36
época 3
t.7

MEMORIAS

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS Y ARTES DE BARCELONA

TOMO VII

ÍNDICE

Págs.

I—La joyería y la orfebrería en España, por *D. Antonio García Llansó.* Discurso de contestación, de *D. José Masriera y Manovens* . . . 1

II—Tratado didáctico de las Geometrías no-euclídeas, por *D. J. M. Bartrina y Capella.* 17

III—Estudio de la catenaria y de sus aplicaciones mecánicas, por *D. José Tous y Biaggi.* 291

IV—Minerales de tungsteno. Explotación de estos minerales en España. Usos á que se destinan. Posibilidad de ser substituído el tungsteno por otros cuerpos en la fabricación del acero, por *D. Ramón de Manjarrés y Bofarull* 327

V—Investigaciones de Hidrología subterránea en la comarca de Bañolas (provincia de Gerona), por el *Ilmo. Sr. D. Luis Mariano Vidal.* . 339

VI—La Ciencia agrícola. Discurso inaugural del año académico de 1908 á 1909, por *D. Hermenegildo Gorria* 357

VII—Sesión solemne, dedicada á honrar la memoria del Sr. D. Angel del Romero y Walsh, por los *Dres. D. Santiago Mundi y Giró* y *don José Doménech y Estapá* 383

VIII—Necrología de D. José M.ª Rodríguez Carballo y Cebolla, por el *Dr. D. Lauro Clariana y Ricart* 409

IX—Sobre la emisión de radiaciones por cuerpos fijos ó en movimiento, por el *Dr. D. Esteban Terradas é Illa.*—Discurso de contestación, por el *Dr. D. José Doménech y Estapá* 419

X—Mantíspidos nuevos, por el *R. P. Longinos Navás, S. J.* 473

XI—La Astronomía aplicada á la navegación de los buques rápidos, por el *Excmo. Sr. D. José Ricart y Giralt* 487

XII—Sesión pública extraordinaria en honor del académico difunto señor

Págs.

D. Miguel Cuní y Martorell, por el *Dr. D. Manuel Mir y Navarro.* 511

XIII—Notas sobre el terremoto de Mesina del 28 de diciembre de 1908, registrado en el Observatorio Fabra.—Estadística sismológica de 1908 (Observatorio Fabra).—Observaciones sísmicas durante el año 1908, por *D. José Comas y Solá* . . . . . 523, 529 y 532

XIV—Notas fitogeográficas críticas, por el *Dr. Juan Cadevall y Diars.* 545

XV—El eclipse total de Luna de la noche del 3 al 4 de junio de 1909, por *D. Luis Canalda* 579

XVI—Generalidades y aplicación de las curvas unicursales, por el *Doctor D. Lauro Clariana y Ricart.* 589

XVII—Monografía de la familia de los Diláridos (ins. neur.), por el *R. P. Longinos Navás, S. J.* 619

LAMINAS

M. Iltre. Sr. D. Angel del Romero y Walsh. 383

Lápida conmemorativa de la reforma del edificio 408

Posición de la Luna en el eclipse del 3 al 4 de junio de 1909. 589

Diláridos (insectos neurópteros).—2 láms 673

MEMORIAS

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS Y ARTES

DE BARCELONA

TERCERA ÉPOCA — VOL. VII. NÚM. 1

LA JOYERÍA Y LA ORFEBRERÍA EN ESPAÑA

MEMORIA LEÍDA POR

D. ANTONIO GARCIA LLANSÓ

en el acto de su recepción

Y

DISCURSO DE CONTESTACIÓN

POR EL ACADÉMICO NUMERARIO

D. JOSÉ MASRIERA Y MANOVENS

LIBRARY DEC 7 1921 UNIVERSITY OF TORONTO

Publicada en mayo de 1908

BARCELONA

A. LÓPEZ ROBERT, IMPRESOR.—CONDE DEL ASALTO, 63.

1908

LA JOYERÍA Y LA ORFEBRERÍA EN ESPAÑA

discurso leído por

D. Antonio García Llansó

en el acto de su recepción, el dia 6 de mayo 1908

Señores:

Limitado es el número de aquéllos, que verdaderamente afortunados, consiguen llegar á este puesto en aquella edad feliz de la vida, en que lo porvenir no ofrece límite alguno á los nobles deseos y á las soñadas ilusiones.

En la mayor parte de los casos, aquel á quien honrais eligiéndole para cooperar en vuestros trabajos, ha traspuesto ya el umbral de la madurez y de la reflexión, ha penetrado en ese periodo triste en que la conciencia impone la realidad, haciendo comprender que esta ceremonia tiene más alta significación que la personal vanagloria, puesto que se contrae el deber de contribuir en la valiosa labor que realizais, poniendo de relieve y en evidencia, el escaso caudal que puede aportaros.

Tal es, señores, la embarazosa situación en que me hallo y á la que me han conducido el sincero afecto de algunos amigos, al presentar mi candidatura, y el hecho de haberla vosotros aceptado, obligándome á unos y á otros, cual aconseja el más sentido agradecimiento, ya que convencido de que el cielo no me ha dotado de especiales facultades de ingenio, que pudieran hacerme acreedor de tan señalado galardón, solo puedo ofreceros el buen deseo que me anima y el firme propósito de corresponder á vuestro favor, aportando todas las energías de mi voluntad y las limitadas fuerzas de mi inteligencia, no porque entienda que con ellas pague una deuda para mi tan subida, sino para lograr que vuestra indulgencia sea tan grande como lo es mi gratitud.

Loable tradición es de esta clase de solemnidades, dedicar un cariñoso recuerdo y testimonio de consideración á la memoria del ilustre académico á quien por una á modo de ley de sucesión, se viene á reemplazar. De ahí pues, que invoquemos, ¡Paz á la memoria de D. Luis Rigalt, homenaje al ilustrado artista, al caballeroso ciudadano, rico en virtudes y amante del país que le vió nacer! Aquí, ocupó entre vosotros un lugar preeminente; hasta aquí le elevasteis por considerarle digno, por sus circunstancias y merecimientos, de continuar su nombre en la lista de aquellos, también esclarecidos artistas, que como Vicente Rodes y Damián Campeny, ilustran los anales de esta docta Corporación y los fastos del arte patrio.

Extraordinaria significación tiene la personalidad de Luis Rigalt, tanto por

la cuantía y la índole de su labor como por la influencia que ejerció en la evolución artística de nuestro país, que caracteriza el periodo en que dió aquel tan señaladas muestras de su actividad.

Perteneciente á una familia de artistas, y nacido precisamente en los momentos en que España recobraba su independencia, obligando á transponer los Pirineos á los restos de las huestes invasoras, pudo saturar su espíritu con los dos sentimientos que alimentaban sus deudos, el amor al arte y el amor á la patria, confundiéndolos y compenetrándolos de tal suerte, que si examinamos las obras de aquel ilustre artista, no podremos discernir cual de las dos afecciones se sobrepone y ocupa preferente lugar en su pensamiento y en su corazón.

Impregnada su alma de las sanas enseñanzas que recibiera, concentró en su espíritu soñador los nobles ideales por que alentara, extasiándose en las bellezas que encierra la tierra catalana para reproducirla en todos sus variados aspectos, con sus imponentes contrastes y en toda su incomparable grandeza. Provisto de lápiz y pincel, peregrinó por todas las comarcas, ansioso de interpretar los encantos y la poesía de la naturaleza, logrando, sin precedentes á que referirse, introducir é imponer una de las manifestaciones artísticas que más felices intérpretes han tenido en nuestro país, cual es, el paisaje, hasta entonces empleado como complemento de diversas clases de producciones.

Difícil sería hacer mención del numeroso caudal que en este género de trabajos produjo Rigalt, á los que es preciso agregar sus composiciones decorativas y los cuadros al óleo, así como la reconstitución de edificios y monumentos notables, malaventuradamente destruídos por la piqueta demoledora, y que gracias á su patriotismo artístico, puede hoy apreciarse la importancia que tuvieron y cuánto debe lamentarse su desaparición.

Tan señalados merecimientos no podían desconocerse y á pesar del retraimiento en que vivía, inclinado, tal vez, por apocamiento de su organismo, otorgáronle sus contemporáneos varias distinciones, entre ellas su designación para ingresar en la Real Academia de San Fernando y porteriormente en esta de Ciencias y Artes, substituyendo, por último, á su padre en el profesorado de la Escuela de Bellas Artes de esta Ciudad, en donde pudo completar la misión que se impusiera, cuyos fructíferos resultados hemos podido admirar todos, al estudiar la moderna evolución artística catalana.

Solo á modo de recordatorio, he expuesto la significación y valía de la obra del preclaro artista, puesto que anteriormente, otros labios más autorizados que los míos, hicieron su elogio en la solemne sesión que dedicasteis á honrar su memoria. Unicamente me he propuesto, unir mi homenaje al vuestro, que si bien modesta la ofrenda, es para mi lícito suponer que llegará al sitio reservado á los justos, con igual intensidad y pureza, que la oración que el alma cristiana pudiera dedicarle.

Cumplido el deber que aconseja el sentimiento, he de atenerme á la obliga-

ción impuesta al nuevo académico, de leer un discurso en el acto de la recepción, relacionado con la Sección á que ha de pertenecer. Confieso mi perplegidad en la elección del tema, vacilando entre el deseo de llenar este, para mi honroso cometido, que me induce á coadyuvar por primera vez en vuestras tareas, y el afán de exponeros y recordaros en forma agradable, lo que ya sabéis. Voy á intentar, pues, entretener vuestra atención, con lo poco que he logrado aprender en el transcurso de los años, con el resultado de mis estudios é investigaciones, confiando que vuestra bondad servirá de medio para excusar la deficiencia de mi labor y para que apreciéis el propósito que me anima en estos momentos.

Me propongo ocuparme, siquier sea someramente, del proceso de las artes de la joyería y orfebrería en nuestra patria, señalar las influencias que contribuyeron á su beneficioso desarrollo y la importancia que alcanzaron, singularmente en Cataluña.

Estudiar los metales preciosos y la influencia que han ejercido en todos los pueblos, equivale á escribir la historia de la humanidad, poniendo de relieve sus vicios y virtudes, sus debilidades ó su grandeza, ya que el oro ha sido el estímulo que la ha conducido á realizar las más nobles empresas y á cometer los más execrables crímenes. El incentivo de los metales preciosos, el afán de su posesión, ha sugerido al hombre ideas de conquista y de engrandecimiento, ruines aspiraciones é insaciables apetitos. Ellos produjeron las grandes invasiones, las sangrientas guerras cuyo objetivo era el codiciado botín, ó hacían germinar en la privilegiada inteligencia de un atrevido marino la idea de un nuevo mundo en donde hallar riquezas para la patria adoptiva ó séres á quienes ofrecer los beneficios de la cristiana civilización. Para conocer su historia basta remover las cenizas de los pueblos que existieron. En ellas, en sus groseros enterramientos ó en sus suntuosos sepulcros, en donde quiera que el hombre ha procurado rendir el más alto testimonio de su respetuosa consideración ó de sus íntimas afecciones, hállanse valiosos elementos, que debidamente ordenados determinan el proceso de esta industria á través de los siglos, desde los tiempos protohistóricos hasta nuestros días. A partir de las primeras edades, ofrécese vasto campo al estudio y á la investigación, dado el caracter especialísimo que presenta ya en su origen, avaloradas sus obras por la influencia de un arte naciente, rudo en sus albores, cual correspondía á la condición de aquellos que representan la base de donde han surgido los antiguos pueblos ó bien subordinada á razonados conceptos é inspirándose en el sentimiento y en la belleza, síntesis de los ideales que informan las épocas de su mayor florecimiento. Empresa harto difícil es la de determinar sus orígenes. Por eso es tan íntima la conexión que existe entre la orfebrería y la joyería, ya que una y otra, aun formando dos ramas distintas, tienen igual principio y en muchas ocasiones pueden confundirse sus producciones. De una y otra he de ocuparme simultáneamente, dedicando tanto á la platería, que tal denominación tiene la orfebrería en nuestro país, como á la joyería la aten-

ción que merecen, pues siendo vastísimo el campo de acción de las dos, son entre las artes suntuarias las de mayores aplicaciones, tan estensas y complejas, que algunas veces invaden el terreno reservado á las bellas artes.

No cabe la menor duda de que los hombres primitivos emplearon los metales preciosos en su estado nativo, para adornarse, sirviéndose de las pepitas ó bien de las láminas y alambres obtenidos por medio de la percusión. Por algunos escritores de la antigüedad tenemos noticia de la riqueza metalúrgica de nuestro pais y del activo comercio que los fenicios sostuvieron, y nuestro Museo Arqueológico Nacional conserva isteresantísimos ejemplares, que por lo rudimentario y tosco de su trabajo, dan lugar á suponer que corresponden á los primeros periodos de la historia de la península Ibérica. Los enterramientos descubiertos en varias regiones y las joyas halladas en cuevas como la llamada de los Murciélagos en Albuñol, provincia de Granada, así como los descubrimientos llevados á cabo, hace pocos años, en el Sudoeste de España, por lo hermanos Siret, aportan nuevos datos y antecedentes que fijan las primeras edades de la joyería.

Lamentable es que la codicia haya destruído las inmensas riquezas arqueológicas que existían, especialmente en algunas regiones de nuestra patria, que, como las provincias gallegas, contaban con un considerable número de *tumulus*, los cuales consideráronse durante varios siglos como ricos veneros que explotar, dando lugar su cuantía á que se reglamentase la extracción de los tesoros que aquellos guardaban ocultos. La fiebre de oro invadió todas las clases y la devastación fué tan general en los siglos XVII y XVIII, que apenas quedan vestigios ya de tan interesantes enterramientos. Las joyas que contenían, fundíanse en forma de barras, llegando á pesar algunas de ellas más de 20 libras. Por tal causa son relativamente escasos los ejemplares de la joyería protohistórica en nuestro país, que es uno de los que mayores y más importantes muestras podían ofrecer para el estudio. Esto no obstante, las piezas conservadas en el Museo Arqueológico Nacional y recientes investigaciones, nos permiten consignar algunas someras noticias acerca de la joyería protohistórica, que á pesar de concretarse á nuestra península, han de estimarse como de caracteres generales, tal es su semejanza con la de otros países. Merecen citarse en primer término, las diademas labradas en plata, y aún en oro, cuyo tipo reducíase en algunas, á una estrecha franja que ceñía la parte superior del cráneo, conforme han sido halladas en los enterramientos de Argar, Gerundia, Carcel, Palacés, Gatas, etcétera, existiendo en otras un apéndice formado por una planchita del mismo metal, colocado en la parte que corresponde á la frente. Unas y otras carecen de ornamentación, no habiendose determinado todavía si su uso significaba una insignia de mando ó un medio de adorno y embellecimiento. Los aros formados en espiral para brazaletes y pendientes, los collares de cuentas de plata y las sortijas de uno ú otro de dichos metales, constituyen las joyas utilizadas por los pueblos primitivos. Todas estas piezas, que no presentan más líneas que las de-

terminadas por su estructura, desprovistas de motivos ornamentales, simple y groseramente labradas, revelan el génesis de un arte que tantas bellezas ha producido en las posteriores edades, siendo digno de llamar la atención la persistencia que se nota en perpetuar las líneas primitivas, que en sus rasgos generales no difieren, como no ha variado su determinada aplicación.

La ornamentación de líneas formando ángulos á modo de dientes de sierra, que se nota en los torques celtas, labrados en oro, como en otras piezas de joyería, indican progresos y el sentimiento de un arte naciente. Ya no se satisface el hombre con el valor representado por el metal ni con la belleza de la forma. Inconscientemente, tal vez, presiente la belleza y discurre líneas y motivos de adorno, rudos como su condición. Las joyas celtas han de estimarse como muestra de un arte embrionario, cuya influencia manifiéstase en todas las producciones de aquel pueblo, que tan altos destinos llegó á cumplir en Europa, y resultado del esfuerzo de una raza privilegiada, con caracteres distintivos tan salientes, cual cumple á sus energías.

Puede considerarse á los visigodos por su ostentación y carácter, como continuadores de los bizantinos. No cabe duda que las mejores piezas de aquella orfebrería tan admirada por los francos y merovingios, fué inspirada en las ejemplares obras de Bizancio. Sus obras de este género cuajadas de piedras de brillantes tonos, recuerdan la fastuosidad oriental. Como sus vecinos de allende los Pirineos, mostraron singular predilección por las joyas y la platería. Las que Ataulfo ofreció á Gala Placidia en sus desposorios y los inmensos tesoros que en Toledo guardaba Amalarico, prueban la magnificencia y el esplendor de aquellas monarquías. Las mujeres usaban espejos y palanganas de plata, bebían en copas de oro incrustadas de diamantes y otras piedras preciosas y solían engalanarse con anillos, collares, pendientes y valiosos cinturones.

Fama parecida gozaron aquellos excelentes artífices, pues aparte de algunas obras que pueden admirarse en los museos, celebran los historiadores de aquella época piezas tan notables como la hermosa cruz que Childeberto sacó de Toledo para colocarla en la Iglesia de San Germán de los Prados de París, y la soberbia espada con el puño de oro y pedrería que Gaddon ofreció á aquel monarca. A estas ejemplares obras hemos de agregar las famosas coronas votivas descubiertas en Guarrazar el 25 de agosto de 1858. En ellas brilla toda la belleza del arte bizantino, avalorada con los elementos ornamentales visigodos que prestan á las joyas un carácter oriental. En el hoyo, tal vez *tumulus* ó enterramiento primitivo, en donde en tarde tormentosa hundió su pié el afortunado labrador que halló el tesoro, descubriéronse varias coronas de oro y pedrería ofrecidas por Recesvinto, Suintila y otros monarcas, lámparas, cruces procesionales, anillos, dijes y otras joyas. La codicia y la ignorancia fueron causa de que se destruyeran algunas piezas, pudiendo salvarse las que figuran en la Armería Real de Madrid, Museo Arqueológico Nacional y en el de Cluny de París. Las coronas están formadas de ancho aro de oro, sostenido por cuatro cadenas del mis-

mo metal, con záfiros y perlas engastadas, pendiendo del centro una cruz y del aro varios colgantes.

Especial carácter imprimieron los árabes á las obras de orfebrería, de las que fueron muy apasionados. Los cronistas cristianos refieren el cuantioso valor de las alhajas con que se engalanaban los muslimes y las que á su vez ostentaban las esclavas de los magnates. Incalculable es el número de piezas de joyería y platería, como vasos de oro y plata, brazaletes, ajorcas, collares y armas adornadas con piedras preciosas de que se apoderaron los caudillos cristianos en las célebres batallas, que como la de Las Navas y del Salado, pudieron humillar y vencer la enseña del Profeta. Exageradas parecen las noticias consignadas por los escritores de la época, tal es la profusión, mérito y riqueza de las producciones que mencionan, mas hemos de inclinarnos á aceptarlas como verídicas, pues aparte de la natural afición al lujo de los invasores, de la proverbial riqueza de nuestro suelo y de los tesoros acumulados en todas las regiones peninsulares de que se apoderaron, es conocido el progreso y el grado de adelanto y perfección á que llegaron los árabes españoles. Escasísimos son por desgracia los ejemplares que han llegado hasta nosotros, si bien de gran interés todos ellos para el estudio de las artes. El más antiguo que de entre ellos se conserva es la magnífica arqueta de madera revestida de planchas de plata relevada y en parte dorada, con esmalte negro formando la hojarasca característica arábiga. Guárdase esta joya en la Catedral de Gerona, y según rezan las inscripciones que contiene, es obra de Bedr y Tarif, quienes las labraron por encargo de Alhakem con destino al príncipe Hixem. Otras dos arquetas del mismo estilo y materia guárdanse en el Museo Arqueológico Nacional, procedentes de San Isidoro de León, mereciendo citarse también como gallarda muestra de la orfebrería granadina las suntuosas espadas de Boabdil, que posee el Marqués de Villaseca, ricamente embellecidas con esmalte azul, blanco y rojo, habilmente combinados con la labrada guarnición de plata dorada.

Los plateros árabes demostraron igual maestría en las obras de fundición que en las de forja, cincelado y relevado, distinguiéndose especialmente en las labores de menuda filigrana, que no admiten rival, á tanto llegó su buen gusto y habilidad. Ejecutaban este trabajo por medio de hilos de oro ó plata retorciéndolos de manera que se asemejaban á una cuerda delicadamente grabada. La citada espada de Boabdil contiene adornos de primorosa filigrana así en la guarnición como en las abrazaderas y cantonera de la vaina. Córdoba fué uno de los centros productores, debiéndose tal vez á esta circunstancia, que se hayan perpetuado cierta clase de procedimientos y que gocen todavía de merecida fama las obras de filigrana ejecutadas por los plateros cordobeses.

Al terminar la invasión de los árabes renacieron en las nuevas monarquías peninsulares las olvidadas industrias, ajustándose la orfebrería, hasta la undécima centuria, á las tradiciones y al estilo visigodo. De ahí el carácter especial que presentan las piezas correspondientes á aquel periodo, que como la *Cruz de los*

Angeles, indica la influencia y el gusto bizantino. Esta interesantísima joya fué ofrecida por Alfonso el Casto en 808, hallándose cubierta de gruesa pedrería, en la que sobresale en el centro un precioso rubí, al cual corresponde en el reverso un gran camafeo, haciéndola más notable la delicada filigrana sobrepuesta á su plancha de oro. Sírvenle de pié dos ángeles arrodillados, encerrándose el todo en un costoso relicario. Supera á la anterior en tamaño y en riqueza la llamada de la *Victoria* ó de *DonPelayo,* que la tradición atribuye al primer caudillo de la reconquista. El oro y la pedrería que la reviste, así como la prolija escultura que la embellece, débense á la liberalidad de Alfonso III, que la hizo labrar en el castillo de Gauzón en 908. Otra pieza importantísima, aunque de distinto género y estilo, guárdase en la Cámara Santa de Oviedo, cual es el *Arca de las Reliquias,* cubierta de chapas de plata sobredorada á trechos, embellecida con curiosos relieves representando á los Apóstoles y escenas de la vida de Jesús, con extensa leyenda en sus orlas. En la catedral de Santiago guárdase también una cruz análoga á las anteriores, ejecutada en plancha de oro, con pedrería y filigranas y en el Museo Arqueológico Nacional una arqueta de igual estilo que las obras acabadas de mencionar y revestida de ágata con montura de plata.

Como digno remate de este periodo, justo es recordar el magnífico frontal del altar mayor de la catedral de Gerona, obra ejemplarísima del arte patrio, ofrenda de la condesa Gisla, esposa de Ramón Berenguer el Curvo, y de su madre Ermesinda. Una delgada lámina de oro cubría por completo la mesa de alabastro, dividiéndose el frontal en treinta y dos cuadros que representaban en relieve varios pasajes de la vida de Jesús, destacándose en el centro, limitada por un óvalo, la imagen de la Virgen, debajo de la cual estaban engarzadas dos piedras grabadas con el nombre de las condesas donantes. En los cuatro ángulos figuraban en esmalte las alegóricas representaciones de los Evangelistas y al igual de todas las obras similares de aquella época, hallábase enriquecida con gran número de piedras engastadas. Desgraciadamente para el arte, aquella valiosísima é inestimable obra fué destruída y empleado el oro de que estaba formada para pagar la crecida contribución que al cabildo de la catedral impuso el ejército francés, al rendirse la inmortal ciudad, sin que haya quedado, para que sea mayor la malaventura, dibujo ó diseño alguno que recuerde su estructura y disposición. Posteriormente y gracias á la munificencia de Guillermo Gaifredo, tesorero del citado cabildo, y de Arnaldo Soler, arcediano de Besalú, labróse el suntuoso dosel ó baldaquino de plata, que se apoya en cuatro delgadas columnas de hierro afectando la forma de un gran lienzo sujeto por sus puntas, y henchido por debajo. Creyérase al contemplar tan peregrina obra, que pudo ser un admirable producto del arte oriental. Así las columnas como los arcos y bóveda están cubiertos de una delgada capa de plata bellamente grabada. Completaba tan hermoso conjunto un notable altar, asimismo de plata, gallarda muestra de la orfebrería catalana del siglo XIV. El maestro Bartomeu, Ramón Andreu y Pedro Verneç fueron los tres orifices que dejaron grata memoria de su

pericia en el arte con las tres obras referidas, muy estimadas por los inteligentes y comparables por su mérito y riqueza con sus similares de Santo Tomás de Canterbuy y de San Marcos de Venecia.

Dos caracteres producidos por igual número de procedimientos y de clases de ornamentación, ofrece la orfebrería al finalizar la duodécima centuria: el que pudiéramos denominar latino, cuya nota característica son las labores de filigrana y la aplicación de piedras preciosas, trasunto ó recuerdo del gusto y de la dominación visigoda, y el bizantino, por emplearse el esmalte como elemento principal de embellecimiento.

El siglo XIII señala también para la platería una nueva fase: A semejanza de la influencia que el gusto ojival ejerció en las demás artes, la platería recibió de la arquitectura elementos y formas para la producción de sus obras, sirviendo las cresterías, pináculos y florones de motivos ornamentales. Tuvo un carácter casi religioso, pues apenas se construían otras piezas, que las destinadas al culto, como arquetas, relicarios, candelabros, vasos sagrados, incensarios y coronas de luz, á cuales obras aplicábanse, algunas veces con buen acierto, esmaltes y piedras preciosas, tan notables por su buen gusto como por la delicadeza de su ejecución. En dicho siglo empezaron los artífices á recurrir á la escultura, utilizando las humanas representaciones para el complemento de sus obras. Las arcadas y figuras anteriormente indicadas, que decoran algunas arquetas y relicarios, dan un nuevo aspecto á la plástica, distinguiéndose paulatinamente sus maestros por sus aptitudes y condiciones artísticas. Los perfiles trazados en los esmaltes y los contornos de los relives trocaron ya su forma y modelado, invadiendo los orífices el vasto campo reservado al arte.

Como obra notable de aquel siglo y joya de gran precio, citaremos el interesante tríptico conocido con el nombre de *Tablas Alfonsinas*, construido por encargo del rey D. Alfonso el Sabio para custodiar reliquias de santos. Hállanse las *Tablas* recubiertas de planchas de plata y divididas en 15 compartimientos minuciosamente ornamentados, entre los cuales existen gran número de cajitas tapadas con cristal de roca, destinadas á guardar reliquias, con sus correspondientes inscripciones en oro esmaltado. Supónese que esta hermosa pieza fué labrada por maese Jorge, á quien cita en sus *Cantigas* el Rey Sabio. Labradas por el mismo orífice fueron algunas de los joyas que ostentaban los cadáveres incorruptos del Santo Rey D. Fernando y de D.ª Beatriz, en el suntuoso enterramiento que mandó construir su hijo en la catedral de Sevilla. Valiosísimas eran las sortijas y corona que llevaba puestas la imágen de la Virgen, que figuraba en la capilla en donde descansaban los restos de los monarcas, hallándose cubiertos de plata con labores representando castillos, águilas y cruces, los tabernáculos que cobijaban las estatuas con representaciones de los Reyes, siendo tal la profusión de piedras preciosas que se hallaban engastadas en las coronas, espada, cetro y vestidos, así como en los doseletes, que cuando se «habría aquel tabernáculo de noche, las piedras relumbraban como candelas», según la gráfica

expresión del insigne D. Pedro de Madrazo. Bastará recordar, para formar exacto juicio de la riqueza acumulada en la mencionada capilla, que la marquesina de la Virgen hallábase adornada con esmeraldas, *tamañas como castañas*, ascendiendo á más de dos mil las piedras finas que contenían. La espada de San Fernando tenía el arriaz formado por un rubí como un huevo y formaba la cruz una esmeralda.

Poco difieren las obras de platería del siglo XIV de las ejecutadas en el anterior, distinguiéndose únicamente por la acentuación de las formas y la mayor adaptación de los elementos suministrados por el estilo dominante, que revelan la seguridad y mayor cultura de los artífices. Las cardinas, hojas zarpadas, festones trebolados, etc., son los motivos especialmente utilizados en la ornamentación. Las líneas tienden á modificarse, cual se puede notar en los incensarios, que pierden la forma globular para adoptar la piramidal, siendo todas las piezas muestra de un plausible empeño, perseguido por artífices y artistas, cual es, la depuración del gusto. Las agrupaciones de los plateros revistieron singular importancia, á la que contribuyó el desarrollo alcanzado por este arte. En Barcelona, cuyo gremio contaba largos años de existencia, designó en 1301, á tres de sus maestros para formar parte del Consejo municipal. Posteriormente el infante D. Juan de Aragón otorgó un privilegio en 17 de mayo de 1381, con el objeto de procurar el desarrollo de la platería y conservar el buen nombre de los orífices y la fama de que gozaban sus producciones. En las demás poblaciones catalanas gozaba esta industria de igual prosperidad, distinguiéndose en algunas de ellas por su indiscutible habilidad y maestría Raimundo Andreu, Pedro Capellades y Pedro de París. En Mallorca figuraron á la cabeza de la agrupación de orfebres Ramón Frau y Bartolomé Ponce, que labraron algunas piezas notables para la catedral; en Valencia, Juan Perpiñá; Rodrigo Fernat en Oviedo; Sancho Martínez en Sevilla, y Daniel de Boute, Domenjon de Mayer, Pascualet de Guarás, Rollet el Judío, Anach Acaya, Martín de Ichovi y Juan de Thoro en Navarra, en donde la fastuosidad de la corte de Carlos el Malo debió contribuir al fomento de la platería.

Entre las obras ejemplares ejecutadas en este siglo figuran en primer término el magnífico retablo de la catedral de Gerona, de que hemos hecho mérito al ocuparnos del frontal, cubierto de plancha de plata, y el soberbio sillón, asimismo de plata, del rey D. Martín de Aragón, de ricas y severas líneas y admirable por su ejecución y labores cinceladas. Supónese que sirvió de trono al citado monarca, destinándose hoy á sustentar la magnífica custodia de la catedral barcelonesa. Doblemente famosos por su mérito y por el personaje á que pertenecieron son el báculo del antipapa Luna, de plata dorada con figuras cinceladas y esmaltes translúcidos, que se conserva en el Museo Arqueológico Nacional, y el cáliz y la cruz procesional de cristal tallado y plata dorada, joyas existentes en la parroquial iglesia de Peñiscola, que tantos recuerdos guarda del obstinado pontífice, á quien no vencieron el abandono de los que le encumbra-

ron, el agobio de los años ni los anatemas de los concilios. Las tres alhajas ostentan las armas del antipapa, debiendo considerarse como piezas notables de la orfebrería gótica.

En la décima quinta centuria las obras de platería perdieron la severa belleza que distingue las producciones de los siglos anteriores, decorándose las piezas con profusión de delicados adornos. Las arquetas, cálices, cruces, etc., ofrecen gran interés, así por la elegancia de su forma como por la ejecución, siendo tan numerosa, como las obras que produjeron, la lista de los maestros que se distinguieron por su buen gusto y habilidad. Fermay, Cetina, Medina, Pizarro, Rodríguez, Alonso García, Ruiz de Astudillo y otros más, produjeron obras notables y figuraron entre los orífices que más se distinguieron entre los que contaba Barcelona, Valencia, Burgos, Sevilla, Toledo y otras poblaciones peninsulares. El arte de la platería dejó de tener un carácter puramente religioso, abriéndose un nuevo campo para su desarrollo, gracias al excesivo lujo que dominó á todas las clases, generalizándose con tal motivo el uso de platos, jarros, vasos y otros objetos de plata labrada y cincelada, considerados como indispensables en las mansiones señoriales y en las viviendas de las gentes acomodadas. Las crónicas de aquella época consignan datos curiosísimos, que demuestran el fausto y la riqueza desplegados en los festines y la prodigiosa cantidad de alhajas que constituían el tesoro de los monarcas y grandes señores.

Entre las producciones notables de esta centuria es digno de mencionarse el magnífico copon que posee la parroquial iglesia de Castro-Urdiales, decorado con primorosas cresterías y negros esmaltes afectando la forma de una urna; la hermosa custodia de tres cuerpos, embellecida con pináculos, contrafuertes y cresterías, que á su vez guarda la iglesia de Lorca, cuyos remates indican ya la influencia del renacimiento; una cruz procesional labrada en oro con esmaltes, de la catedral de Gerona, que presenta todos los caracteres del estilo ojival florido y la llamada *Guión de Mendoza*, por ser la que llevó el cardenal de aquel nombre en las guerras de Granada, existente en la catedral de Toledo. Estas piezas, como todas las de este período, distínguense por la delicada y perfecta ejecución de sus labores, siendo los elementos arquitectónicos los motivos de su decoración. De ahí que en ellas abunden las arquerías, doseletes y demás galas del estilo ojival florido.

Honda transformación produjo el Renacimiento. El nuevo estilo aportó otros conceptos y las artes todas, ya preparadas para la mutación en el último tercio de siglo anterior, iluminároнse con las novísimas ideas. A la poderosa inteligencia de algunos artistas, á quienes la posteridad considera como astros de primera magnitud en el cielo del arte, debióse la nueva fase, que de modo tan admirable interpreta las aspiraciones de un siglo, que marca los derroteros de los pueblos modernos.

Con la preparación de los siglos anteriores, presto rivalizaron los joyeros de nuestro país con los italianos. En los medallones, pendientes, colgantes, etc.,

hicieron gala de su maestría en el cincelado, en la discreta aplicación de piedras de variados tonos y esmaltes, que revelan tan buen gusto y tal sentimiento artístico que no han logrado superar los modernos artífices. Los mascarones, genios, follajes, conchas, entrelazos y cuantos temas aportó el Renacimiento combináronlos con admirable acierto. Basta examinar los curiosísimos *Libros de Pasantia del Gremio de Plateros de Barcelona*, para apreciar en su justo valor el mérito de aquellos artífices, que dejaron dibujados en las hojas de tan interesantes volúmenes los proyectos de las obras que ejecutaron para alcanzar el título de maestros, el testimonio de su genialidad y la historia de la época en que vivieron, pues á partir del año 1500, que figura en la primera hoja del primer volúmen, hállanse descritos, algunas veces con peregrino ingenio por medio de alegorías, composiciones ó temas, los acontecimientos ocurridos en nuestra ciudad, las costumbres ó aspiraciones, y hasta adivínanse miserias engendradas por antagonismos de profesión.

Iguales progresos y señalado perfeccionamiento técnico obsérvase en las obras de platería, si bien hemos de confesar que se deben en gran parte á la influencia de los orfebreros extranjeros que se establecieron en nuestra patria, como el alemán Enrique de Arfe, el italiano Jacobo Trezzo y el flamenco Hans Belta. Sin embargo, podemos citar los nombres de otros artífices españoles que como los Becerriles, Juan Ruiz, Gregorio de Varona, Juan de Benavente, Aguiar, Thomé García, Julián Honrado, Pedro de Madrid, Guillen Soler, Felipe Amorós, Jofra Xalto, etc., labraron piezas de igual importancia y se distinguieron asimismo como hábiles y entendidos maestros. Ellos, pues, labraron esas monumentales custodias que constituyen una especialidad en la orfebrería española; las espléndidas cruces procesionales, los hermosos cálices, paces y cuantas piezas forman el tesoro de nuestros templos, á la construcción de algunas de las cuales se destinó el primer oro que se recibió de América. Los monarcas, la nobleza y el clero procuraron el fomento de la platería, contribuyendo á su progreso los frecuentes concursos abiertos por los cabildos catedrales, cuando se trataba de la construcción de obras de importancia, ya que sirvieron de noble palenque á los plateros, obteniéndose como ventaja inapreciable, la originalidad y la perfección.

Obra de Enrique de Arfe es la suntuosa custodia de la Catedral de Córdoba, pieza verdaderamente ejemplar, que por sí sola bastaría para acreditar la valía del maestro. Forma tres cuerpos ó zonas, embellecida con arbotantes, torrecillas, cresterías, arcos y elegantes motivos inteligentemente combinados, alternando el oro con la plata bruñida y mate. Más importante, si cabe, es la que el mismo orífice fabricó en 1524 para la Catedral de Toledo por encargo del Cardenal Cisneros. Afecta la forma piramidal, y entre los numerosos elementos que la adornan, figuran doscientas sesenta estatuas de distintos tamaños, perteneciendo al último período del estilo ojival florido. Es de plata blanca y dorada, á excepción del viril, que es de oro esmaltado; mide dos metros cincuenta centímetros de

altura y su coste ascendió á la suma de trescientos cuarenta y cinco mil seiscientos cuarenta y nueve reales, sin incluir el valor de las piedras finas. No menor mérito revisten asimismo las custodias que construyó para León y Sahagun, las que á su vez ejecutó su hijo Antonio para Santiago de Galicia y Medina de Rioseco, y la de Sevilla, que labró Juan de Arfe, nieto é hijo respectivamente de los dos anteriores, de cuatro cuerpos, adornada con estatuas y columnas, *traído todo con mucho ingenio y propiedad.* De Juan de Benavente es la magnífica custodia de la catedral de Palencia, formada por un templete exágono de plata, formado por dos cuerpos sostenidos por columnas de orden corintio y compuesto, rodeados de bellas figuras de los Apóstoles; á Juan Ruiz se deben las de Jaen, Baza y San Pablo de Sevilla, y á Alonso Becerril la de la catedral de Cuenca.

Como joyas inestimables, considéranse por los inteligentes, algunas de las cruces procesionales existentes en nuestras basílicas, distinguiéndose entre ellas la de León, obra de Enrique de Arfe, adornada con medallones y con un gran templete en el arranque, ostentando en los brazos prolija ornamentación y la de Orense, labrada por el mismo artífice, tan ostentosa como la anterior. Imperdonable omisión sería no mencionar la llamada *Cruz de la Manga* de la catedral de Toledo, ejecutada por Gregorio de Varona, de plata dorada, con un hermoso crucifijo perfectamente cincelado.

La mayor parte de las piezas de que hacemos mérito, concibiéronse bajo la influencia todavía del estilo ojival, revistiendo igual ó mayor importancia las que posteriormente se ejecutaron reflejando los nuevos estilos que en nuestra patria engendró á su vez el Renacimiento. Así lo atestiguan, entre las innumerables piezas que podríamos citar, las custodias de Avila, Burgos y Palencia, una *paz* de oro de la iglesia ducal de Osuna y varios cálices existentes en el Kensigton Museum de Londres.

No podía sustraerse la platería española á las corrientes que informaron todas las producciones artísticas del siglo XVII. Los orífices utilizaron los elementos distintivos de los nuevos estilos, reflejándose en sus obras, lo mismo en las de caracter monumental que en las destinadas al uso doméstico, las diversas transformaciones, que revelan las fases artísticas de aquella centuria. Extensísima es la escala que este arte recorrió costando esfuerzo comprender cómo los sucesores de aquellos artífices, que labraron las primorosas custodias plateresca, pudieron construir análogas piezas ajustadas á la extravagante originalidad del churriguerismo. Algunos, sin embargo, debieron ser fieles guardadores de las tradiciones del siglo anterior, pues no de otro modo se comprende la existencia de piezas tan notables como la hermosa bandeja de plata, con primorosos relieves, titulada la *Paiva*, que se guarda en el tesoro de la catedral de Sevilla, ofrecida en 1683 por una dama de aquel apellido. Sensible es que piezas de igual importancia hayan desaparecido, al ser fundidas para ejecutar otras ajustadas á los caprichos impuestos por la época ó para subvenir á necesidades producidas

por la penuria y soportar en casos extremos las consecuencias de las guerras, que con harta frecuencia tuvieron por teatro la península ibérica, arruinándola y empobreciéndola.

La joyería rompió con las tradiciones de la época anterior, y á los amorcillos y quimeras cinceladas y esmaltadas y demás motivos empleados por los grandes maestros del Renacimiento, sustituyeron los diamantes y perlas engarzadas, que algunas veces cubrían por completo el campo ó superficie de la pieza. La escultura y con ella las primorosas labores del cincelado, desaparecieron para dejar á la pedrería vastísima esfera de aplicación. La fantasía del artífice debía ejercitarse en un nuevo medio, en el que la forma se posponía al efectismo de los tonos alcanzados por la combinación de los variados matices de los brillantes, esmeraldas, perlas, etc., sin que á pesar del cambio perdieran en absoluto el carácter monumental, todavía distintivo de las joyas producidas en esta centuria.

Escaso interés ofrecen las obras del siglo XVIII. En España perdieron en gran parte los caracteres distintivos de la platería española, subordinándose á los cánones artísticos importados por Felipe V. Algunas piezas podríamos citar, sin embargo, verdaderamente recomendables, como los hermosos candelabros de la catedral de Palma de Mallorca, labrados en 1703 por el platero barcelonés Juan Matons; su limitación confirma, por desgracia, la terminación del glorioso período de la orfebrería en nuestro país.

La platería y la joyería modernas han utilizado, como las demás artes, los elementos que les ofrecen todos los pueblos, épocas y estilos, limitándose el artífice á elejir y combinar. La inteligencia en la aplicación y la fidelidad en las imitaciones son el objetivo que se persigue, resultando de la armónica asociación de una y otra, piezas muy notables, que en lo venidero, y á falta de estilo que caracterice nuestra época, se estimarán, por la perfección de su labor, como obras de reconocido mérito.

Por fortuna, Barcelona ha logrado anundar sus antiguas tradiciones y constituir un centro productor de extraordinaria importancia. En la primera Exposición Universal Española, celebrada en nuestra ciudad, manifestó gallardamente el resultado de sus nobles esfuerzos y la intensidad de la evolución operada, de tal suerte, que puede envanecerse de haberse librado del vasallaje extranjero y creado esas bellísimas manifestaciones, adaptadas á las modernas corrientes artísticas, que pregonan la inteligencia, la cultura y la habilidad de nuestros orífices.

Podremos haber caído en períodos de postración, pero el arte patrio no ha muerto, porque es el alma, la esencia de un gran pueblo, que felizmente cuenta para guiarle con privilegiadas inteligencias, con artistas meritísimos y con esa pléyade de jóvenes entusiastas, que alientan por elevados ideales, representando una grata esperanza para la patria.

He dicho.

DISCURSO DE CONTESTACIÓN

por el Académico

D. José Masriera Manovens

El nuevo Académico, el distiguido señor D. Antonio García y Llansó, acaba de leer un brillante discurso, lleno de erudición y de sentimiento, cuyos periodos me han producido tan perfecto como sincero entusiasmo. Debo hacerlo constar seguidamente, por haber decidido esta Real Academia que fuese yo el nombrado para contestarlo, á pesar de la insuficiencia que me reconozco; sin embargo, lo haré con el calor y la buena fe que en mi despiertan los conceptos emitidos con toda la verdad y la precisión propios del autor del mentado discurso.

Empieza éste dedicando sentidos párrafos á nuestro insigne compañero, al que fué en vida el notable artista, sabio maestro é insigne ciudadano D. Luis Rigalt, para quien resultarían débiles las palabras laudatorias que yo pudiera añadir á las que acaba de pronunciar el nuevo académico que ha venido á ocupar el sitio que aquel dejó vacío.

La totalidad y el fondo del discurso van directamente á lo que constituye mi profesión: la Joyería y Platería juzgados histórica y artísticamente con datos muy justos y apropiando los comentarios que le sugiere la esencia de estas artes tan importantes desde su origen y esencialmente decorativas. Según las épocas y según las aspiraciones de quienes las han ejercido con mayor ó menor objetivo artístico, según el interés con que se apreciaban por el valor de la plata y del oro de sus productos. De ahí que el Sr. García con el mayor acierto diga que ellas han inducido á la humanidad á cometer los más execrables crímenes, lo mismo que á realizar las más nobles empresas. Se han empleado para tributar con ricos medios la alabanza á la patria, á Dios, á los seres y á embellecer la morada, por ser común é intuitivo de todas las razas y de todos los tiempos el deseo de engalanar todo lo que es querido, empezando por el propio individuo, en quien siendo natural el sentimiento de la belleza (cuya ausencia experimentan solo determinados seres, pocos por fortuna), aspira á engalanarse y mejorar en lo posible el aspecto exterior de su personalidad y de todo cuanto esta ama, posee ó reverencia.

Desgraciadamente han desaparecido, ante la justa curiosidad del arqueólogo, los millares de objetos primitivos que en nuestro pais y especialmente en las provincias gallegas, se habían producido como datos admirables que vendrían á darnos luz sobre la parte artística é histórica que representarían.

Empero el Sr. García suple la falta del dato con lo atinado de la observación, llevándonos á considerar lo que pudieron ser los objetos primitivos desde

sus épocas remotas hasta llegar á aquellos en que la Orfebrería y la Joyería llegaron á un grado de esplendor extraordinario, á favor del cual se ha podido hacer constar que nuestra patria, dotada de todos los elementos geniales, de todos los medios que la estética sugiere y de la constancia y empresa de sus hijos, llegó á ser el emporio de este arte durante muchos siglos, siendo reconocida su superioridad por las mismas naciones extranjeras.

De consideración en consideración y pasando por todas las épocas, desde las primitivas, se para en el siglo XVI. del cual se conservan obras maestras que pasarán á través de los tiempos señalando el genio de sus autores y proclamando el gran número de sus bellezas, hasta que llega al siglo XVII y por fin al XVIII y XIX, en que la producción artística tuvo el más cabal descenso, perdiendo por completo todo sabor de arte y sugetándose tan solo al aspecto de la riqueza material, pero afortunadamente, de sus estravíos, de su falta de sentido y de su sensible atraso, salió triunfando, merced al sentido estético, dominando éste, hoy por hoy, en nuestras artes tan esencialmente decorativas y útiles para el cultivo moral de la belleza y para infundir el buen gusto que de su enseñanza se puede reportar.

En esto hemos llegado al siglo XX, á la época presente, en que prestando todo el sentido tributo á la historia de las artes, apropiándonos de lo que resultaba de su enseñanza y estudiando desde sus síntesis hasta sus más pequeños pormenores, de acuerdo con las condiciones y aspiraciones nuestras, hemos hallado el medio de producir artísticamense combinando los ricos materiales para atender al efecto capital de la obra, y satisfaciendo las aspiraciones en lo artístico para justo recreo del alma y medio para la buena instrucción.

D. Antonio García Llansó tributa á semejante tema toda la elocuencia y todo el amor que despiertan en su alma y en su corazón el adelanto artístico de nuestra querida patria, vindicada ya, después del sufrido atraso que en épocas anteriores obscureció la luz de la tradicón y de la historia, pues vemos que en nuestros días vuelve á su vida robusta, reapareciendo su poder artístico con todo el vigor propio de la raza española, para quien no muere cuanto sea producto moral del sentimiento y la inspiración.

Felicito, pues, con toda la sinceridad de que es capaz mi entusiasmo por el arte y por la patria, al nuevo académico cuyos valiosos conocimientos vienen á aumentar el peculio intelectual de los miembros de esta corporación y felicito á á la Real Academia por contarle desde hoy en su seno y honrarse con su compañerismo.

MEMORIAS
DE LA
REAL ACADEMIA DE CIENCIAS Y ARTES
DE BARCELONA
TERCERA ÉPOCA — VOL. VII. NÚM. 2

TRATADO DIDÁCTICO
DE LAS
GEOMETRÍAS NO-EUCLÍDEAS

POR

J. M. BARTRINA Y CAPELLA

Catedrático de Matemáticas en el Instituto general y técnico de Barcelona

OBRA LAUREADA
POR ESTA REAL ACADEMIA

Con motivo del concurso al Premio Agell, correspondiente al bienio de 1905 á 1907

Publicada en Junio de 1908

BARCELONA

A. LÓPEZ ROBERT, IMPRESOR.—CONDE DEL ASALTO, 63.

1908

ES PROPIEDAD DEL AUTOR

PRÓLOGO

OJEADA HISTÓRICA

Entre los primeros principios ó proposiciones irreductibles que, bajo el título de axiomas, inscribió Euclides en su obra inmortal, el XI (ó XII, según algunos traductores) atrajo desde luego la atención, por carecer de la evidencia axiomática que su autor le atribuía, y recibió de la posteridad, sin duda como protesta, el nombre de *Postulado de Euclides*, que aún conserva actualmente (*). Como este principio, aunque muy sencillo, no es de evidencia inmediata, requiere una demostración; y el omitirla constituye en la teoría de las paralelas una sorprendente laguna, la cual se consideró como indigna de una ciencia que se precia de exacta, como un lunar impropio de una obra tan acabada como la del inmortal geómetra griego; y tratando de corregir esta imperfección, y de llenar aquella solución de continuidad, propusiéronse los geómetras encontrar una demostración del pretendido axioma. Pero todas sus tentativas resultaron inútiles, y aunque en ellas se ejercitaron innumerables ingenios, el obstáculo permaneció inquebrantable, humillando con su aparente sencillez los poderosos esfuerzos de los matemáticos. Sus infructuosas tentativas, sus vanas investigaciones, sólo sirvieron para poner de manifiesto con cuánta sagacidad supo Euclides escoger los materiales para los cimientos del edificio geométrico.

Estos fracasos, de los cuales nace la extraordinaria celebridad del Postulado, sirvieron de acicate al empeño de los geómetras; y no es que nadie pusiera en duda la exactitud de la famosa proposición: la armonía lógica entre sus innumerables consecuencias, su acuerdo con la realidad, tantas veces manifestado por las variadas aplicaciones de la Geometría al estudio de los fenómenos naturales, y, sobre todo, los falaces experimentos geométricos que la imaginación, dominada por prejuicios, puede efectuar en apoyo de aquel principio, eran motivos suficientes para que, ni por un momento, surgiera la duda en la mente de los geómetras. Si se trataba de encontrar la ansiada demostración, era porque nuestro espíritu se complace en ver reducidas á leyes axiomáticas todas las demás; porque así lo exigía el perfeccionamiento de la ciencia; porque en ello estaba empeñado su

(*) He aquí su enunciado: si en un plano, dos rectas a y b cortadas por una tercera c, forman con ésta y á un mismo lado de ella, dos ángulos internos cuya suma es menor que dos rectos, las dos rectas a y b (prolongadas indefinidamente) se cortarán hacia el mismo lado de la secante c en que se encuentren dichos ángulos internos.

honor; y principalmente por llenar una laguna que, según la expresión de D'Alembert, era "el escándalo de la Geometría".

En el siglo XVIII, el rebelde problema continuaba preocupando á muchos espíritus, y entre otros á Saccheri, Lambert y Legendre. Sus tentativas no fueron coronadas por el éxito; pero les condujeron al descubrimiento de interesantes leyes y de algunas peregrinas consecuencias, que resultarían de rechazar el Postulado, leyes y consecuencias que son los gérmenes de una geometría no-euclídea, pero que, presentadas sólo á título de curiosidad, sin concederles la importancia que merecían, permanecieron infecundas en manos de sus descubridores.

Entre los innumerables geómetras náufragos en los mares del Postulado, merece citarse á W. Bolyai, matemático húngaro, amigo de Gauss, de quien era gran admirador, y que dedicó, aunque sin resultado, perseverantes meditaciones al famoso problema. Contrariado W. Bolyai por lo infructuoso de sus tentativas, tenazmente proseguidas durante varios años, sintió cierto desvío hacia la Geometría, al lamentar el tiempo perdido; y temeroso de que su hijo Juan (que con rara aptitud cultivaba también las matemáticas) siguiera sus huellas, le aconsejó que, escarmentando en cabeza ajena, se apartara de toda investigación sobre el Axioma XI de Euclides, pues era loco empeño buscar una demostración en la que tantos ingenios habían fracasado, y que sólo podría conducirle á una lamentable pérdida de tiempo.

Afortunadamente para la ciencia, Juan Bolyai, desoyendo estos consejos, que más bien le servirían de estímulo, dedicóse con ardor á las mismas investigaciones que su padre reprobara. El resultado de sus estudios fué la aparición, en 1832, de su "*Ciencia absoluta del Espacio*" obra originalísima, en la cual su autor, abandonando el rumbo que siguieran sus predecesores, concibe el atrevido pensamiento de suponer falso el célebre Postulado; y partiendo de esta hipótesis, sin arredrarle las consecuencias, reñidas aparentemente con la realidad, y guiado por una lógica inflexible, crea una rigurosa geometría, cuyas leyes se armonizan mutuamente, y que, además, por extraño que al pronto parezca, no están en desacuerdo con la experiencia. Tan inesperado descubrimiento inunda de luz el misterio que, durante tantos siglos, había preocupado á los matemáticos: si la geometría de Bolyai, como la de Euclides, está exenta de contradicciones, si sus leyes, no sólo se armonizan lógicamente, sino que no están desmentidas por la observación, no hay motivo para conceder la preferencia á ninguna de aquellas dos ciencias; en otros términos, no hay razón para inclinarse en favor del Postulado; y este principio, durante tanto tiempo indubitado, es una mera hipótesis, que debe ser puesta en tela de juicio. Tal es la consecuencia á que conduce la genial creación del eminente geómetra.

La historia de las ciencias exactas nos enseña, con repetidos ejemplos, cuan frecuente es que dos matemáticos de una misma época, con entera y recíproca independencia, coincidan en determinada demostración, inventen una misma teoría, adopten en otra análogos puntos de vista, ó realicen simultáneamente un mismo

descubrimiento. Este hecho se repitió una vez más en las Geometrías no-euclídeas. Mientras Bolyai en Hungría alzaba el velo que ocultaba el enigma del Postulado, Gauss en Alemania, y Lobatschewsky en Rusia, realizaban igual conquista científica. Desgraciadamente, Gauss que desde 1792 estudiaba el trascendental problema, y poseía ya en 1819 una geometría fundada en la negación del Postulado, tan completa como la usual, guardó en secreto su descubrimiento, confiándolo solamente á sus más experimentados y discretos amigos, por la convicción en que estaba de que "el número de verdaderos geómetras es mucho menor de lo que generalmente se presume", y "por temor al clamoreo de los necios"; y aunque comenzó la tarea de confiar al papel el fruto de sus estudios, la abandonó muy pronto, al enterarse con estupefacción de que la mayoría de sus propias conclusiones habían sido ya encontradas por Bolyai.

En cuanto á Lobatschewsky, sus investigaciones que en lo esencial coinciden con las de Bolyai, y fueron expuestas, primero en 1826 en una lectura pública, y más tarde en su *Geometría imaginaria* (1835 y 1838), y en su *Pangeometría* (1855), le conducen también, aunque por caminos más expeditos, que merecieron el elogio de Gauss, á construir una ciencia geométrica, edificada sobre la inconmovible base de la falsedad del Postulado; y convencido de que este principio no dimana de la noción de línea recta, y no es una ley necesaria, sino un conocimiento empírico, elevado sin títulos suficientes á la categoría de axioma, propone acudir á observaciones astronómicas (que él mismo realizó más tarde) para determinar el parámetro de la extensión que encierran las fórmulas de la nueva geometría, ó cuando menos para fijarle un límite, que aquilate el grado de confianza que podemos conceder á las aplicaciones de la Geometría usual.

Los trabajos de Bolyai y Lobatschewsky, á pesar de su importancia, pasaron casi inadvertidos hasta después de la muerte de Gauss, en que, habiéndose publicado su correspondencia con Schumacher, el ilustre sabio atrajo la atención hacia aquellos descubrimientos, señalándolos con el fallo favorable de su indiscutible autoridad. Desde entonces, multitud de investigadores, lanzándose por la nueva vía, confirmaron, por los más diversos métodos, las leyes ya descubiertas en la nueva ciencia de la extensión.

Quedaba, pues, completamente descifrado el enigma que Euclides lanzó á la posteridad, grabándolo en la fachada de su obra inmortal; y el misterio que durante más de dos mil años había permanecido inaccesible, parecía completamente resuelto, cuando Riemann, con su poderosa mentalidad, descubrió otra importante fase del problema. En 1854, el ilustre discípulo de Gauss, en su memoria *Sobre las Hipótesis que sirven de base á la Geometría*, leída ante la Sociedad filosófica de Goettingue, observa que la propiedad del espacio de ser ilimitado, no entraña como consecuencia necesaria que sea infinito; y que, por consiguiente, atribuir al espacio esta última propiedad es una mera hipótesis; pero también se podría, sin incurrir en contradicción, adoptar la hipótesis contraria. Si se admite, pues, que el espacio, aunque ilimitado es finito; ó en otros términos, que la dis-

tancia entre dos puntos tiene un límite máximo; ó lo que es equivalente, que la recta es una línea cerrada, de longitud finita, se concibe la posibilidad de fundar sobre este principio una tercera geometría; y esto es lo que han hecho diversos matemáticos, desenvolviendo las ideas de Riemann.

Como consecuencia de las investigaciones que dejamos expuestas, tres geometrías, que corresponden á otros tantos universos posibles, se presentan á nuestro espíritu: una *vulgar, euclídea ó parabólica*, que es la clásica ó usual; y otras dos *no-euclídeas* ó *antieuclídeanas:* la *hiperbólica* ó *pseudo-esférica,* descubierta simultáneamente por Gauss, Bolyai y Lobatschewsky; y la *elíptica* ó *esférica*, que es la ideada por Riemann. ¿Ahora bien, cuál de las tres es la verdadera? Ó, en otros términos, ¿cuál de las tres es la que corresponde al universo real? Problema es este que no puede ser resuelto por el simple raciocinio, porque, en cada geometría, sus propias leyes se armonizan, no se contradicen jamás; y, así, las tres son teóricamente incontrovertibles. Es, pues, necesario, para responder á la anterior pregunta, apelar á la experiencia como último recurso, es decir, comprobar, mediante la observación, si el universo real está de acuerdo con una de aquellas tres ciencias, y en desacuerdo con las otras dos. Se puede, por ejemplo, teniendo presente que, para el triángulo, la suma de sus tres ángulos, constantemente igual á dos rectos en el supuesto euclídeo, es siempre menor en el de Gauss, y mayor en el de Riemann, decidir cuál de estos tres casos se verifica, midiendo directa ó indirectamente, con instrumentos de precisión, los tres ángulos de un triángulo cuyos vértices sean tres estaciones escogidas á voluntad. Para realizar este experimento, conviene valerse de un triángulo que sea lo mayor posible, porque, según las teorías no euclídeas, el área del triángulo es proporcional á su exceso ó defecto angular, es decir, á la diferencia entre dos rectos y la suma de los tres ángulos; de lo cual se infiere que esta diferencia (si no es nula) será tanto mayor, y más fácil de apreciar con los instrumentos de medida, cuanto mayor sea la referida área. Pero, hasta hoy, en todos los triángulos observados, por grandes que sean, resulta que la suma de sus tres ángulos es sensiblemente igual á dos rectos; pues, aunque discrepe un poco de esta cantidad, la pequeña discrepancia es siempre atribuíble á lo imperfecto de los instrumentos de medida y á los errores inherentes á la observación. ¿Prueban estos resultados que las geometrías no-euclídeas sean falsas? De ninguna manera: prueban tan sólo que, para todos los triángulos observados, la diferencia entre dos rectos y la suma de sus tres ángulos es nula ó muy pequeña; y que, en este último caso, la pequeñez se debe á no ser bastante grande el triángulo sometido á experimentación. Resulta, pues, que ninguna de las tres geometrías, teóricamente posibles, ha sido hasta hoy desmentida por la experiencia; y que, así, permanece ignorado cuál de las tres corresponde á la realidad. Sería, pues, injustificada preferencia inclinarse á favor de la Geometría vulgar, pues ésta, según la expresión de Poincaré, "podrá ser la más cómoda, pero no la más verdadera."

De tan sorprendentes conclusiones, surge enseguida una reflexión: ¿Si el

edificio de la Geometría clásica, conmovido en sus cimientos, en dos de sus más firmes pilares, en el famoso Postulado y en la noción de un espacio infinito, no ofrece la solidez que en otros tiempos se le supuso, si es lo prudente desconfiar de su exactitud, qué grado de confianza pueden merecernos las aplicaciones de aquella ciencia? Lobatschewsky, interrogando á la naturaleza, ha podido contestarnos cumplidamente; y aunque en sus investigaciones no tomó en cuenta la hipótesis de Riemann (que le fué desconocida) sus cálculos y conclusiones son también, casualmente, aplicables en dicha hipótesis. El ilustre rector de la Universidad de Kasan, del cual, con justicia, se ha dicho que es "el Copérnico de la Geometría", partiendo de ciertas observaciones astronómicas, y no empleando en sus cálculos otras leyes de la extensión que aquellas que, por ser comunes á las tres geometrías, son indudables, ha deducido, tras escrupuloso examen sobre los límites de los errores inherentes á las observaciones, que para un triángulo rectilíneo, cuyos lados sean iguales á la distancia de la Tierra al Sol, el exceso ó defecto angular es inferior á tres diezmilésimas de segundo; y sería, por consiguiente, de extremadísima pequeñez para los triángulos de extensión tan exigua que suelen considerarse en las aplicaciones, como son los que se utilizan en una triangulación, ó se trazan en un dibujo. No hay, pues, inconveniente en admitir en la práctica, que la suma de los tres ángulos de un triángulo vale dos rectos; ó en otros términos, que la Geometría euclídea es verdadera; pues, aunque fuera falsa, su admisión no originaría errores apreciables en las aplicaciones actuales de la ciencia, ni aún en las más delicadas. Mas, si para estas aplicaciones debemos tener ciega confianza en la Geometría usual, no ocurre lo mismo en el terreno puramente científico, en el cual la cuestión queda en pié. Y quedará siempre, si dicha geometría es la verdadera; pero, si es falsa, si está en desacuerdo con la realidad, cabe esperar que este desacuerdo se manifieste algún día, pues observando un triángulo de extensión suficiente, la diferencia entre dos rectos y la suma de sus ángulos será bastante grande para que no pueda ser atribuída á los errores de la observación.

Al penetrar por primera vez en el campo de las Geometrías no-euclídeas, experimentamos cierta repugnancia, no sólo por sus hipótesis características, sino también por muchas de sus consecuencias; y esta repugnancia no cesa hasta que, avanzando en el estudio, la armonía que se descubre entre las diversas leyes, nos hace abandonar el lastre de falsos prejuicios sobre el espacio, que se nos hicieron familiares con la experiencia, y soldaron tenazmente á nuestra razón con el cultivo de la Geometría clásica. Esos prejuicios, de los cuales no se libra nadie, fueron indudablemente la causa de que durante un largo período de tiempo el Postulado guardara su secreto; la causa de que Gauss sostuviera en su razón ruda batalla, antes de descubrir la verdadera naturaleza de aquel principio; la causa, en fin, de que algunos espíritus consideren las sublimes concepciones de las teorías anti-euclídeas como un delirio, ó las miren con prevención, ó las impugnen.

Y con esto, queda manifestado que los grandiosos monumentos que, como rivales del edificio euclídeo, erigieron los genios de Bolyai, Lobatschewsky y Riemann, las admirables conquistas científicas que sancionó Gauss, es decir, el gran maestro de los tiempos modernos, y patrocinan hoy distinguidos matemáticos, tienen también sus contradictores. Pero todas sus objeciones son facilmente refutables, pues se basan en la admisión de postulados tan discutibles ó más que el de Euclides, ó nacidas de un conocimiento falso ó incompleto de las teorías que combaten, pueden dirigirse, con igual apariencia de lógica, en contra de la Geometría clásica.

Á despecho de sus detractores, las geometrías no-euclídeas, avanzan gloriosamente, empujadas por una pléyade brillante de matemáticos partidarios de las nuevas doctrinas; y éstas se enriquecen de continuo con notables opúsculos, con valiosos descubrimientos. Pero estos trabajos, como obras de investigación, dirigidas más bien á profesores que á principiantes, carecen de las explanaciones necesarias en toda obra destinada á la enseñanza, no se detienen ante dificultades analíticas, y suponen familiarizado al lector con el conocimiento de ciertas memorias clásicas, que, por hallarse agotadas, son de difícil adquisición; de todo lo cual resulta que las nuevas geometrías, aunque cuentan ya con una rica literatura, carecen de verdaderas obras didácticas; y, sobre todo, se nota la falta de un tratado elemental, en el que, sin apelar á grandes recursos de cálculo, se expongan las primeras nociones de la ciencia, haciéndolas así fácilmente asimilables, y preparando el acceso á las obras de los maestros. Ese vacío es el que pretende llenar el presente libro, el cual, como su título indica, no es otra cosa que un *Tratado didáctico de las Geometrías no-euclídeas*, ó mejor dicho, de sus elementos, labor modesta, que no por serlo, deja de ofrecer serias dificultades, y que presento con la desconfianza consiguiente. Deseando colocar este *Tratado* al alcance del mayor número, he puesto principal empeño en limitar sus cálculos á los más sencillos, sin recurrir al manejo de integrales ni de otros poderosos instrumentos del análisis. También he procurado exponer las diversas proposiciones en el orden más natural posible, y dar de ellas demostraciones expontáneas, rechazando, por consiguiente, las que son artificiosas; pero, á pesar de mis propósitos, estoy bien convencido de que el andamiaje que propongo para la construcción de los edificios anti-euclídeos, no estará exento de objeciones. ¿Cómo no ha de estarlo, tratándose de un ensayo en que no he tenido modelos que imitar? ¿Si los elementos de la Geometría clásica, cultivados desde la antigüedad, tras incesantes reformas y perfeccionamientos, distan aún mucho de alcanzar una constitución irreprochable, qué ha de ocurrir con la nueva ciencia geométrica, que por ser de reciente creación, apenas ha sido estudiada desde el punto de vista didáctico? No tengo, pués, la pretensión de haber acertado, y quedarán satisfechas mis aspiraciones, si, á pesar de todos sus defectos, puede este ensayo contribuir á la divulgación de las nuevas doctrinas.

INTRODUCCIÓN

LEYES INDEPENDIENTES

DEL

AXIOMA XI DE EUCLIDES

LEYES INDEPENDIENTES

DEL

AXIOMA XI DE EUCLIDES

I. — Objeto de esta Introducción [a].

1. Este objeto no es otro que exponer las más elementales leyes geométricas, que, siendo verdaderas, independientemente de la verdad ó falsedad del Axioma XI de Euclides, y constituyendo, por lo tanto, un cuerpo de doctrina indiscutible, han de servirnos de fundamento para penetrar en el campo de la Geometría no-euclideana, denominada hiperbólica. En estas leyes, que colocamos en un orden lógico posible, hemos omitido, generalmente, las demostraciones, por ser bien conocidas, y sólo las conservamos para aquellas proposiciones que, no obstante ser independientes del Postulado euclídeo, suelen fundarlas en él los tratadistas, y también para aquellas otras que, por carecer de interés dentro de la Geometría vulgar, no figuran en los tratados de esta ciencia. El lector familiarizado con el estudio de los Elementos, comprobará fácilmente que todos los principios, incluídos en esta *Introducción*, son independientes del Postulado de Euclides.

II. — Leyes fundamentales.

2. Toda figura puede ser trasladada, sin deformación, del lugar que ocupa á otro lugar cualquiera del espacio.

3.* Dos puntos determinan la posición de una recta. En otros términos: por dos puntos dados, siempre puede pasar una recta, y nada más que una.

(a) Casi todas las leyes incluídas en esta *Introducción* son también verdaderas en la hipótesis de *Riemann*. Se exceptúan solamente las que van precedidas de uno ó dos asteriscos: las primeras son ciertas, en general (en dicha hipótesis), pero caen en defecto en ciertos casos particulares; las segundas, es decir, las que van precedidas de dos asteriscos, no se cumplen nunca, ó dejan de cumplirse en infinidad de casos, cuando se admite la hipótesis riemana.

* Dos rectas, que tienen dos puntos comunes, coinciden, no sólo entre esos dos puntos, sino totalmente. Dos rectas no pueden cortarse en más de un punto.

Todo segmento rectilíneo puede coincidir por inversión consigo mismo.

4. * Si una recta pasa por dos puntos de un plano, tiene todos sus puntos en dicha superficie.

5. Una recta a de un plano corta á todo segmento rectilíneo, trazado en esta superficie, y cuyos extremos estén á distinto lado de la recta.

6. Un plano α corta á todo segmento rectilíneo, cuyos extremos estén á distinto lado de dicho plano.

7. Si dos planos tienen tres puntos comunes, no situados en línea recta, coinciden.

8. Un plano está determinado, de un modo único, por tres puntos que no están en línea recta, ó por una recta y un punto exterior á ella, ó por dos rectas que se cortan.

9. Si dos planos diferentes tienen un punto común, se cortan según una recta que pasa por dicho punto.

III.— Primeras nociones sobre los ángulos.

10. Todo ángulo puede coincidir por inversión consigo mismo.

11. Todos los ángulos llanos son iguales; todos los rectos también lo son. Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.

12. Si un ángulo es recto, también lo son sus dos adyacentes y su opuesto por el vértice.

13. * Por un punto, exterior á una recta, pasa siempre una normal á dicha recta, y nada más que una.

Por un punto de una recta pasan infinidad de normales á ella; y, entre todas, existe una, pero solamente una, situada en un plano dado que contenga á dicha recta.

14. Las bisectrices de dos ángulos adyacentes son normales; las de dos ángulos opuestos por el vértice, y también las de los dos ángulos AOB y BOA que juntos componen todo el plano, forman una sola recta. (a)

(a) Como la figura constituída por los dos rayos rectilíneos OA y OB divide á su plano en dos ángulos que tienen el mismo vértice O y los mismos lados OA y OB, la designación ordinaria de un ángulo por medio de tres letras es ambigua. Nosotros, siguiendo á varios autores modernos, evitaremos esta ambigüedad, conviniendo en que todos los ángulos están descritos en sentido directo (contrario al que siguen las saetas del reloj) para un observador situado de pie sobre el plano del ángulo y á un lado determinado de esta superficie, y, enunciando primero un punto del lado inicial, es decir, del lado que debe girar en sentido directo, en derredor del vértice, para describir el ángulo, después el vértice, y finalmente un punto del otro lado. Por ejemplo, refiriéndonos á la figura 1, de los dos ángulos cuyos lados son OF y QD, el que contiene en su superficie la abreviatura Fig. se leerá FQD; mientras que el otro ángulo se designará por DQF.

15. En el círculo, á iguales ángulos céntricos corresponden iguales arcos; al mayor de dos ángulos céntricos, corresponde mayor arco; y viceversa.

16. Los arcos circulares de igual radio son proporcionales á sus ángulos céntricos.

IV.—Ángulos formados por dos rectas con una tercera.

17.** (Fig. 1). *Si dos rectas* AB *y* CD *de un plano, están cortadas por una tercera* EF, *se cumplen las leyes siguientes:*

Si dos ángulos internos de un mismo lado de la secante EF *son suplementarios, ó si dos ángulos alternos, ó dos correspondientes, son iguales, las rectas* AB *y* CD *no se cortan.*

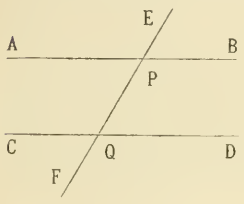


Fig. 1

Demostración.—Sean P y Q las intersecciones de las rectas AB y CD con la secante EF. De cualquiera de las tres hipótesis del enunciado, se deduce fácilmente que las dos figuras DQPB y APQC pueden coincidir; y son, por consiguiente, iguales.

Ahora bien, de la igualdad de estas dos figuras, resulta que si las rectas AB y CD se cortaran á un lado de la secante EF, también deberían cortarse al otro lado; y tendríamos dos rectas AB y CD con dos puntos comunes, lo cual es imposible. Luego dichas dos rectas no tienen ningún punto común; y por lo tanto, no se cortan.

18.** I. *En todo triángulo, cualquiera de los ángulos externos es mayor que cada uno de los dos internos no adyacentes á él.*

Así (fig. 2), para el ángulo externo CAD del triángulo ABC, se tiene

$$CAD > B, \qquad CAD > C.$$

Demostración.—Imagínese formado el ángulo FAD igual á su correspondiente B. De la igualdad de estos ángulos, resulta (17) que las rectas BC y AF no se cortan; y que, por lo tanto, el rayo rectilíneo AF (b) no puede caer dentro del ángulo BAC, ni sobre el lado AC; luego caerá dentro del ángulo CAD; y de esto se infiere que $CAD > FAD$, y como $FAD = B$, será $CAD > B$, que es una de las desigualdades que se afirmaban. Por análogo razonamiento, veríamos que el ángulo externo

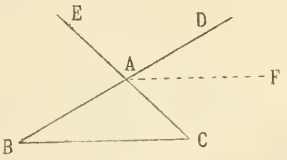


Fig. 2

(b) Para dar precisión al lenguaje, distinguiremos en la línea recta tres variedades: la *recta* pro-

EAB cumple la relación EAB > C; pero EAB = CAD; luego CAD > C, que es la otra desigualdad que nos proponíamos demostrar.

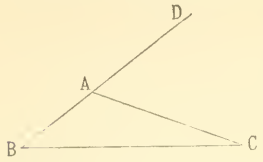


Fig. 3

** II. (Fig. 3). *En todo triángulo* ABC, *la suma* BAC + B *de dos cualesquiera de sus ángulos es menor que dos rectos.*

En efecto, si CAD es el ángulo adyacente del BAC, será (I) B < CAD, y por consiguiente,

$$BAC + B < BAC + CAD = 180^{\circ};$$

luego $$BAC + B < 180^{\circ}.$$

** III. *Todo triángulo tiene, por lo menos, dos ángulos agudos. Ó en otros términos, un triángulo no puede tener dos ángulos rectos, ni dos obtusos, ni uno recto y otro obtuso.*

Porque, si los tuviera, entre dichos dos ángulos no agudos, sumarían dos ó más rectos, lo cual es imposible (II).

** IV. (Fig. 4). *Si en la línea quebrada y convexa* BNMA, *la suma de los dos ángulos internos* M *y* N, *situados á un mismo lado de la secante* MN *es mayor que dos rectos, los rayos rectilíneos* MA *y* NB *no se cortan.*

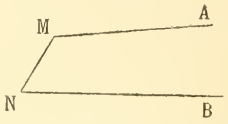


Fig. 4

Porque, si se cortaran en un punto P, se tendría un triángulo MNP, en el cual los dos ángulos M y N sumarían más de dos rectos, y esto es imposible (II).

V. *En el ángulo agudo, la normal á un lado, dirigida desde un punto del otro, cortará á este lado (** pero no á su prolongación).*

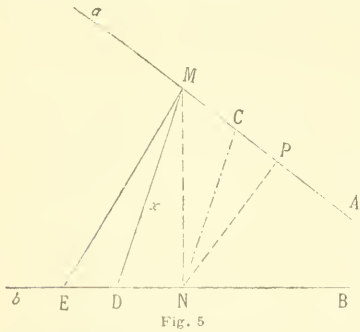


Fig. 5

19. ** (Fig. 5). *Si dos rectas* a *y* b *de un plano no se cortan, se podrá trazar por un punto cualquiera* M *de* a, *otra recta* x *que forme con las dos primeras dos ángulos internos iguales, situados á un mismo lado de la secante* x.

Demostración.—Sea N la proyección normal de M sobre *b*. Dos hipótesis son lógicamente posibles: ó la recta MN es también normal á *a*, ó no lo es. En el primer caso, MN es evidentemente la recta *x* del enunciado. En el segundo caso, uno de los dos ángulos adyacentes que MN forma con *a* es agudo: séalo por

piamente dicha, que es ilimitada en los dos sentidos en que puede recorrerse, y carece, por lo tanto, de extremos; el *rayo rectilíneo*, que tiene un solo extremo, y se extiende indefinidamente en un solo

ejemplo, el NMA, en cuyo supuesto la proyección normal, P, de N sobre *a*, caerá sobre el lado MA (18-V); y si B es un punto de *b*, que está con A al mismo lado de MN, se podrá afirmar que BNP es un ángulo agudo. Pues bien, si la recta MN, girando en derredor de N, describe el ángulo PNM, formará con *a* y *b*, al mismo lado de MN, dos ángulos internos variables: el formado con *a* empieza por ser el ángulo agudo NMA, va siempre creciendo, y acaba por convertirse en el recto NPA; el formado con *b* empieza valiendo un recto (el BNM) y va siempre menguando; y de esto se infiere que, entre la infinidad de posiciones que adquiere la recta móvil NM, al girar en derredor de N, existe una, y solamente una, NC, en que son iguales los ángulos internos BNC y NCA.

Pues bien, llévese en la dirección BN, ND = CM; y la recta MD formará con *a* y *b*, á un mismo lado de MD, dos ángulos internos iguales. Efectivamente, de la igualdad de los ángulos MCN, CND, y la de los lados CM, ND, resulta que el cuadrilátero MCND puede coincidir por inversión consigo mismo, de manera que C se situe en N; luego los ángulos en D y M de dicho cuadrilátero son iguales, puesto que pueden coincidir. Tenemos, pues, establecido que por el punto M, pasa un secante *x* que forma con *a* y *b*, á un mismo lado de *x*, dos ángulos internos iguales DMA y BDM. Esta secante *x* es única; porque, para otra cualquiera, ME, por ejemplo (en la que E se halla sobre la prolongación opuesta del rayo DB) será (18-I) BEM < BDM = DMA < EMA; y por consiguiente, BEM < EMA. Si E cayera sobre el rayo DB, un razonamiento análogo probaría que BEM > EMA. La proposición queda demostrada.

V.—Algunas propiedades del cuadrilátero convexo.

20. (Fig. 6). *En el cuadrilátero convexo* ABB′A′, *que tenga iguales los ángulos en* A *y* A′, *se verifican las siguientes relaciones entre sus dos lados* AB *y* A′B′, *y sus dos ángulos* B y B′:

1.ª *Si* AB = A′B′, *será* B′ = B;

2.ª *Si* AB < A′B′, *será* B′ < B;

3.ª *Si* B′ = B, *será* AB = A′B′;

4.ª *Si* B′ < B, *será* AB < A′B′.

Demostración.—1.ª (Fig. 6). Si A = A′, y AB = A′B′, el cuadrilátero convexo ABA′B′ coincidirá consigo mismo, cuando se le coloque de manera que

---

sentido; y el *segmento rectilíneo*, limitado por sus dos extremos. Un rayo rectilíneo lo designaremos por su extremo, y otro punto cualquiera del rayo (en este orden): así (fig. 2) la notación AB designa el rayo rectilíneo que empieza en A y se extiende indefinidamente en la dirección AB. De los dos rayos AB y AD, que componen la recta AD, diremos que tienen direcciones *opuestas*, y que cada uno es la *prolongación opuesta* del otro.

(AA′ situándose en A′A) el ángulo A′ coincida con su igual A; luego el ángulo B coincidirá con el B′; y por tanto, es B = B′.

2.ª (Fig. 7). Si A = A′ y AB < A′B′, tómese A′C = AB sobre el lado

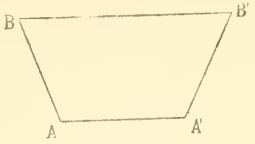


Fig. 6

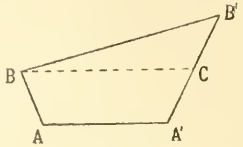


Fig. 7

A′B′; y trácese el segmento rectilíneo BC. Entonces, por la 1.ª ley, y por ser en el triángulo BCB′ el ángulo externo BCA′ mayor que el interno B′ (18-1) tendremos ABB′ > ABC = BCA′ > B′; luego ABB′ > B′.

3.ª y 4.ª Fundándose en las dos proposiciones 1.ª y 2.ª, se demuestran aquéllas por reducción al absurdo.

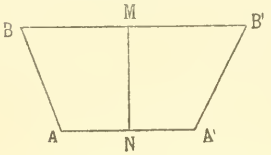


Fig. 8

21. (Fig. 8). *Si en un cuadrilátero convexo* ABB′A′, *son iguales, por una parte los ángulos* A *y* A′, *y por otra los lados* AB *y* A′B′, *la recta* MN, *que une los puntos medios*, M *y* N *de los otros dos lados, será normal á los mismos.*

Porque el cuadrilátero ABB′A′ puede coincidir por inversión consigo mismo.

VI.—Condiciones de igualdad de dos triángulos. Aplicaciones.

22. Todo triángulo isósceles puede coincidir por inversión consigo mismo.

23. Dos triángulos son iguales, si en uno de ellos, dos lados y el ángulo comprendido, ó dos ángulos y el lado común á los dos, ó los tres lados, son respectivamente iguales á los tres elementos que tienen el mismo nombre y situación en el otro triángulo.

* También son iguales dos triángulos, si en uno de ellos, un lado, un ángulo opuesto y otro ángulo, son respectivamente iguales á tres elementos del mismo nombre y situación en el otro triángulo.

24. * Dos triángulos rectángulos son iguales, si tienen iguales hipotenusas, é igual un cateto ó un ángulo agudo.

25. Dos triángulos isósceles de igual base, y equivalentes en superficie, son iguales.

26. En el triángulo isósceles, la bisectriz del ángulo en el vértice, la media-

na correspondiente á la base, y la mediatriz de esta base (situada en el plano del triángulo) son una misma recta.

27. El lugar de los puntos de una superficie plana, tales que cada uno equidista de los extremos de un segmento rectilíneo trazado en ella, es una mediatriz de dicho segmento.

28. * Si, en un plano dado, una recta tiene dos puntos, tales que cada uno equidista de los extremos de un segmento rectilíneo, aquella recta es mediatriz de dicho segmento.

29. (Fig. 9). *Dos triángulos* ABC *y* A′BC, *que tengan una base común*

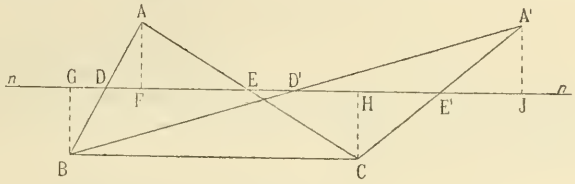


Fig. 9

BC, *y sobre una misma recta* n *los puntos medios* D, E *y* D′ *de los tres lados* AB, AC *y* A′B, *tendrán sobre esta recta el punto medio del cuarto lado* A′C.

Demostración.—La recta *n* corta al segmento A′C, porque sus extremos A′ y C están á distinto lado de *n*. Sean E′ el punto de intersección, y AF, BG, CH, A′J las distancias de los cuatro vértices A, B, C, A′ á la recta *n*. De la hipótesis, resulta que son iguales los triángulos rectángulos DBG y DAF, EAF y ECH, D′BG y D′A′J; é iguales, por consiguiente, los catetos homólogos en estos pares de triángulos; de manera que BG = AF, AF = CH, BG = A′J; luego CH = A′J. De esta igualdad y la de los ángulos en E′, opuestos por el vértice, se sigue sucesivamente la de los triángulos rectángulos CHE′ y A′JE′, y la de sus hipotenusas E′C y E′A′; luego E′ es el medio de A′C; luego el punto medio de A′C está sobre la recta *n*.

30. En un ángulo cóncavo, el lugar de los puntos de su superficie, tales que cada uno equidista de los dos lados, es su rayo bisector.

31. En el triángulo, las bisectrices de sus tres ángulos concurren en un mismo punto interior, el cual equidista de los tres lados.

VII.—Relaciones entre los tres lados de un triángulo. Aplicaciones.

32. *Un lado cualquiera de un triángulo es menor que la suma de los otros dos; y mayor que su diferencia.*

Por ejemplo (fig. 10), en el triángulo ABC, será BC < CA + AB y BC > CA − AB.

DEMOSTRACIÓN.—Sea O el punto en que concurren las bisectrices de los ángulos de este triángulo (31). Las respectivas proyecciones normales P, Q, R de este punto O sobre los tres lados BC, CA y AB, caen sobre estos lados; no sobre su prolongación (18 — V), porque los ángulos CBO, OCB, etc., son agudos, como mitades de ángulos cóncavos. El punto O equidista de los tres lados (31), y de esto se infiere que son iguales los triángulos ORA y OQA, los ORB y OPB, y los OQC y OPC; y que, por consiguiente, AR = AQ, BR = BP, CQ = CP. Si designamos, pues, por α las distancias iguales AR y AQ, por β las BR y BP, y por γ las CQ y CP, tendremos:

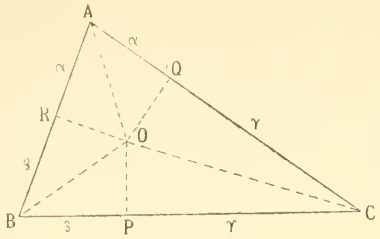


Fig. 10

$$BC = \gamma + \beta < (\gamma + \alpha) + (\beta + \alpha) = CA + AB,$$

$$BC > \gamma - \beta = (\gamma + \alpha) - (\beta + \alpha) = CA - AB;$$

luego $$BC < CA + CB, \quad y \quad BC > CA - CB.$$

33. * Un lado cualquiera de un polígono es menor que la suma de todos los otros lados. * El camino más corto entre dos puntos es la porción de recta que los une.

34. * Toda línea convexa es menor que cualquiera otra línea que la envuelva.

VIII.—Comparación de los lados de un triángulo con los dos ángulos opuestos.

35. En el triángulo, á iguales ángulos se oponen iguales lados; al mayor de dos ángulos, se opone mayor lado; y viceversa.

La demostración que Legendre da de estas proposiciones, fundada en que el triángulo isósceles puede coincidir consigo mismo por inversión y en que un lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos, es admisible en las tres geometrías, parabólica, hiperbólica y elíptica.

36. En todo triángulo, que tenga un ángulo recto ú obtuso, el lado opuesto á este ángulo es el mayor.

37. * De todos los segmentos rectilíneos que tienen un extremo común, y el otro sobre una recta dada, el segmento normal á dicha recta es el menor.

IX.—Triángulos con elementos comunes.

38. * Si en un triángulo rectángulo la longitud de un cateto permanece invariable, cuando crezca el otro cateto, crecerá la hipotenusa; y viceversa.

39. Si en un triángulo las longitudes de dos lados permanecen constantes, cuando crezca el tercer lado, crecerá su ángulo opuesto; y viceversa.

X.—Algunas propiedades del círculo.

40. * En el círculo, los diámetros son mayores que las otras cuerdas.

41. El diámetro normal á una cuerda de un círculo, biseca á esta cuerda y á los dos arcos por ella subtendidos.

42. La tangente al círculo es normal al radio que va al punto de contacto.

43. Una recta y una circunferencia no pueden cortarse en más de dos puntos.

44. * La circunferencia del círculo es una línea curva.

45. Las cuerdas iguales de un círculo (cuyos extremos no sean opuestos) subtienden iguales arcos menores que 180°, forman iguales ángulos agudos con la circunferencia, y equidistan del centro.

46. Si un ángulo está circunscrito á un círculo, su vértice equidista de los puntos de contacto.

47. Si dos circunferencias tienen un solo punto común, y están en un mismo plano, se tocan sobre la recta de los centros; si tienen dos puntos comunes solamente, se cortan; y si tienen tres puntos comunes, coinciden.

48. * Una circunferencia y una recta, situadas en un mismo plano, tendrán 2 puntos comunes, 1 solamente ó ninguno, según que la distancia de la recta al centro sea menor, igual ó mayor que el radio; y viceversa.

49. * Si dos círculos de radios R y r (siendo $R \geqq r$) están en un mismo plano, y la distancia de sus centros es d, serán mutuamente exteriores, si $d > R + r$; se tocarán externamente, si $d = R + r$; se cortarán (sus circunferencias) en dos puntos, si $d < R + r$ y $d > R - r$; se tocarán internamente, si $d = R - r$; y el menor será interior al mayor, si $d < R - r$; y viceversa.

50. En todo triángulo, se puede inscribir un círculo.

51. Si se divide la circunferencia en 3 ó más arcos iguales, las cuerdas correspondientes forman un polígono regular.

XI. — De la normal al plano.

52. Si una recta es normal en un mismo punto á otras dos de un plano α, también será normal á toda otra recta del plano α, que pase por dicho punto.

53. Por un punto de una recta, pasa un plano normal á ella; y nada más que uno.

* La misma proposición subsiste, si dicho punto es exterior á la recta.

54. El lugar de las normales á una recta en un punto, es un plano normal á dicha recta.

55. El lugar de los puntos, tales que cada uno equidista de los extremos de un segmento rectilíneo dado, es el plano normal á dicho segmento en su punto medio.

56. Si cada uno de los 3 puntos B, C, D, no situados en línea recta, equidista de los extremos de un segmento rectilíneo, el plano BCD es normal á dicho segmento en su punto medio.

57. Diremos que dos rectas, no situadas en un mismo plano, son normales, cuando por cada una de ellas pasa un plano normal á la otra.

Para que dos rectas, no situadas en un mismo plano, sean normales, basta que una de ellas pertenezca á un plano normal á la otra.

58. Por un punto de un plano, pasa una recta normal á él; y no pasa más que una.

* La misma proposición subsiste, si dicho punto es exterior al plano.

59. * De todos los segmentos rectilíneos, que tienen un extremo común, y el otro extremo sobre un plano dado, el menor es el segmento normal á dicho plano.

60. Dos rectas normales á un plano, están situadas en un mismo plano.

* * Además, dichas rectas no se cortan.

61. La proyección normal de un segmento rectilíneo sobre un plano (al que no es normal) es un segmento rectilíneo.

62. El ángulo que una oblicua á un plano forma con cualquiera recta trazada en aquel plano, por el punto de intersección, tiene su magnitud compredida entre las de los dos ángulos adyacentes que dicha oblicua forma con su proyección

XII. — Del ángulo diedro.

63. I. *Todas las secciones rectas de un mismo diedro son iguales.*

Demostración. — (Fig. 11). Sean CAD y EBF dos secciones rectas del diedro CBAD.

Para demostrar la igualdad de aquellos dos ángulos rectilíneos, constrúyase la sección recta GMH, correspondiente al punto medio de AB, y colóquese el diedro propuesto de manera que el ángulo GMH coincida por inversión consigo mismo: entonces la arista AB coincidirá, aunque por inversión, con su posición primitiva, porque deberá permanecer normal al plano GMH (58), y el punto B se

situará en A, por ser MA = MB; de todo lo cual se infiere que todo el diedro, en su nueva posición, se confundirá con su posición primitiva, y que el ángulo EBF coincidirá con el CAD; y es por lo tanto, igual al CAD.

II. Todo diedro puede coincidir por resbalamiento y por contraposición consigo mismo.

64. A diedros iguales, corresponden iguales secciones rectas; al mayor de dos diedros, corresponde mayor sección recta; y viceversa.

65. La razón de dos diedros es igual á la razón de sus secciones rectas.

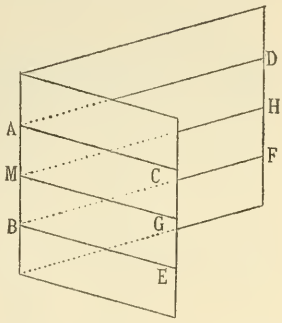


Fig. 11

66. Todos los diedros llanos son iguales; todos los rectos también lo son. Dos diedros opuestos por la arista son iguales.

67. Si un diedro es recto, también lo es su sección normal; y viceversa.

68. Si un diedro es recto, también lo son sus dos adyacentes y su opuesto por la arista.

69 Si un plano α es normal á una recta, también será normal á todo plano δ que contenga á dicha recta.

70. Si dos planos α y δ son normales:

1.° Toda recta trazada en α normalmente á la intersección $\alpha\delta$ es normal á δ;

* 2.° Toda normal á δ, dirigida por un punto de α, está situada en α.

71. Si un plano α es normal á otros dos δ y γ que se cortan, también lo es á su intersección $\delta\gamma$.

72. Por una recta normal á un plano α, pasan infinidad de planos normales á α. Por una recta, que no es normal á α, pasa un plano normal á α; y nada más que uno.

73. El lugar de los puntos, tales que cada uno equidista de dos planos dados, que se cortan, está contituído por los dos planos bisectores de los diedros que forman aquellos planos.

74. En el tetraedro, los planos bisectores de sus seis diedros concurren en un mismo punto, el cual equidista de las cuatro caras.

XIII. — De la simetría.

75. Dos figuras simétricas, respecto de un eje, son iguales.

76. **. *Entre todas las rectas interiores á una faja de plano, limitada*

por dos rectas a *y* b *que no se cortan, existe una, pero solamente una, que es eje de simetría de aquella faja.*

DEMOSTRACIÓN. —(Fig. 12). Imagínese (19) una recta MN que forme con *a* y *b*, á un mismo lado de MN, dos ángulos internos iguales NMA y BNM. La mediatriz *m* del segmento MN (dibujada en el plano de la faja *ab*) dividirá á esta faja en otras dos, que coincidirán doblando la figura á lo largo de *m;* por cuyo motivo sera *m* un eje de simetría de la faja *ab*.

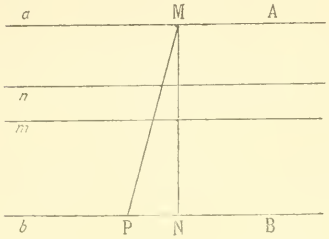


Fig. 12

Claro está que la recta *m* está totalmente situada en dicha faja; porque, si uno de sus dos lados cortara al eje *m*, por el punto de intersección pasaría el otro lado; y resultaría que *a* y *b* se cortaban, en contradicción con el supuesto. Luego, entre las rectas interiores á la faja *ab*, existe una que es eje de simetría de *ab*. Demostremos que no existe otra. Si *n* fuera también un eje de simetría de *ab*, interior á *ab*, y P el punto simétrico de M, respecto de *n*, deberían ser iguales los ángulos BPM y PMA; pero esto es imposible, porque, si P cae en la prolongación opuesta del rayo NB, es (18-I) $BPM < BNM = NMA < PMA$; y por tanto, $BPM < PMA$. Y si P cae sobre el rayo NB (fig. 13), tendremos, análogamente, $BPM > BNM = NMA > PMA$, y $BPM > PMA$. Es, además, evidente que el punto P no puede confundirse con el N. Resulta, pues, absurdo suponer que la faja *ab* tenga otro eje interno de simetría, diferente del *m*.

77. Las figuras simétricas por su forma, es decir, que están colocadas ó pueden colocarse simétricamente respecto de un centro ó un plano, tienen las propiedades siguientes:

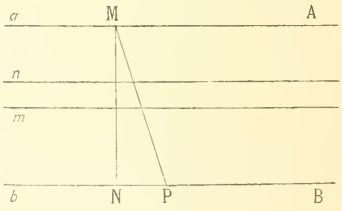


Fig. 13

1.ª Un segmento rectilíneo, una figura plana y un ángulo rectilíneo ó diédrico son figuras iguales á sus simétricas;

2.ª Dos figuras simétricas tienen respectivamente iguales sus ángulos rectilíneos, sus diedros y sus distancias homólogas; mas, á pesar de esto, no pueden generalmente coincidir.

3.ª Dos figuras simétricas de una tercera son iguales entre sí;

4.ª Una figura, que tenga un centro ó un plano de simetría, es igual á todas sus simétricas:

5.ª Dos líneas simétricas equivalen en longitud; dos superficies simétricas tienen igual área; *dos cuerpos simétricos tienen igual volumen.*

Las demostraciones que, de esta última propiedad, dan la mayoría de los tratadistas, sin excluir á LEGENDRE, que la fundó en la existencia de la esfera circunscrita á un tetraedro cualquiera (c), exigen la admisión del Postulado; pero, sin necesidad de admitir esta hipótesis, puede establecerse la equivalencia de los cuerpos simétricos, por medio de la siguiente

DEMOSTRACIÓN.—Los dos cuerpos simétricos pueden ser tetraedros, poliedros cualesquiera, ó cuerpos terminados total ó parcialmente por superficies curvas. De aquí los tres casos siguientes.

1.° (Fig. 14). Sean ABCD un tetraedro, I el centro de la esfera inscrita (74) y N la proyección normal de I sobre el plano BCD, la cual es fácil ver que caerá dentro de este triángulo. El tetraedro dado ABCD puede ser descompuesto en otros 4, que tengan por bases respectivas las caras de aquél, y por cúspide común el centro I de la esfera inscrita.

La pirámide parcial IBCD puede, á su vez, ser descompuesta en otras tres, que tengan la misma cúspide I, y por bases respectivas los triángulos NBC, NCD, NDB. Efectuando análoga descomposición á esta última sobre las otras tres pirámides IABC, IACD, IABD, cada una de ellas queda dividida en otras 3; y así, el tetraedro dado queda descompuesto en otros 12.

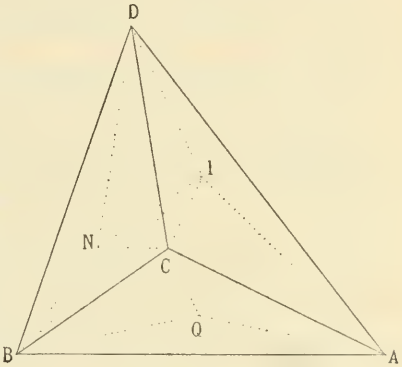


Fig. 14

De estos 12 tetraedros parciales, cada uno es simétrico del que tiene con él una arista común del tetraedro total.

Por ejemplo, si Q es la proyección normal de I sobre la cara ABC, serán simétricos los dos tetraedros IBCN é IBCQ, respecto del plano BCI bisector del diedro ABCD.

El cuerpo compuesto de estos dos tetraedros es un exaedro triangular QBCIN, que tiene un plano de simetría BCI. Resulta, pues, que con aquellos 12 tetraedros, agrupándolos por parejas, podemos formar 6 exaedros simétricos en sí, que serán respectivamente iguales á sus simétricos (77-4.ª). Pues bien, dos tetraedros simétricos, tienen igual volumen, porque descomponiendo cada uno de ellos en los 6 exaedros simétricos en si, que hemos referido, resultarán las 6 partes del uno respectivamente superponibles á las 6 del otro.

(c) Véase la *Nota VII* de los ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE 4.ª edición, de este autor.

2.° Dos poliedros simétricos cualesquiera son equivalentes; porque pueden ser descompuestos en igual número de tetraedros respectivamente simétricos; y como cada uno de estos poliedros parciales y su simétrico son de igual volumen (1.er caso), lo mismo ocurrirá con los poliedros totales.

3.° Dos cuerpos simétricos cualesquiera. terminados por superficies total ó parcialmente curvas, son equivalentes; porque sus volúmenes son los respectivos límites de ciertos poliedros variables inscritos en aquellos cuerpos; y ya sabemos (2.° caso) que los volúmenes de estos dos poliedros son iguales.

XIV.—Figuras de revolución.

78. En las superficies de revolución:

1.° Los paralelos son circunferencias de círculo, que tienen su centro sobre el eje;

2.° Todos los meridianos son iguales;

3.° Los meridianos son normales á los paralelos;

4.° El plano tangente es normal al plano del meridiano que pasa por el punto de contacto.

79. La esfera es de revolución alrededor de cualquiera de sus diámetros.

80. Una recta y una superficie esférica no pueden cortarse en más de dos puntos.

81. * La superficie de la esfera es curva.

82. * En la esfera, los diámetros son mayores que las otras cuerdas.

83. Si se corta la esfera por un plano, la sección que resulta es un círculo.

84. * Un plano corta á una esfera según un círculo, tiene con ella un solo punto común ó ninguno, según que la distancia del centro al plano sea menor, igual ó mayor que el radio.

XV.—Esférica.

85. En la esfera, dos circunferencias máximas se cortan en puntos opuestos; y dos puntos, que no sean opuestos, determinan una circunferencia máxima.

86. Dos polígonos opuestos tienen sus lados y sus ángulos respectivamente iguales, y equivalentes sus superficies.

87. Todas las circunferencias máximas, que pasan por los polos de otra, son normales á esta otra; y viceversa.

88. Si dos ángulos de un triángulo esférico son rectos, sus lados opuestos son cuadrantes; y viceversa. Todos los puntos de una circunferencia máxima distan de su polo un cuadrante; y los puntos que distan un cuadrante de un punto fijo, están sobre la polar de este punto.

89. En el triángulo esférico, que tiene dos ángulos rectos, el tercer ángulo es de la misma amplitud que el lado opuesto.

90. Si un polígono esférico es polar de otro, este otro lo es del primero.

91. Cada lado y cada ángulo de un polígono esférico convexo es el suplemento del ángulo ó lado correspondiente del polígono polar.

92. En todo polígono esférico convexo, los suplementos de sus ángulos suman menos de 360°; y lo mismo ocurre con la suma de sus lados.

93. El triángulo esférico goza de las propiedades siguientes:

1.ª La suma de los tres ángulos es mayor que dos rectos; y la suma de los tres lados es menor que una circunferencia máxima.

2.ª El suplemento de cada ángulo es mayor que la diferencia de los otros dos ángulos, y menor que la suma de sus suplementos. Cada lado es mayor que la diferencia y menor que la suma de los otros dos lados.

3.ª Á lados iguales, se oponen ángulos iguales; al mayor de dos lados, se opone mayor ángulo. Y viceversa.

4.ª La suma de dos lados y la suma de los dos ángulos opuestos son de la misma especie, es decir, ambas menores, ambas iguales ó ambas mayores que 180°.

94. Dos triángulos esféricos son iguales ó simétricos, si en uno de ellos, un ángulo y los dos lados que lo forman, ó un lado y los dos ángulos contiguos, ó los tres lados, ó los tres ángulos, son respectivamente iguales á los elementos que tienen el mismo nombre y situación en el otro triángulo.

Dos triángulos esféricos unirrectángulos son iguales ó simétricos, si tienen igual hipotenusa, é igual otro lado ó un ángulo oblicuo.

95. La superficie de un polígono esférico convexo equivale á un huso de la misma esfera, cuyo ángulo es el semiexceso de aquel polígono.

96. En la misma esfera, polígonos equivalentes tienen iguales excesos; el mayor de dos polígonos tiene mayor exceso. Y viceversa.

Dos polígonos de una misma esfera son entre sí como sus excesos.

XVI.—Del ángulo sólido.

97. En todo ángulo sólido convexo, los suplementos de sus diedros suman menos de 360°; y lo mismo ocurre con la suma de las caras.

98. Todo ángulo triedro goza de las propiedades siguientes:

1.ª La suma de los tres diedros es mayor que dos rectos; y la suma de las tres caras es menor que un giro.

2.ª El suplemento de uno cualquiera de sus diedros es mayor que la diferencia de los otros dos diedros, y menor que la suma de sus suplementos. Una cara cualquiera es mayor que la diferencia, y menor que la suma de las otras dos.

3.ª A caras iguales, se oponen diedros iguales; á la mayor de dos caras, se opone mayor diedro. Y viceversa.

4.ª La suma de dos caras y la suma de dos diedros opuestos son de la misma especie, es decir, ambas menores, ambas iguales, ó ambas mayores que 180°.

99. Dos ángulos triedros son iguales ó simétricos, si en uno de ellos, un diedro y las dos caras que lo comprenden, ó una cara y los dos diedros contiguos á ella, ó las tres caras, ó los tres diedros, son respectivamente iguales á los elementos que tienen el mismo nombre y situación en el otro triedro.

Dos triedros unirrectángulos son iguales ó simétricos, si tienen igual hipotenusa, é igual otra cara ó un diedro oblicuo.

100. Si en un triedro isósceles, las dos caras iguales son agudas, también serán agudos los diedros opuestos á estas caras.

PARTE PRIMERA

GEOMETRÍA HIPERBÓLICA,

PSEUDO-ESFÉRICA,

Ó DE GAUSS, LOBATSCHEWSKY Y BOLYAI.

GEOMETRÍA HIPERBÓLICA,

PSEUDO-ESFÉRICA,

Ó DE GAUSS, LOBATSCHEWSKY Y BOLYAI.

CAPÍTULO I.

GEOMETRÍA PURA.

I. — Teoría general de las paralelas.

101. (Fig. 15). Diremos que un rayo rectilíneo (*) MA es *paralelo* á otro rayo rectilíneo NB, cuando ambos cumplen las cuatro condiciones siguientes: 1.ª Están en un mismo plano; 2.ª Quedan á un mismo lado de la recta MN que une sus extremos; 3.ª No se cortan; y 4.ª Todo rayo MC interior al ángulo NMA corta al rayo NB.

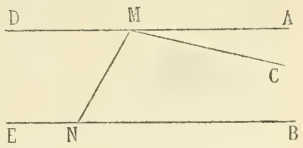


Fig. 15

Se dice que una recta DA es *paralela* á otra recta EB, cuando un rayo MA, que forma parte de la primera, es paralelo á otro rayo NB que es parte de la segunda. La dirección MA del rayo MA es la *dirección ó sentido del paralelismo*. De que la recta DA sea paralela á EB en el sentido MA, no se infiere que lo sea en el sentido opuesto MD.

102. (Fig. 16). *Por un punto* M *exterior á un rayo rectilíneo* NB *(y á su prolongación) pasa un rayo rectilíneo paralelo al primero; y solamente uno.*

DEMOSTRACIÓN.—Si el punto X marcha sobre el rayo NB, alejándose del punto N, el ángulo variable NMX crecerá constantemente, y permanecerá siempre menor que el suplemento de N (porque en todo triángulo NMX la suma

(*) Para la significación y notación del rayo rectilíneo, véase la nota del párrafo 18-I.

$N +$ NMX de dos ángulos es siempre menor que dos rectos); luego si la distancia variable NX es arbitrariamente grande, ó de otro modo, si dicha distancia tiende hacia el infinito, el ángulo variable NMX, tenderá hacia un valor límite NMA igual ó menor que el suplemento del ángulo N; luego también el rayo variable MX tiende hacia una posición límite MA. Ahora bien, los dos rayos MA, NB cumplen las siguientes condiciones: están en un mismo plano y á un mismo lado de la recta MN; no se cortan, porque el ángulo límite NMA debe exceder á cualquier valor del ángulo variable NMX; y en fin, todo rayo MC interior al ángulo NMA corta al rayo NB, porque, si no lo cortara, el ángulo NMC, ú otro menor que él, sería el ángulo límite, contra el supuesto de que lo es el NMA. Y puesto que se cumplen todas estas condiciones, el rayo MA es paralelo al NB. Otro rayo cualquiera que pase por M, no es paralelo al NB; porque, si está dentro del ángulo NMA, corta á NB, y si está fuera (en MD por ejemplo) falta á la cuarta condición de paralelismo, puesto que el rayo MA interior al ángulo NMD no corta al NB. Luego por el punto M pasa un rayo MA paralelo al NB, y solamente uno.

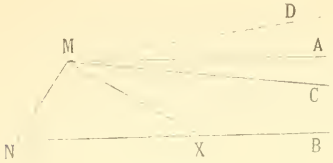


Fig. 16

Observaciones.—1.ª De un rayo NB y su paralelo MA, se dice que *se cortan en un punto infinitamente lejano,* ó que *tienen un punto común en el infinito,* porque el rayo MA es la posición límite que adquiere el rayo variable MX, cuando la distancia MX se hace arbitrariamente grande. "Trazar un rayo rectilíneo MA, que empiece en el punto M y pase por el punto en el infinito del rayo NB", significa lo mismo que esto otro: trazar por el punto M un rayo rectilíneo MA paralelo al NB.

2.ª (Fig. 17). *El ángulo variable* MXN *decrece, cuando la distancia* NX *aumenta; y tiende hacia cero, cuando dicha distancia tiende hacia el infinito.*

Así, en el supuesto de ser $NX_1 >$ NX, será $MX_1N <$ MXN, porque MXN (18·1) es ángulo externo del triángulo MXX_1. Si, en la dirección NB, se toma $X_1X_2 = MX_1$, en el triángulo MX_1X_2 serán iguales los ángulos M y X_2 señalados con un arco; y, por lo tanto, $MX_2N < X_1MA$; pero X_1MA tiende hacia cero, cuando NX_1 crece arbitrariamente; luego también el ángulo MX_2N tiende hacia cero.

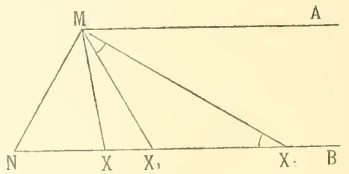


Fig. 17

103. (Fig. 18) *Por un punto* M *exterior á una recta* BC, *pasan dos rectas, y solamente dos, que forman con la primera un ángulo agudo igual á un ángulo dado* α, *por pequeño que éste sea.*

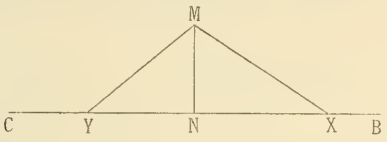


Fig. 18

DEMOSTRACIÓN.—Trácese MN normal á BC. Si un punto X, que al principio coincide con N, marcha sobre el rayo NB, alejándose arbitrariamente de N, el ángulo variable MXC decrece de un modo continuo desde 90° hasta cero (102·*Obs.* 2.ª); luego, entre las infinitas posiciones del punto X sobre el rayo NB, existe una, y solamente una, en que el ángulo MXN es igual al ángulo dado α. De igual modo se vería que, sobre la prolongación opuesta NC, existe un punto único Y, tal que el ángulo NYM es igual á α. Luego por el punto M pasan dos rectas MX y MY (y solamente dos) que forman con la BC ángulos agudos iguales al α.

104. I. (Fig. 19). *Si un rayo* MA *es paralelo á otro* NB, *la suma de los dos ángulos internos* NMA *y* N *es igual ó menor que dos rectos.*

Efectivamente, si dicha suma fuera mayor que dos rectos, formando el ángulo interno NMC suplemento de su alterno N, sería el rayo MC interior al ángulo NMA, y no cortaría al rayo NB (17); pero esto es imposible (101) porque, siendo MA paralelo á NB, todo rayo MC interior al ángulo NMA debe cortar á NB.

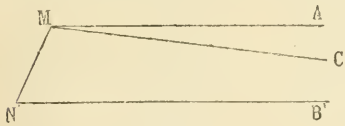


Fig. 19

II. (Fig. 20). Sean MN la distancia del punto M á la recta BC, y MA el rayo paralelo á NB: el ángulo M es recto ó agudo (I), y se llama, según LOBATSCHEWSKY, *ángulo de paralelismo*, *correspondiente á la distancia* MN.

Á iguales distancias, corresponden iguales ángulos de paralelismo.

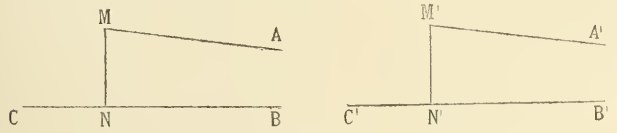


Fig. 20

Efectivamente, si las distancias MN, M'N' á las rectas CB, C'B' son iguales, también lo serán los ángulos M y M' de paralelismo, pues colocando la semifaja B'N'M'A' sobre la BNMA, de manera que coincidan los ángulos rectos

B'N'M', BNM, y que N'M' tome la dirección de NM, coincidirá el punto M' con el M, y el rayo M'A' con el MA; porque, si así no fuera, por el punto M se podrían dirigir dos rayos paralelos al NB, lo que es absurdo.

105. *Una recta y su paralela no se cortan.*

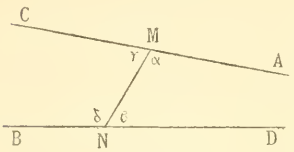


Fig. 21

Demostración.—(Fig. 21). Supongamos que la recta CMA es paralela á la DNB, por ser el rayo MA paralelo al NB. Estos dos rayos no se cortan, por la definición del paralelismo; sus prolongaciones opuestas MC, ND tampoco pueden cortarse, porque la suma de los ángulos internos γ, δ, que estas prolongaciones forman con la secante MN, es igual ó mayor que dos rectos, en atención á que la suma de sus adyacentes α y ϵ es igual ó menor (104-I y 18-IV).

106. (Fig. 22). *Si el extremo de un rayo rectilíneo* NB, *ó el de su paralelo* MA, *ó ambos á la vez, se trasladan á otro punto cualquiera del mismo rayo, ó de su prolongación opuesta, el paralelismo subsiste.*

Demostración.—1.° (Fig. 22). Suponemos que MA es paralelo á NB, que P es un punto de NB, y Q un punto de su prolongación opuesta. Afirmamos que MA es paralelo á PB y á QB. Efectivamente, todo rayo interior al ángulo PMA, también es interior al NMA, y corta por lo tanto al rayo PB; luego (101) MA es paralelo á PB. Todo rayo interior al ángulo QMA, es interior al ángulo QMN ó al NMA, ó coincide con MN, y corta por lo tanto al lado QN del triángulo MQN ó al rayo NB; luego corta al rayo QB, y por consiguiente (101) es MA paralelo á QB.

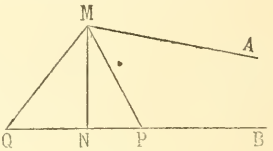


Fig. 22

2.° (Fig. 23). Afirmamos que, si MA es paralelo á NB, y el punto R está sobre MA, entre M y A, será RA paralelo á NB. Basta probar que todo rayo rectilíneo RC, interior al ángulo NRA, corta al rayo NB. Márquese sobre RC, y dentro de la faja BNRA, un punto C, y trácese la recta MC, la cual cortará en un punto D al lado NB, por ser MA paralelo á NB. Ahora bien, la recta RC corta al lado MD del triángulo NMD en un punto C diferente de M y D; luego debe cortar á otro lado del mismo triángulo; pero no puede cortar al MN, porque los vértices M y N están situados á una misma

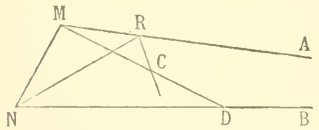


Fig. 23

parte de la recta RC; luego esta recta RC corta al lado ND, y por lo tanto es RA paralelo á NB.

3.° (Fig. 24). Vamos á demostrar que, si el rayo MA es paralelo al NB, y S está en la prolongación opuesta de MA, será el rayo SA paralelo al NB. Para esto, basta probar que toda recta SC, interior al ángulo NSM, corta al rayo NB. Fórmese el ángulo DMA igual á su correspondiente CSM: la recta MD es interior al ángulo NMA, porque DMA = CSA < NSA < NMA; luego DMA < NMA; infiérese de esto, que la recta MD corta al rayo NB en un punto E. Ahora bien, la recta SC corta á un lado NM del triángulo NME, pero no corta al lado ME, porque los ángulos correspondientes en M y S son iguales (17); luego dicha recta SC debe cortar al tercer lado NE; y, por lo tanto, es el rayo SA paralelo al NB.

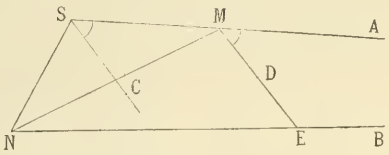


Fig. 24

4.° (Fig. 25). Si los puntos M, R, A están situados sobre una recta, y sobre otra los N, P, B (en la situación que indica la figura) y es el rayo MA paralelo al NB, será RA paralelo á PB. Efectivamente; por el primer caso, es MA paralelo á PB; luego, por el segundo ó tercer caso, es RA paralelo á PB.

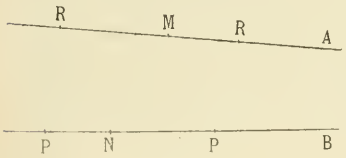


Fig. 25

107. *El paralelismo de dos rayos es recíproco.* O de otro modo: *si un rayo* MA *es paralelo á otro* NB, *este otro será paralelo al primero.*

Demostración.—(Fig. 26). Considérese (76) el eje *x* de simetría de la faja NBMA, y márquese sobre la recta NB el punto P simétrico de M. El rayo MA es paralelo al PB (106); luego (por la simetría de la figura) es PB paralelo á MA; luego (106) NB es paralelo á MA.

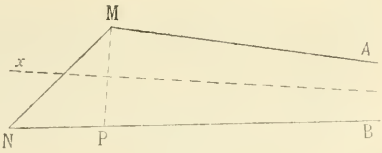


Fig. 26

Observación.—En virtud de este principio, cuando un rayo sea paralelo á otro, podemos decir que son paralelos entre sí, y lo mismo cabe afirmar de una recta y su paralela.

108. Se dice que una recta y un rayo rectilíneo son *paralelos*, cuando este rayo es paralelo á otro que forma parte de aquella recta.

(Fig. 27). *Si dos rayos* MA, NB *son paralelos, y están respectivamente situados sobre dos planos secantes, serán paralelos á la intersección* PC *de dichos planos.* (*)

Demostración.—La intersección de los dos planos se compone de dos rayos rectilíneos, uno de los cuales, que supondremos ser el PC, está con MA y NB á un mismo lado del plano MNP; y afirmamos que PC es paralelo á MA y NB. Como los dos rayos MA, PC están en un mismo plano, y á un mismo lado de la recta MP, basta para demostrar su paralelismo, probar que no se cortan, y que todo rayo PD interior al ángulo CPM corta al rayo MA. Pues bien, los rayos MA y PC no se cortan; porque, si se cortaran, el punto de intersección, por estar sobre MA y PC, pertenecería á los dos planos MANB, PCNB, y sería por lo tanto, un punto de su intersección NB; luego las rectas MA, NB se cortarían en dicho punto, y no serían paralelas, contra lo supuesto. Además, el plano NPD es interior al diedro CNPM; y corta, por lo tanto, al plano BNM según una recta NE interior al ángulo BNM; esta recta NE corta al rayo MA, porque NB es paralelo á MA; en fin, si F es el punto en que se cortan, como F está á la vez en los planos FMP y FNP, estará en la intersección PD de ambos planos; luego la recta PD corta al rayo MA; luego PC es paralelo á MA. De igual modo se demostraría que también es paralelo á NB.

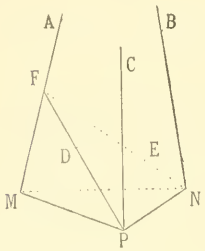


Fig. 27

109. (Fig. 27). *Dos rayos* MA, NB *paralelos á un tercero* PC, *son paralelos entre sí.*

Demostración.—1.° Si los tres rayos MA, NB, PC no están en un mismo plano, será MA paralelo á NB, porque (108) la intersección de los planos MAN PCN debe ser una recta que pase por N y sea paralela á los rayos MA y PC; y no puede ser otra, por consiguiente, que la recta NB paralela á PC por hipótesis.

2.° Si los tres rayos 1.° y 2.° paralelos á un 3.° están en un mismo plano, diríjase por un punto exterior á este plano un rayo x paralelo al 3.°; y entonces, por el primer caso, serán 1.° y 2.° paralelos á x; y como 1.° 2.° y x no están en un mismo plano, serán 1.° y 2.° paralelos entre sí.

Observación.—De que dos rectas sean paralelas á una tercera, no se deduce que lo sean las dos primeras, más que en el caso de que el paralelismo se verifique en un mismo sentido (101).

110. (Fig. 28). *Todas las paralelas á un rayo* MA, *dirigidas por los diversos puntos de una recta* m, *están en un mismo plano.*

(*) Se sobrentiende que ninguno de los dos rayos MA y NB coincide con el PC.

Efectivamente, si las rectas NB, PC, QD son paralelas al rayo MA, serán paralelas entre si (109); y por consiguiente, dos cualesquiera caerán en un mismo plano; pero si M, P, Q... están sobre la recta *m*, los planos NBPC, NBQD.... son uno mismo, porque tienen dos rectas comunes, la *m* y la NB.

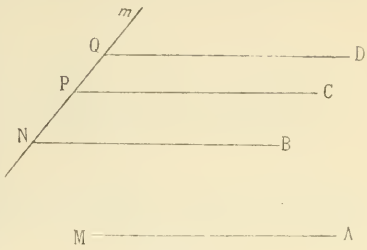


Fig. 28

111. Se dice que una recta (ó rayo rectilíneo) y un plano α son *paralelos*, cuando dicha recta (ó rayo rectilíneo) no está en el plano α, y es paralela á otra recta situada en α.

I. (Fig. 29). *Si un rayo rectilíneo* MA *y un plano* α *son paralelos, toda paralela* b *á dicho rayo es paralela al plano* α, *ó está contenida en él.*

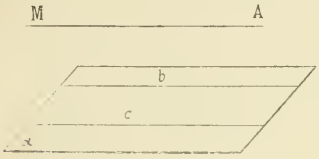


Fig. 29

Efectivamente: por hipótesis, el rayo MA es paralelo á una recta *c* del plano α; luego (109) la recta *b* es paralela á *c*, y por consiguiente, ó estará en el plano α, ó será paralela á él.

II. (Fig. 30. *Si un rayo rectilíneo* MA *es paralelo á dos planos* α *y* β *que se cortan, es paralelo á su intersección* NB. *Todos los planos* α, β, γ, δ, ε,.... *que pasan por un mismo punto* N, *y son paralelos á un rayo dado* MA, *tienen una recta común* NB *paralela á* MA.

Porque la paralela NB al rayo MA, dirigida por N, debe estar situada á la vez en todos los planos α, β, γ, δ, ε.... (I).

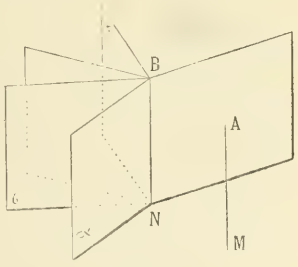


Fig. 30

112. Se dice que dos planos son *paralelos*, cuando no tienen ningún punto común, y una recta del uno es paralela al otro. La siguiente proposición prueba la existencia de los planos paralelos.

Por una recta paralela á un plano, pasa otro plano paralelo al primero, y solamente uno.

Demostración.—(Fig. 31). Sea MA un rayo rectilíneo paralelo al plano α, es decir, paralelo á una recta NB de este plano, y no situado en él. Nos proponemos demostrar que por la recta MA pasa un plano paralelo al α, y solamente

uno. Constrúyanse dos planos dirigidos por MA: uno ϵ normal al α, y otro γ normal al ϵ. Los planos α y γ no se cortan, porque la intersección PC de los planos α y ϵ es paralela á MA (108), y por consiguiente, si los planos α y γ se cortaran, su intersección debería ser al mismo tiempo paralela (108) y normal al plano ϵ (71), lo que es absurdo. Luego el plano γ es paralelo al α; luego, por la recta MA, pasa un plano γ paralelo al α. Demostremos que otro plano cualquiera δ, dirigido por MA, corta al α. Este plano δ formará con el ϵ dos ángulos oblicuos, uno de los cuales, que supondremos ser el DMAP, será agudo. Trácese, en ϵ, MP normal á PC, y serán MP normal al plano α, y PMA el ángulo de paralelismo correspondiente á la distancia MP. La proyección normal ME de la recta MP sobre el plano δ es otra recta diferente de MA, porque el diedro DMAP es agudo. El ángulo PME que la recta MP forma con su proyección ME sobre el plano δ es menor que el formado por la misma recta MP con otra cualquiera del mismo plano δ (62); y por consiguiente PME < PMA. El plano PME corta al α, según una recta PN que pasa por P y es normal á MP. Pues bien, las rectas ME y PN (que están en un mismo plano) se cortan, porque el ángulo PME es menor que el ángulo de paralelismo PMA correspondiente á la distancia MP; luego el punto de intersección es un punto común á los dos planos α y δ; luego éstos se cortan según una recta que pasa por dicho punto (9).

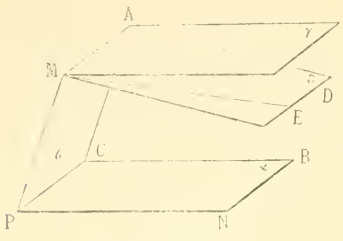


Fig. 31

La proposición queda demostrada.

113. I. (Fig. 32). *Si dos planos α y ϵ cortan á un tercero γ, según dos rectas paralelas* MA, NB, *y forman á un mismo lado de él dos diedros* NAMD, EBNM, *internos y suplementarios, dichos planos α y ϵ son paralelos.*

Demostración.—Como, á consecuencia de la hipótesis, es MA paralela al plano ϵ, bastará demostrar que los planos α y ϵ, no tienen ningún punto común. Considérese el eje PC interno de simetría de la faja MANB, y hágase girar toda la figura alrededor de dicho eje, hasta que la faja de las paralelas MA, NB coincida por inversión consigo misma. Entonces, toda la figura, en su nueva posición, quedará en coincidencia con su posición primitiva, porque se deduce de la hipótesis que dos

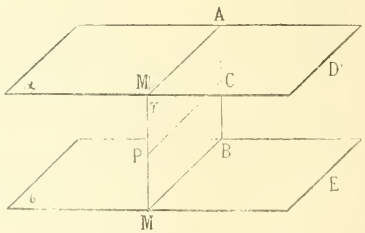


Fig. 32

diedros alternos cualesquiera son iguales. Por lo tanto, las dos figuras abiertas en que el plano γ divide á la figura total, son iguales; luego, si los planos α y β tuvieran un punto común situado á un lado del plano γ, deberían tener otro punto común situado en el otro lado; y por lo tanto, tendrían una recta común (determinada por dichos puntos) que cortaría al plano γ; pero esto es imposible, porque la intersección de los planos α y β, si existiera, debería ser paralela á MA (108), y por consiguiente, al plano γ, y no podría cortar á γ. Luego α y β no tienen ningún punto común; y como además la recta MA es paralela á β, los referidos planos α y β son paralelos.

II (Fig. 32). *Si dos planos paralelos* α, β, *cortan á otro plano* γ, *según rectas paralelas* MA, NB, *los diedros internos de un mismo lado del plano secante* γ, *son suplementarios, y los diedros alternos, como asimismo los correspondientes, son iguales.*

Demostración.—1.° Si dos diedros NAMD, EBNM internos, de un mismo lado del plano secante γ, no fueran suplementarios, dirigiendo por MA un plano α_1 que formara con γ un diedro interno suplementario del EBNM, y situado con éste á un mismo lado del plano secante γ, sería (I) α_1 paralelo á β; y tendríamos que por la recta MA paralela á β pasarían dos planos α y α_1 paralelos al β, lo cual es imposible (112).

2.° Dos diedros alternos internos son iguales, porque tienen el mismo suplemento, puesto que, el interno adyacente á uno de ellos es (según acabamos de ver) suplemento del otro.

3.° Dos diedros alternos externos son iguales, por serlo sus opuestos por la arista (2.° caso).

4.° Un diedro externo es igual á su correspondiente, porque tienen el mismo suplemento, puesto que (según el 1.er caso) el interno adyacente del primero es suplemento del segundo.

Corolario.—(Fig. 32). *Si un plano* γ *corta á otros dos paralelos,* α *y* β, *según rectas paralelas* MA *y* NB, *y además dicho plano secante* γ *es normal al* α, *también lo será al* β.

Porque, según acaba de probarse, dos cualesquiera de los ángulos alternos que forman α y β con γ, son iguales; y como uno de ellos es recto, por hipótesis, el otro también lo será.

114. *Si tres rayos rectilíneos* a, b, c, *no situados en un mismo plano, son paralelos, los tres diedros internos que determinan las tres fajas* ab, bc, ca, *suman dos rectos.*

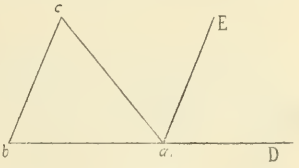


Fig. 33

Demostración. — (Fig. 33). Supongamos, para simplificar la figura, que los tres puntos *a*, *b*, *c* representan los tres rayos retilíneos, vistos de frente; y las tres rectas *ab*, *bc*, *ca* los tres planos

que determinan, vistos de canto. Diríjase, por la recta a, un plano aE paralelo al bc; y se tendrán las siguientes relaciones entre diedros:

$$Da\text{E} + \text{E}ac + cab = 180°;$$

$$\text{DAE} = abc,$$

por correspondientes entre los planos paralelos aE y bc, cortados por el ab según rectas paralelas a y b (113-II); y

$$\text{E}ac = bca,$$

por alternos entre los mismos planos paralelos aE y bc, cortados por el ac según rectas paralelas a y c. Haciendo en la primera igualdad las sustituciones que expresan las dos últimas, se halla la relación entre diedros

$$abc + bca + cab = 180°,$$

lo que se quería demostrar.

115. (Fig. 34). *Si dos planos* α *y* 6, *cortados por un tercero* γ, *según rectas paralelas* MA *y* NB, *forman con* γ, *á un mismo lado de él, dos diedros internos* NMAD *y* ENBM *cuya suma es menor que un diedro llano, los dos planos* α *y* 6 *se cortarán; la recta* PC *de intersección será paralela á* MA *y* NB; *y estará al mismo lado del plano* γ *en que se hallen dichos ángulos internos.*

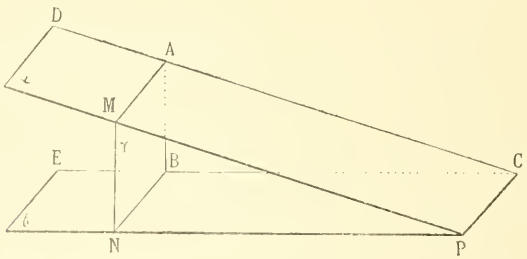


Fig. 34

Demostración.—1.° Por ser MA paralelo á NB, si los planos α y 6 no se cortaran, serían paralelos (112); luego (113-II) la suma de los dos diedros internos NMAD y ENBM debería valer dos rectos, lo que es contrario á la hipótesis. Luego los planos α y 6 se cortan.

2.° La recta de intersección es paralela á MA y NB, porque estos dos rayos son paralelos, y están respectivamente situados sobre dos planos secantes α y 6. (108).

3.° Dicha recta de intersección debe estar hacia el mismo lado del plano γ en que están los dos ángulos internos NMAD y ENBM, cuya suma es menor que dos rectos; porque si estuviera al otro lado, en la posición PC, en el prisma triangular ilimitado que determinan las tres rectas paralelas MA, NB, PC, la suma de sus dos diedros MA y NB valdría más de dos rectos, y lo mismo ocurriría á la suma de sus tres diedros MA, NB, PC, lo cual es imposible. (114).

116. *Para todos los pares de rayos paralelos, la suma de los ángulos internos (situados hacia el lado del paralelismo) es siempre igual á dos rectos, ó siempre menor.*

Demostración.—(Fig. 35). Sabemos (104-I) que dicha suma no puede exceder á dos rectos. Luego, si nuestra proposición no fuera cierta, existiría un par de rayos paralelos MA, NB, para el cual la suma NMA + BNM de los dos ángulos internos sería igual á dos rectos; y otro par PC, QD, en que la suma

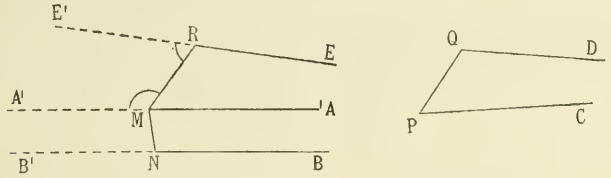


Fig. 35

P + Q sería menor. Pero esto es imposible, como vamos á ver. Colóquese la figura DQPC en ERMA, es decir, de manera que no esté en el mismo plano de AMNB, y coincidan los rayos PC y MA.

Sean MA', NB' y RE' las prolongaciones opuestas de MA, NB y RE. Las dos figuras abiertas BNMA, A'MNB' son iguales, porque se las puede hacer coincidir, puesto que son suplementarios, por hipótesis, los ángulos BNM, NMA; y de la igualdad de dichas figuras, se deduce que también son paralelos los rayos MA', NB'. Ahora bien, por ser paralelas MA y NB, los planos MAR, NBR se cortan según una recta paralela al rayo MA, la cual no puede ser otra recta que la E'RE. Por ser MA' paralelo á NB', la intersección ERE' de los mismos planos debería ser también paralela al rayo MA'; luego el rayo RE' debería ser paralelo al MA'; pero esto es imposible (104) porque la suma de los dos ángulos internos en M y R, señalados con un arco, vale más de dos rectos, en atención á que, por hipótesis, la suma de sus adyacentes vale menos; luego es absurdo suponer que en un par de rayos paralelos la suma de dos ángulos internos (situados hacia la parte del paralelismo) valga más de dos rectos, y en otro par valga menos. La proposición queda demostrada.

117. I. (Fig. 36). Postulado de Euclides. *Si dos rectas* CA, BD *de un plano, cortadas por una tercera* EF, *forman con esta secante* EF, *y á un*

mismo lado de ella, dos ángulos internos α, β, *cuya suma es menor que* 180°, *dichas rectas* CA, DB *se cortarán; y su punto de intersección estará al mismo lado de la secante* EF *en que se hallen los referidos ángulos internos.*

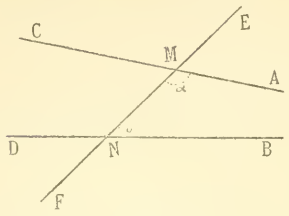


Fig. 36

Ya se dijo (en el PRÓLOGO) que esta célebre proposición, incluida por EUCLIDES entre los Axiomas de sus *Elementos de Geometría,* no puede considerarse como un axioma, sino como una hipótesis, cuya verdad ó falsedad sólo puede ser decidida por la experiencia.

II. (Fig. 37). *Si es verdadero el Postulado de Euclides, para todo par de rayos paralelos* MA, NB, *la suma* M + N *de los dos ángulos internos será igual á 2 rectos; pero será menor si es falso dicho Postulado.*

DEMOSTRACIÓN.—1.° Si MA es paralelo á NB, y el Postulado de Euclides es verdadero, la suma de los ángulos M y N vale 2 rectos, porque no puede valer más (104); ni menos, pues en este último caso los rayos MA, NB se cortarían (en virtud del Postulado) y, por lo tanto, no serían paralelos.

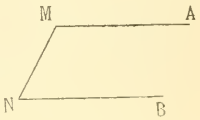


Fig. 37

2.° Si el Postulado fuera falso, ó de otro modo, si en algún caso los rayos MA, NB (situados en un mismo plano) no se cortaran, á pesar de valer menos de dos rectos la suma M + N de los ángulos internos, el rayo paralelo á NB, dirigido por M, ó sería el MA ú otro interior al ángulo M; y tendríamos un par de rayos paralelos para el cual la suma M + N de los ángulos internos en M y N sería menor que 2 rectos; luego (116) lo mismo sucederá para todo otro par.

III. De lo expuesto, resulta que sólo hay dos hipótesis posibles: ó la referida suma de ángulos internos es siempre igual á 2 rectos, ó es siempre menor. En la primera hipótesis se funda la Geometría *vulgar* ó *euclideana;* y en la segunda, una Geometría *no-euclídea* ó *anti-euclideana.* Ninguna de estas dos Geometrías está en contradicción consigo misma ni con la experiencia; y por consiguiente, no es posible decidir cuál de las dos es la verdadera. En lo sucesivo, *supondremos que el Postulado de Euclides es falso;* ó lo que es equivalente, *supondremos que, para todo par de rayos paralelos* MA, NB, *la suma de los dos ángulos internos* M *y* N *es menor que 2 rectos.*

II.—Leyes descriptivas fundamentales de la Geometría hiperbólica.

118. I. (Fig. 38). *Por un punto* M, *exterior á una recta* B'B, *pasan dos paralelas á dicha recta; y solamente dos.*

Demostración.—Trácese MN normal á B'B, y por el punto M diríjase la recta C'MA paralela al rayo NB, y la DMA' paralela al rayo NB' opuesto al NB. Como suponemos (117-II) que el Postulado euclídeo es falso, debemos admitir que los ángulos de paralelismo NMA, A'MN son agudos, y por lo tanto, que las rectas C'MA, DMA' son diferentes; luego por el punto M pasan dos paralelas MA, MA' á la recta B'B. Es evidente que los rayos MA, MA' son los únicos que, empezando en M, son paralelos á la recta B'B; luego las rectas MA, MA' son también las únicas paralelas á B'B, que pasan por dicho punto M.

II. En el plano de la figura, pasan por el punto M infinidad de rectas que no cortan á la B'B, y son, además de las dos paralelas, todas las rectas interiores al ángulo AMD. Por el contrario, todas las rectas interiores al ángulo A'MA cortan á B'B. De dos rectas que no se cortan y están en un mismo plano, no puede afirmarse que sean paralelas: no lo son, por ejemplo, la B'B y cualquiera otra, dirigida por M, dentro del ángulo AMD.

III. La recta MA se dirige al punto en el infinito del rayo NB. (102-*Obs. 1.ª*); y la MA' al punto en el infinito del rayo NB'. Si ambos puntos en el infinito fueran realmente puntos, tendrían que ser diferentes, porque si estuvieran confundidos, las rectas MA, MA' serían una misma, por tener dos puntos comunes (el M y el del infinito). Se expresa este resultado diciendo que, *la recta tiene* dos *puntos en el infinito,* proposición oscura, con la cual se quiere significar que, por un punto exterior á una recta, pasan dos paralelas á dicha recta.

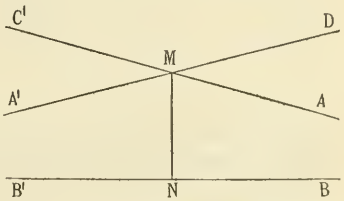


Fig. 38

En la Hipótesis euclideana, los ángulos de paralelismo NMA, A'MN son rectos, y las dos paralelas MA, MA', forman una sola recta, que se dirige á los dos puntos en el infinito (de la derecha y de la izquierda) de la recta B'B. Si los puntos en el infinito fueran puntos geométricos, deberían estar confundidos en uno solo, porque si fueran diferentes, las rectas C'MA y BB' tendrían dos puntos comunes en el infinito (el de la derecha y el de la izquierda) y por consiguiente coincidirían. Por eso se dice que, *en la Hipótesis euclideana, la recta tiene* un *solo punto en el infinito*, enunciado oscuro, que se expresa más claramente de este otro modo: en la Hipótesis euclideana, por un punto exterior á una recta, pasa una sola paralela á dicha recta.

En la Geometría vulgar, se afirma (en virtud de cierto convenio de lenguaje) que la parábola tiene un solo punto en el infinito, y la hipérbola dos; y por esto, y por lo dicho antes, se ha convenido en llamar Geometría *parabólica* á la euclideana, é *hiperbólica* á la no-euclideana de que ahora tratamos. También existe otra Geometría (fundada por *Riemann*) que niega la existencia de las pa-

ralelas, negación que se expresa en otra forma, diciendo que la recta no tiene ningún punto en el infinito: como esta propiedad pertenece también á la elipse, se ha dado á dicha Geometría el nombre de Geometría *elíptica*.

119. *Por un punto, exterior á un plano dado, pasan infinidad de planos y rectas paralelas al dado; el lugar de estas paralelas es una superficie cónica de revolución, á la cual son tangentes los referidos planos.*

DEMOSTRACIÓN.—1.° (Fig. 39). Sean α un plano, M un punto exterior, y N la proyección normal de M sobre α. Trácese por N, en α, una recta NB, y diríjase por M la paralela MA al rayo NB. Si la figura BNMA da una vuelta completa alrededor de MN, la recta NB describirá el plano α, y la MA una superficie cónica (no un plano, porque el ángulo de paralelismo NMA es agudo). El lado MA de la superficie cónica, en cualquiera de sus infinitas posiciones, es paralelo á la posición correspondiente de la recta NB; y paralelo, por lo tanto, al plano α. Recíprocamente, toda paralela MC al plano α, dirigida por M, es un lado de dicha superficie cónica. En efecto: si MC es paralela á un rayo PD situado sobre α, trazando, por N, NE paralela á PD, será (109) MC paralela á NE; y por lo tanto, el ángulo de paralelismo CMN, correspondiente á la distancia MN, será igual al NMA; luego MC es un lado de la referida superficie cónica. Luego por el punto M pasan infinidad de rectas paralelas al plano α, y su lugar es una superficie cónica de revolución.

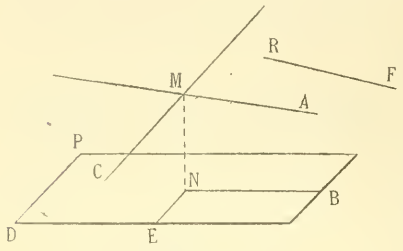


Fig. 39

2.° Todo plano β tangente á dicha superficie cónica es paralelo al α; porque si MA es la generatriz de contacto, los planos α y β son normales al BNMA, y lo cortan según rectas paralelas NB, MA (113-I). Recíprocamente, todo plano β paralelo al α y dirigido por M, toca á la superficie cónica: en efecto, por ser β paralelo á α, existirá sobre β un rayo rectilíneo RF paralelo á α; la paralela MA al rayo RF, dirigida por M, estará en β, y será un lado de la superficie cónica; pero α y β, por ser paralelos y cortar al plano NMA según rectas paralelas NB, MA, deben (113-II) formar con NMA diedros alternos iguales, y como el NB es recto, también lo será el MA; luego β es normal según MA al plano meridiano NMA, y es tangente, por lo tanto, á la superficie cónica. Queda, pues, demostrado que por el punto M pasan infinidad de planos paralelos al α, y su envolvente es una superficie cónica de revolución.

OBSERVACIÓN.—Entre las rectas y planos que pasan por M, los que forman con MN un ángulo menor que el NMA de paralelismo, cortan al plano α; pero no

lo cortan, ni le son paralelos, los que forman con MN un ángulo recto ó un ángulo agudo mayor que el NMA.

120. I.—(Fig. 40). *Si una recta* a *y un rayo* NB *no están en un mismo plano, por la recta* a *pasa un plano, y solamente uno, paralelo al rayo* NB.

Demostración.—Por un punto M de *a* diríjase la paralela MA al rayo NB; y resultará que NB es paralelo al plano *a*MA, por serlo á una recta MA de este plano y no pertenecer á él. Luego por la recta *a* pasa un plano *a*MA paralelo al rayo NB. Y no pasa otro; pues, si por *a* pasaran dos planos paralelos al rayo NB, su intersección *a* debería ser paralela á NB (111-II); y esto es imposible, porque *a* y NB no están (por hipótesis) en un mismo plano.

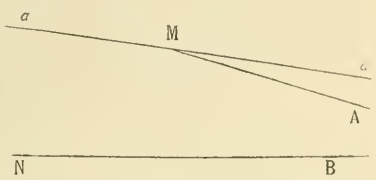


Fig. 40

II.—(Fig. 41). *Si dos rectas* a *y* b *no están en un mismo plano, por cada una de ellas pasan dos planos* (*y solamente dos*) *paralelos á la otra.*

Demostración.—Sean NB y NB′ dos rayos opuestos de la recta *b*, M un punto de *a*, y MA, MA′ las dos paralelas á la recta *b*, dirigidas por M. Acabamos de ver que por la recta *a* pasa un solo plano *a*MA paralelo al rayo NB, y también un solo plano *a*MA′ paralelo al rayo NB′. Estos dos planos son diferentes; pues, si fueran uno mismo, sobre él estaría la recta *a*, y resultaría que *a* y *b* estaban en un mismo plano A′MA, contra el supuesto. Luego por la recta *a* pasan dos planos, y solamente dos, paralelos á *b;* y de igual manera se probaría que por *b* pasan dos planos únicos paralelos á la recta *a*.

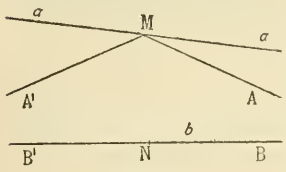


Fig. 41

121. *Los planos de dos ángulos no llanos, que tengan sus lados respectivamente paralelos, se cortan* (*si son diferentes*) *según una recta paralela á sus dos lados.*

Demostración.—(Fig. 42). Suponemos que los planos de los ángulos no llanos AMB, CND son diferentes, que MA es paralelo á NC, y MB paralelo á ND: afirmamos que dichos planos se cortan, y que la intersección es paralela á los lados de dichos ángulos. Sean P la proyección normal de M sobre el plano CND; y PE la intersección de este plano con el PMA. Claro está (108) que PE será paralela á MA. Como los ángulos de paralelismo PMA, PMB son agudos é iguales, en el triedro MAPB será agudo el diedro MA (100); luego los planos AMB y CND forman con el AMPE y á un mismo lado de él, dos diedros internos MA y PE, cuya suma es menor que dos rectos; y como además, las rectas MA y PE

son paralelas, dichos planos AMB y CND se cortarán (115). Por otra parte, como estos dos planos contienen respectivamente á los rayos paralelos MA y NC su intersección es paralela á estos rayos, y por igual motivo, es también paralela á MB y ND.

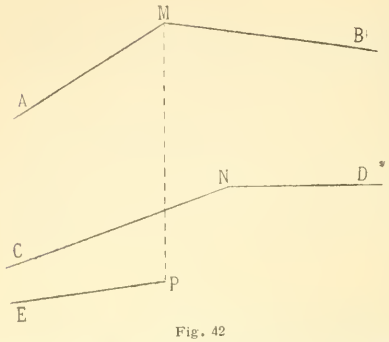


Fig. 42

En la demostración hemos supuesto (aunque sin advertirlo) que los planos AMB y AMP son diferentes, ó de otro modo, que el plano AMB no es normal al CND. Si lo fuera, la proposición es evidente.

122. *Si dos planos son paralelos, sobre cada uno de ellos existe un solo sistema de rectas paralelas al otro. Ó más brevemente: dos planos paralelos, tienen una sola dirección común.*

Demostración.—(Fig. 43). Suponemos que los planos α y 6 son paralelos, es decir (112) que no se cortan, que una recta MA del uno es paralela á una recta NB del otro, y que MA y NB es el sentido del paralelismo. Afirmamos que, entre las rectas del plano α, la MA y las paralelas al rayo MA son las únicas paralelas á 6. Que dichas rectas son paralelas á 6, resulta de que las paralelas al rayo MA, también lo son al rayo NB (109). Para establecer que dicho sistema de paralelas es único, hagamos ver que toda recta PC de α no paralela al rayo MA, ni en coincidencia con MA, no puede ser paralela á una recta QD del plano 6. Si PC y QD fueran paralelas, trazando las rectas PE y QF paralelas al rayo MA, estarían PE en el plano α y QF en el 6 (111-I); las rectas PC y PE serían diferentes (porque suponemos que PC no es paralela al rayo MA); también serían diferentes las rectas QD y QF, pues de lo contrario sería PC paralelo á QF, y por consiguiente á MA. Tendríamos, pues, dos ángulos no llanos CPE, DQF con sus lados respectivamente paralelos; luego (121) sus planos α y 6 se cortarían; luego no serían paralelos, contra el supuesto. Hemos demostrado que entre todas las rectas del plano α, la MA y todas las paralelas al rayo MA son las úni-

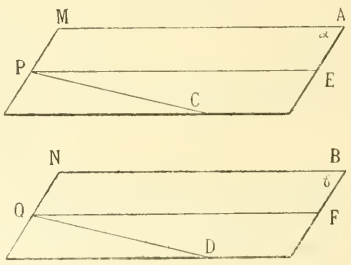


Fig. 43

cas paralelas á 6; y de igual modo se probaría que, entre las rectas del plano 6, la NB y las paralelas al rayo NB son las únicas paralelas á α. Luego los planos α y 6 sólo tienen una dirección común, la de los rayos MA y NB.

Observación.—Á los planos paralelos α y 6 se atribuye el mismo sentido de paralelismo que á los rayos MA, NB.

123. I. (Fig. 44). *Para todo ángulo dado que no sea llano,* BMA, $\frac{1}{3}$ *existe una recta* p (*y solamente una*) *paralela á sus dos lados.*

Demostración.—Por un punto N exterior al plano del ángulo dado, diríjanse las paralelas NC, ND á sus dos lados; los planos BMA, DNC se cortan (121) según una recta *p* paralela á MA, MB, NC, ND. Luego existe una recta *p* paralela á los dos lados MA, MB del ángulo dado BMA. Y no puede existir otra; porque toda paralela á los lados MA, y MB debe serlo á los lados NC y ND; y es, por lo tanto, la recta *p* situada á la vez en los dos planos BMA, DNC.

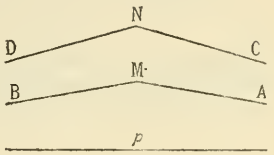


Fig. 44

II. *Si dos rectas se cortan, existen 4 rectas* (*y solamente 4*) *paralelas á las dos primeras.*

Porque las dos rectas secantes forman 4 ángulos, y en cada uno de éstos existe una recta única, paralela á sus dos lados.

124. I. (Fig. 45). *Si dos rayos* MA, NB *no son paralelos,* (*ni pertenecen á una misma recta*) *existe una recta y solamente una, paralela á los dos.*

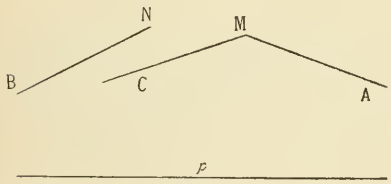


Fig. 45

Demostración. —Diríjase, por M, el rayo MC paralelo á NB; y trácese, dentro del ángulo CMA, la recta *p* paralela á sus dos lados MC, MA (123-I). Esta recta *p* será, por construcción, paralela á MA; y también lo será á NB, por serlo á MC (109). Toda otra recta paralela á NB y MA, será paralela á los lados MC y MA del ángulo CMA, y se confundirá, por lo tanto, con *p*. Luego existe una recta única *p* paralela á los dos rayos no paralelos MA, NB.

II. (Fig. 46). *Si dos rayos* MA *y* NB *son paralelos, existe una recta, y solamente una, paralela á las dos prolongaciones opuestas* MA′ *y* NB′.

Porque estas dos prolongaciones MA′ y NB′ son rayos no paralelos (I).

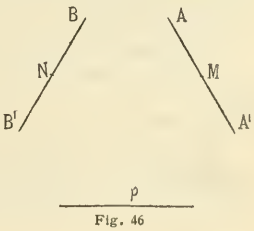


Fig. 46

OBSERVACIÓN.—En la figura 46, salta á la vista que dos cualesquiera de las tres rectas MA, NB y *p* se cortan, á poco que se prolonguen. Imposible es dibujar correctamente dicha figura; mas no se crea, por esto, que la Geometría hiperbólica es contraria á la realidad: lo que ocurre es que, en esa Geometría, no existen más figuras semejantes que las iguales ó simétricas, y por consiguiente, no es posible representar mediante una figura pequeña, otra inmensamente grande. Se tropezaría con igual dificultad para dibujar sobre una esfera sumamente grande un triángulo esférico pequeño y trirrectángulo.

125. (Fig. 47). *Si dos rectas* a *y* b (*situadas ó no en un mismo plano*) *no son paralelas ni se cortan, existen 4 rectas* (*y solamente 4*), *paralelas á las dos.*

DEMOSTRACIÓN —Sean MA, MA′ dos direcciones opuestas de la recta *a*. Diríjanse por M los dos rayos MB, MC paralelos á la recta *b*. Toda paralela á *b* debe ser paralela al rayo MB ó al MC; y toda recta que sea paralela á *a*, debe

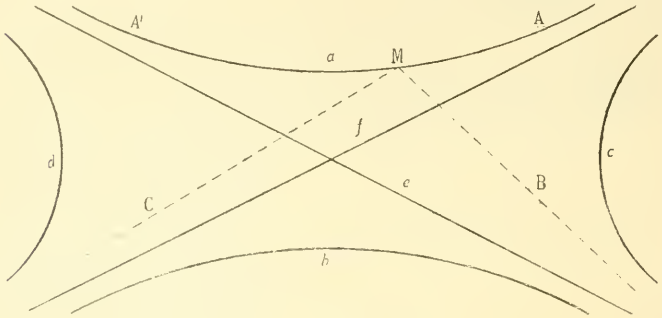


Fig. 47

serlo al rayo MA ó al MA′; luego, para construir todas las paralelas comunes á las rectas *a* y *b*, basta trazar en cada uno de los 4 ángulos BMA, A′MC, A′MB, CMA, la paralela común á sus dos lados (123). Habrá, pues, 4 soluciones *c*, *d*, *e*, *f*, y solamente 4. (*)

Facilmente se ve que, si *a* y *b* están en un mismo plano, las dos soluciones *e* y *f* situadas respectivamente dentro de los ángulos A′MB, CMA, se cortan.

(*) Siguiendo á GAUSS, representaremos, á veces, las rectas por líneas curvas, ya para que resalte el paralelismo ú otra circunstancia, ya para disimular ó atenuar las inevitables anomalías que ofrece un dibujo pequeño, al cual se atribuyen propiedades exclusivas de una figura inmensamente mayor. (124-Obs.)

III.—Del ángulo de paralelismo.

126. (Fig. 48). Sean MN la distancia del punto M á la recta CB, y MA el rayo paralelo á NB: el ángulo NMA, recto en la hipótesis euclideana, es agudo en la hipótesis contraria, que ahora admitimos, y se llama, según se dijo (104-II) *ángulo de paralelismo*, correspondiente á la distancia MN.

Á iguales distancias, corresponden iguales ángulos de paralelismo; á mayor distancia, corresponde menor ángulo; y viceversa.

Demostración.—Sean MN y FG las respectivas distancias de los puntos M y F á las rectas CB y DE; sean también MA un rayo paralelo á CB, y FH otro

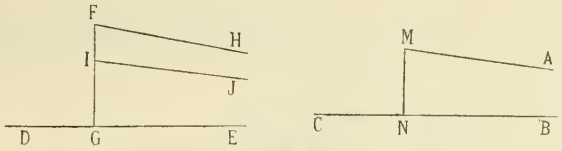


Fig. 48

rayo paralelo á DE. Con estos supuestos, vamos á demostrar las cuatro proposiciones que comprende el enunciado anterior.

1.° Si MN = FG, serán iguales los ángulos de paralelismo NMA, GFH. (Proposición ya demostrada en el párrafo 104-II).

2.° Si FG > MN, será GFH < NMA. Efectivamente: la distancia mayor FG se compone de una parte GI igual á la MN y de otra parte IF. Trácese por I el rayo IJ paralelo á GE, y resultará (109) IJ, paralelo á FH; pues bien, por ser IJ paralelo á FH, el ángulo F es (117-III) menor que el suplemento del JIF, es decir, menor que el GIJ = M, (porque estos ángulos de paralelismo corresponden á las distancias iguales IG, MN), luego F < M.

3.° Si los ángulos del paralelismo M y F son iguales, también lo serán las distancias MN, FG; porque, de lo contrario, serían (2.°) desiguales los ángulos M y F, en contradicción con la hipótesis.

4.° Si F < M, será FG > MN; porque, si fuera FG = MN, se deduciría F = M, y si fuera FG < M, tendríamos F > M, resultados ambos incompatibles con el supuesto F < M; luego FG > MN.

127. (Fig. 49). *Todo ángulo agudo* BMA (*por pequeño que sea*) *puede considerarse como ángulo de paralelismo de cierta distancia.*

Demostración.—Trácese el rayo MC simétrico de MA, respecto de la recta

MB; y construyase (123 I), dentro del ángulo CMA, la recta EF paralela á sus dos lados, la cual cortará á MB en un punto D: esta recta EF es evidentemente normal á MB, y el ángulo dado BMA es el ángulo de paralelismo de la distancia MD.

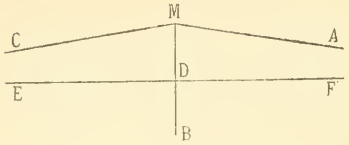


Fig. 49

128. De lo expuesto, resulta que el ángulo de paralelismo BMA disminuye, cuando aumenta la distancia del punto M á la recta EF; y tiene cero por límite, puesto que todo ángulo agudo, por pequeño que sea, puede considerarse como ángulo de paralelismo de una cierta distancia. Luego *cuando la distancia crece desde cero hasta infinito, el ángulo de paralelismo disminuye desde un recto hasta cero.*

129. I. (Fig. 50). *Si un rayo rectilíneo* MA *y una recta* b *no coinciden, ni son paralelos, ni normales, existirá una recta única* DE *paralela á dicho rayo* MA, *y normal á la recta dada* b.

Demostración.—1.° Si las rectas MA y *b* se cortan, formarán en el punto de intersección B un ángulo agudo CBA (porque, según la hipótesis, no son normales). Sobre el lado BC, llévese BD igual á la distancia cuyo ángulo de paralelismo es CBA, y trácese DE normal á *b* (en el plano de la figura): la recta DE es, evidentemente, la única recta normal á *b* y paralela al rayo MA.

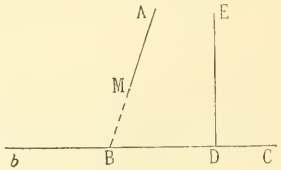


Fig. 50

2.° (Fig. 51). Si las rectas MA y *b* no se cortan (y en este caso pueden estar situadas ó no en un mismo plano) trácese, por un punto B de la recta dada *b*, el rayo BC paralelo al MA: las rectas BC y *b* son diferentes, porque suponemos que *b* no es paralela al rayo MA. Ahora bien, la recta BC ó es normal ú oblicua á la *b:* si es normal, será la recta cuya existencia se afirma en el enunciado; y si es oblicua, existirá (según el 1.er caso) una recta DE normal á *b* y paralela al rayo BC, y por lo tanto, al MA. Luego existe una recta DE normal á la *b* y paralela al rayo MA.

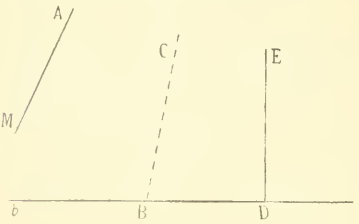


Fig. 51

Otra recta cualquiera BC paralela al rayo MA es oblicua á *b;* porque el ángulo DBC de paralelismo es agudo.

II. (Fig. 52). *Si un rayo rectilíneo* MA *no es paralelo ni normal al plano* α, *ni está situado en* α, *existirá una recta única* DE *paralela al rayo* MA, *y normal al plano* α.

DEMOSTRACIÓN.—Sea b la proyección normal de MA sobre el plano α. De la hipótesis del enunciado, resulta que MA no es normal ni paralelo á b, ni coincide con b. Luego (I) existirá (en el plano MAb) una recta DE normal á b, y paralela al rayo MA.

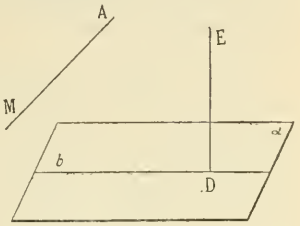


Fig. 52

Dicha recta DE, por estar en el plano MAb normal al α, y ser normal á la intersección b, será también normal á α (70-1.°). Luego existe una recta DE normal á α y paralela al rayo MA. Además, otra recta que reuna estas condiciones, debe hallarse con MA en un mismo plano normal al α, ó sea en el plano MAb; y por consiguiente, no puede ser otra que la misma recta DE.

IV.—Suma de los ángulos de un polígono.

130. *En el triángulo, la suma de sus tres ángulos es menor que 2 rectos.*

DEMOSTRACIÓN.—(Fig. 53). Sea el triángulo ABC. Trácese la recta DE que une los puntos medios D, E de los lados AB, AC; llévese sobre la prolongación de DE la longitud EF = DE; y trácese el segmento de recta CF. De este modo, se forma un cuadrilátero BDFC, cuyos dos ángulos en B y C suman tanto como los tres del triángulo dado; porque, siendo iguales los triángulos ADE, CFE, son iguales también sus ángulos homólogos A y FCE. La cuestión queda, pues,

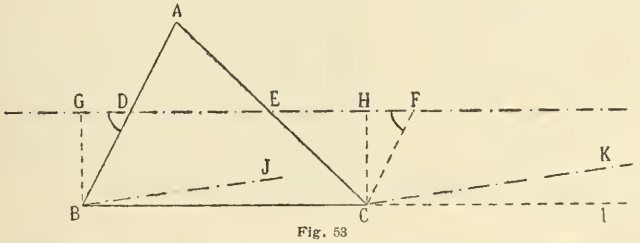


Fig. 53

reducida á demostrar que, en dicho cuadrilátero, la suma FCB + CBD es menor que 2 rectos.

Sean BG y CH las distancias de los puntos B y C á la recta DE. De la construcción y de la igualdad de los triángulos ADE, CFE, se sigue que son iguales los ángulos en D y F, señalados con un arco, y que CF = AD = BD; luego los triángulos rectángulos CFH, BDG son iguales; y por tanto, BG = CH, áng. FCH = áng. DBG. Infiérese de esto, que la suma de los ángulos en B y C es la misma para el cuadrilátero FCBD que para el HCBG. La cuestión queda, pues, reducida á demostrar que, en el cuadrilátero HCBG, la suma HCB + CBG es menor que 2 rectos.

Obsérvese que las rectas BC, GH no son paralelas (117-III); porque, siendo CH = BG, y á más, rectos los ángulos en G y H, la normal á GH, en su punto medio, también sería normal á BC (21). Trazando los rayos BJ, CK paralelos al rayo DE, serán iguales los ángulos de paralelismo en B y C, porque BG = CH; luego HCB + CBG = KCB + CBJ. La cuestión queda, pues, reducida á demostrar que esta última suma es menor que 2 rectos; pero esto es evidente, (117-III) porque los rayos BJ y CK son paralelos. La proposición queda demostrada.

Corolarios.—*En el triangulo, la suma de dos ángulos es menor que el externo adyacente al tercero. En el triángulo rectángulo, la suma de los dos ángulos agudos es menor que un recto.*

131. *La suma de los ángulos de un polígono plano (cuya orilla no se corte á sí misma) es menor que tantas veces 2 rectos como vértices menos 2 tiene el polígono.* (*)

Es decir, que entre el número n de vértices y la suma S de sus ángulos, existe la relación

$$S < 2\,(n-2) \text{ rectos} \quad \text{ó} \quad S < 2\,n - 4 \text{ rectos}$$

Demostración.—(Fig. 54). Descompongamos el polígono dado ABCDEFGH en un triángulo BCD y otro polígono ABDEFGH, que tendrá $n-1$ lados; descompongamos éste, á su vez, en un triángulo ABD y otro polígono ADEFGH, que tendrá $n-2$ lados; y continuando esta serie de descomposiciones, lograremos, por fin, descomponer el polígono dado en $n-2$ triángulos BDC, ABD, FED.... cuyos ángulos componen los del polígono dado. Los tres ángulos de cada triángulo suman menos de 2 rectos (130); y los de todos los $n-2$ triángulos sumarán, por consiguiente, menos de $2\,(n-2)$ rectos; luego lo mismo sucederá á la suma de todos los ángulos del polígono dado.

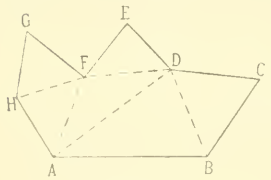


Fig. 54

(*) En adelante, todo lo que digamos de polígonos debe sobreentenderse limitado á los polígonos cuya orilla no se corte á sí misma; es decir, al polígono unicelular. Sus ángulos pueden valer 180° ó más, como sucede, por ejemplo con el ángulo EDC que es mayor que 180°.

COROLARIOS.—*Si en un cuadrilátero convexo, tres ángulos son rectos, el cuarto ángulo será agudo; y si dos solamente son rectos, la suma de los otros dos será menor que uno llano.*

Porque, entre los cuatro ángulos, deben sumar menos de 4 rectos.

132. (Fig. 55). *Si se prolongan en un mismo sentido los lados de un polígono convexo, la suma* $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon$ *de los ángulos externos, así formados, es mayor que 4 rectos.*

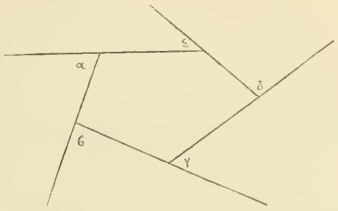


Fig. 55

DEMOSTRACIÓN.—Sea n el número de vértices. Cada ángulo del polígono y su externo adyacente suman 2 rectos; y por lo tanto, entre todos los ángulos internos y externos valen $2n$ rectos; pero los internos solamente valen reunidos menos de $2n-4$ rectos; luego la suma de los externos vale más que la diferencia $2n - (2n - 4)$ rectos; y como esta diferencia es igual á 4 rectos, será

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon > 4 \text{ rectos.}$$

133. I. Llamaremos *defecto* de un n-gono á lo que falta á la suma de sus ángulos para valer $2n - 4$ rectos.

Según esto, el defecto de un triángulo es 2 rectos, menos la suma de sus tres ángulos. Cuando un n-gono es convexo, su defecto es igual á lo que falta á 4 rectos para valer la suma de sus ángulos externos.

II. *Si un polígono plano se compone de otros varios, el defecto del polígono total es la suma de los defectos de los polígonos parciales.*

DEMOSTRACIÓN.—(Fig. 56). Consideremos en primer lugar, un polígono compuesto de otros dos P, y P'. Supongamos que la suma de los ángulos vale Σ para el polígono total, S para el P y S' para el P'; sean n y n' los números de lados de los dos polígonos parciales, y x el número de lados consecutivos comunes á los dos. (Estos lados, forman en la figura la línea quebrada ABCDE). Con estos supuestos, el número de lados del polígono total será $n + n' - 2x$, y su defecto (si el ángulo recto se toma por unidad) valdrá

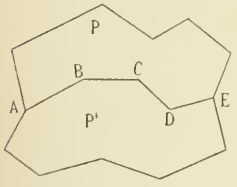


Fig. 56

$$2(n + n' - 2x) - 4 - \Sigma.$$

Por otra parte, en la línea ABCDE, de x lados, hay $x - 1$ vértices B, C, D

interiores al polígono total, y la suma de los ángulos en B, C, D de los polígonos P y P' vale, por consiguiente, $4\,(x-1)$ rectos. Infiérese de esto, que

$$\Sigma = S + S' - 4\,(x-1);$$

sustituyendo este valor de Σ en la expresión anterior, tendremos que el defecto del polígono total es

$$(2\,n - 4 - S) + (2\,n' - 4 - S')$$

ó sea la suma de los defectos de los dos polígonos P y P'.

Consideremos ahora el caso en que el número de polígonos parciales es mayor que 2.

Designemos estos polígonos por $a, b, c, d, \ldots$, el total por $(a + b + c + d + \ldots)$ y sus respectivos defectos por def. a, def. b ...

Elijamos en la orilla del polígono total un polígono a, en la orilla del $b + c + d + \ldots$ otro polígono b, y en la del $c + d + \ldots$ otro polígono c, &, y tendremos, según el caso ya demostrado,

$$\text{def.}\,(a + b + c + d + \ldots) = \text{def.}\,a + \text{def.}\,(b + c + d + \ldots) =$$

$$\text{def.}\,a + \text{def.}\,b + \text{def.}\,(c + d + \ldots) = \text{def.}\,a + \text{def.}\,b + \text{def.}\,c + \text{def.}\,d + \ldots$$

III. *Todo polígono que envuelva á otro, tiene mayor defecto que este otro.*

Porque el polígono envolvente puede ser descompuesto en otros varios, de los cuales uno sea el envuelto.

V.—De los triángulos iguales, y de los que tienen 1, 2 ó 3 vértices infinitamente lejanos.

134. (Fig. 57). La porción de plano, comprendida entre el segmento rectilíneo MN y los dos rayos paralelos MA, NB, es el límite hacia que tiende el triángulo variable MNX, cuya base MN permanece fija, cuando el vértice X se aleja indefinidamente sobre el rayo NB. (102.-*Obs. 1.ª*). Podemos, pues, considerar la semifaja BNMA como un triángulo que tiene un lado finito MN, dos ángulos finitos N, NMA, nulo el tercer ángulo (102.-*Obs. 2.ª*) é infinitos los otros dos lados. Muchas propiedades del triángulo son aplicables á su límite: así, por ejemplo, las dos proposiciones equivalentes, "la suma de dos ángulos de un triángulo es menor que 2 rectos; un ángulo de un triángulo es menor que el externo adyacente á cualquiera de los otros dos" son aplicables al triángulo BNMA que tiene un vértice infinitamente lejano (117-III).

Fig. 57

(Fig. 58). La superficie plana, limitada por una recta *a* y los dos rayos AB, AC paralelos á la recta, que pasan por el punto A, es el límite de un triángulo variable AXY, cuyo vértice A permanece fijo, y cuyos otros dos vértices X, Y marchan hacia los puntos infinitamente lejanos de la recta fija *a*. Podemos, pues, considerar dicha superficie como un triángulo con un ángulo finito CAB, dos ángulos nulos (102-*Obs.* 2.ª) y sus tres lados infinitamente grandes.

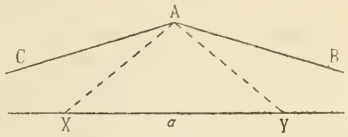


Fig. 58

(Fig. 59). La región del plano, comprendida entre tres rectas AB, B′C′, CA′, paralelas dos á dos, y tales que cada una es interior á la faja de las otras dos (124-II), es el límite del triángulo variable XYZ, cuyos vértices Z é Y se alejan á los puntos infinitamente lejanos de la recta AB, mientras el tercer vértice se aleja indefinidamente sobre la paralela CA′ á BA en sentido opuesto al de su paralelismo. Esta figura, á la cual llamaremos *triángulo límite*, puede considerarse como un triángulo con sus tres ángulos nulos y sus tres lados infinitamente grandes.

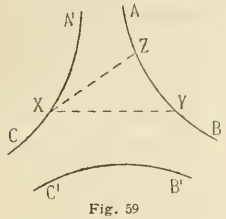


Fig. 59

En general, siempre que en un polígono, uno ó más vértices se alejen al infinito en direcciones determinadas, puede considerarse la figura límite como un polígono con uno ó más ángulos nulos. Las propiedades establecidas en el artículo anterior (como asimismo sus demostraciones) son aplicables á los polígonos que tienen uno ó más vértices infinitamente lejanos. Así, por ejemplo: en la figura 57, el defecto del triángulo NMX es menor que el de BNMA, porque aquél es parte de éste; ó de otro modo, la suma de los ángulos del triángulo NMX es mayor que N + NMA; en la figura 58, es, por análoga razón, el ángulo CAB menor que la suma de los ángulos del triángulo AXY.

135. *Dos triángulos, que tienen los tres ángulos del uno respectivamente iguales á los tres del otro, son iguales.*

Demostración.—Puede suceder que los dos triángulos, tengan 0, 1, 2 ó 3 ángulos nulos. De aquí, los cuatro casos siguientes.

1.° (Fig. 60). Si entre los triángulos propiamente dichos ABC, A′B′C′ se verifican las relaciones $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$, tendrá que ser $AB = A'B'$; porque, si por ejemplo fuese $AB > A'B'$, llegaríamos á un absurdo, como vamos á ver. Tomando sobre los lados BA, BC las longitu-

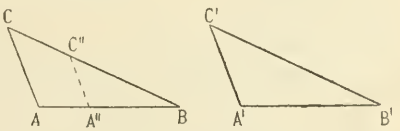


Fig. 60

des $BA'' = B'A'$, $BC'' = B'C'$, y trazando el segmento de recta $A''C''$, se formaría un triángulo igual al $A'B'C'$; el punto A'' caería entre A y B, porque suponemos que $AB > A'B' = A''B$; el punto C'' caería entre B y C, porque las rectas AC y $A''C''$ no se cortan (17) puesto que forman con AB en A y A'' dos ángulos correspondientes iguales. Á causa de la hipótesis $A = A'$, $C = C'$, y de la igualdad de los triángulos $A''BC''$, $A'B'C'$, tendríamos que, en el cuadrilátero $A''ACC''$, serían suplementarios, por una parte los ángulos en A y A'', y por otra los en C y C''; luego la suma de sus cuatro ángulos valdría 4 rectos; y ya sabemos (131) que vale menos. Luego es forzoso admitir que AB es igual á $A'B'$; y que, por lo tanto, los dos triángulos son iguales.

2.° (Fig. 61). Sean AC paralelo á BD, y $A'C'$ paralelo á $B'D'$. Si en los triángulos DBAC, $D'B'A'C'$ con un vértice infinitamente lejano, se verifican las relaciones $A = A'$, $B = B'$, dichos triángulos ó semifajas, serán iguales. Efectivamente, colóquese la figura acentuada sobre la otra, de manera que coincida el ángulo B con su igual B', y que $B'D'$ tome la dirección de BD: el punto A' coincidirá con el A, pues, si por ejemplo, cayese en E entre A y B, la nueva posición EF de $A'C'$ sería paralela á AC (109), y tendríamos (117-III) $BEF > A$, lo que es imposible, porque $BEF = A' = A$; por análogo razonamiento, se demuestra que el punto A' no puede caer en la prolongación de BA; luego A' caerá sobre A.

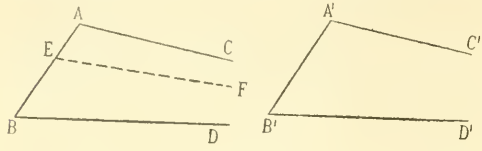


Fig. 61

Esto sentado, es evidente que el rayo $A'C'$ coincidirá con el A, porque por el punto A no puede pasar más que un rayo paralelo al BD. Las dos semifajas habrán coincidido; luego son iguales.

3.° (Fig. 62). Sean $ABCa$, $A'B'C'a'$ dos triángulos con dos ángulos nulos cada uno. Si los terceros ángulos A, A' son iguales, también lo serán los triángulos; porque, colocándolos de manera que coincidan los ángulos iguales A y A', deberán coincidir los lados opuestos a y a'; pues de lo contrario, en el interior del ángulo A se podrían trazar dos rectas paralelas á sus dos lados, lo que es imposible (123-I).

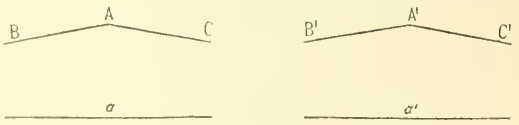


Fig. 62

4.° (Fig. 63). Nos proponemos demostrar que dos triángulos límites abc, $a'b'c'$ son iguales. Sean NA la dirección de paralelismo de los lados b y c; y $N'A'$ la que corresponde á b' y c'.

Trácese (129-I) la recta h normal á a, y paralela al rayo NA; trácese también la recta h' normal á a', y paralela al rayo N'A'; y resultarán paralelas h con b, y

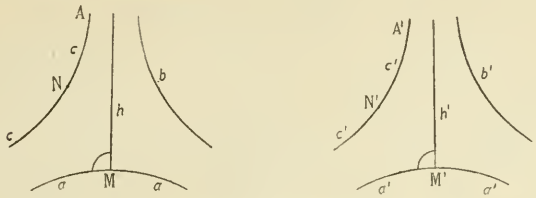


Fig. 63

h' con b'. Colocando el triángulo límite $a'b'c'$ sobre el abc, de manera que coincidan los ángulos rectos en M y M' señalados con un arco, y que a' se confunda con a, coincidirán también b' con b, y c' con c, pues de lo contrario, en el interior del ángulo recto M señalado con un arco, ó en el de su adyacente, existirían dos rectas paralelas á sus lados, lo que es absurdo (123-I). Luego los dos triángulos límites pueden coincidir, y por consiguiente, son iguales.

VI.—Relaciones entre las áreas de los polígonos y sus defectos.

136. (Fig. 64). *Dos triángulos* ABC, A'BC, *que tengan una base* BC *común, y en línea recta los puntos medios* D *y* E, D' *y* E' *de los otros dos pares de lados, son equivalentes en superficie, y tienen igual defecto angular.*

Demostración.—En primer lugar, obsérvese que (29) para estar en línea recta los cuatro puntos D, E, D', E', medios de los lados AB, AC, A'C, A'B, basta que tres de ellos lo estén; y que, por lo tanto, la hipótesis del enunciado anterior es admisible. Esto advertido, entremos en la demostración.

Sobre la recta DE hágase EF = DE, D'F' = D'E, y trácense los segmentos de recta CF, BF'. Los triángulos EDA y EFC son iguales; también lo son los D'E'A' y D'F'B; y de esto se infiere que son equivalentes en superficie el triángulo ABC y el cuadrilátero DBCF, el triángulo A'BC y el cuadrilátero E'CBF'; que la suma de los tres ángulos es en el triángulo ABC igual á FCB + CBD, y en el triángulo A'BC es igual á

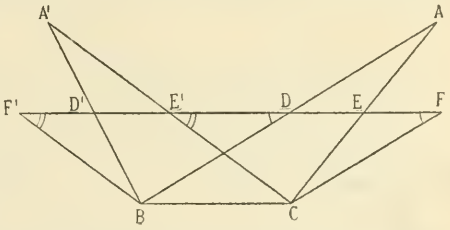


Fig. 64

E'CB + CBF'. La cuestión queda, pues, reducida á demostrar que dichos cuadriláteros son equivalentes en superficie, y que las sumas FCB + CBD, E'CB + CBF de los ángulos en su base BC valen lo mismo.

De la igualdad de los triángulos EDA y EFC, D'E'A' y D'F'B, se deduce que son iguales los ángulos en F y D señalados con un arco, los en E' y F' señalados con dos arcos, y que CF = AD = BD; luego los triángulos CE'F, BF'D son iguales, porque reunen las condiciones CF = BD, áng. F = áng. D, y áng. E' = áng. F'. Ahora bien, si del polígono BCFF' se quita el triángulo CFE', queda el cuadrilátero BCE'F'; y si del mismo polígono BCFF' se quita el otro triángulo BDF', queda el cuadrilátero BCFD; y como los triángulos sustraídos son iguales, también lo son los restos; luego los dos cuadriláteros BCE'F', BCFD, y por lo tanto los triángulos dados ABC, A'BC, son equivalentes en superficie.

Pasemos á demostrar la segunda parte del teorema. De la igualdad ya establecida entre los triángulos CFE', BDF', se deduce áng. FCE' = áng. DBF'; y añadiendo á los dos miembros la suma E'CB + CBD, tendremos:

$$FCE' + E'CB + CBD = E'CB + CBD + DBF',$$

ó

$$FCB + CBD = E'CB + CBF'.$$

Pero hemos visto que, en esta última igualdad, el primer miembro es la suma de los ángulos del triángulo ABC, y el segundo miembro es la suma de los ángulos del A'BC; luego estos triángulos tienen igual defecto angular.

137. I. *Dos polígonos equivalentes en superficie, tienen igual defecto angular.*

Demostración.—Los dos polígonos equivalentes pueden ser: 1.° Dos triángulos con un lado igual; 2.° Dos triángulos cualesquiera; 3.° Un triángulo y un polígono de más de tres lados; y 4.° Dos polígonos cualesquiera. De aquí, los cuatro casos siguientes.

1.° (Fig. 65). Sean ABC y A'B'C' dos triángulos equivalentes con un lado igual BC = B'C'. Designemos por D y E los puntos medios de los lados AB,

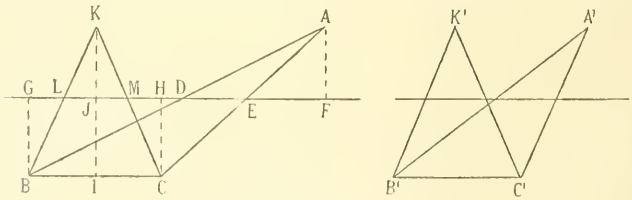


Fig. 65

AC, y por F, G, H los pies de las normales á la recta DE, dirigidas por los vértices A, B, C. La igualdad de los triángulos BDG y ADF, AEF y CEH, mani-

fiesta que BG = AF = CH, y que, por consiguiente, en el cuadrilátero BCHG (con los lados iguales BG y CH, y con los ángulos rectos en H y G) la normal al lado HG en su punto medio J es normal al lado BC en su punto medio I (21). Si, sobre la prolongación de IJ, se lleva JK = HC, y se trazan los segmentos rectilíneos KB, KC (los cuales cortarán á DE en dos puntos L, M) serán BL = KL, CM = KM, BK = CK, porque los cuatro triángulos BGL, KJL, KJM, CHM son iguales. Resulta, pues, que el triángulo BCK es isósceles, que los puntos medios L, M de sus lados KB, KC están sobre la recta DE, y que, por lo tanto, (136) dicho triángulo isósceles y el ABC tienen igual superficie é igual defecto angular. Análogamente, del triángulo A'B'C' se deriva otro isósceles B'C'K' de base B'C', equivalente al A'B'C' y con el mismo defecto angular. Pues bien, los triángulos dados ABC, A'B'C' son equivalentes; luego también lo son los isósceles KBC, K'B'C'; y como éstos tienen igual base (BC = B'C') podrán coincidir; luego tendrán iguales defectos angulares; luego lo mismo sucederá á los triángulos dados ABC, A'B'C'.

2.° (Fig. 66). Sean ABC, A'B'C' dos triángulos equivalentes cualesquiera. Si los lados AC, A'C', son iguales, podremos aplicar á estos triángulos el 1.er caso. Si AC y A'C' son desiguales, y es, por ejemplo AC < A'C', opérese con el triángulo ABC del modo siguiente. Trácese la recta DE que une los puntos medios

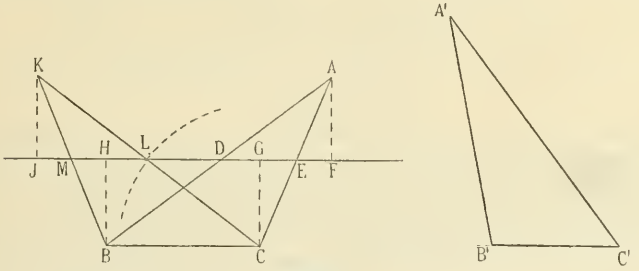


Fig. 66

D, E de los lados AB, AC; proyéctense normalmente sobre DE, en F, G, H, los tres vértices A, B, C; y resultará BH = AF = CG; con centro C y radio igual á ½ A'C', descríbase un arco, hasta que corte á DE en un punto L (esto ocurrirá forzosamente, porque la distancia CG del centro á la recta es igual ó menor que CE, y CE < ½ C'A'); trácese la recta CL, sobre ella hágase LK = CL, y resultará CK = C'A', porque CL = ½ C'A'; en fin, trácense el segmento rectilíneo KB y la normal KJ á DE. Sea M la intersección de BK y DE; la igualdad de los triángulos LCG, LKJ, manifiesta que CG = KJ, y como CG = BH, resulta KJ = BH; luego los triángulos KJM, BHM son iguales, y por lo tanto KM = BM. En resumen, M es el medio de KB, L es el medio de KC, y estos dos puntos y los

D y E están en línea recta; luego (136) los triángulos ABC, KBC son equivalentes; y como por hipótesis es ABC = A'B'C', podremos afirmar la equivalencia KBC = A'B'C'.

Ahora, apoyándonos en el 1.er caso, tendremos:

$$def.\ \text{ABC} = def.\ \text{KBC},$$

porque son triángulos equivalentes con una base común BC;

$$def.\ \text{KBC} = def.\ \text{A'B'C'},$$

porque son triángulos equivalentes con un lado igual CK = C'A'; luego

$$def.\ \text{ABC} = def.\ \text{A'B'C'}.$$

3.° (Fig. 67). Consideremos un polígono ABCDEF y un triángulo GHI equivalentes. Descompongamos el polígono en triángulos a, b, c, d, por medio de diagonales, y el triángulo dado GHI en triángulos a', b', c', d', respectivamente equivalentes á los anteriores, que tengan el mismo vértice G.

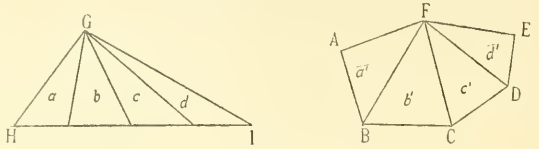


Fig. 67

En virtud de los casos ya demostrados, cada dos triángulos designados por la misma letra tienen igual defecto angular; el del polígono se obtiene sumando los de a, b, c, d (133-II); y el del triángulo total GHI, sumando los de a', b', c', d'; y como ambas sumas se componen de los mismos términos, son iguales.

4.° (Fig. 68). Tratemos, finalmente, el caso de dos polígonos equivalentes cualesquiera p y q. Imaginemos descompuesto el primero en triángulos a, b, c, d, por medio de diagonales; y el segundo en polígonos a', b', c', d', respectivamente equivalentes á los a, b, c, d. Según el 3.er caso, resultarán de igual defecto angular cada dos polígonos parciales, designados por las mismas letras. Los defectos de los dos polígonos totales se obtienen sumando por una parte los de a, b, c, d, y por otra los de a', b', c', d' (133-II); y como ambas sumas se componen de los mismos términos, son iguales.

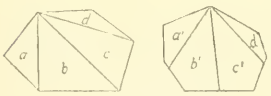


Fig. 68

II. *El mayor de dos polígonos, tiene mayor defecto angular.*

En efecto: el polígono mayor puede ser descompuesto en uno a equivalente

al menor a', y en otro polígono b; el defecto del primero es mayor que el de a (133-III), y el de a es igual al de a'; luego etc.

III. *Dos polígonos con iguales defectos, son equivalentes.*

Porque, si no lo fueran, sus defectos angulares serían desiguales (II), en contradicción con el supuesto.

IV. *De dos polígonos con defectos desiguales, el que tenga mayor defecto, tiene mayor superficie.*

Porque la negación de la tesis conduce, en virtud de los teoremas I y II, á una conclusión incompatible con la hipótesis.

138. *La razón de dos polígonos es igual á la razón de sus defectos.*

DEMOSTRACIÓN.—1.° Si los dos polígonos M y N son comensurables, imaginémoslos descompuestos en polígonos equivalentes á su medida común; y si ésta se halla contenida m veces en M, y n veces en N, tendremos

$$\frac{M}{N} = \frac{m}{n}.$$

Los m y n polígonos parciales tienen igual defecto angular, porque son equivalentes (137-I); y si designamos por d este defecto, los de M y N serán respectivamente md y nd (133-II); luego

$$\frac{\text{defecto de } M}{\text{defecto de } N} = \frac{m}{n}.$$

De las dos igualdades establecidas, se deduce

$$\frac{M}{N} = \frac{\text{defecto de } M}{\text{defecto de } N}.$$

2.° Si los dos polígonos M y N son incomensurables, imaginemos descompuesto el N en n polígonos equivalentes. Sea α el área de uno de estos polígonos parciales, y d su defecto angular. El otro polígono M no será múltiplo de α; pero estará comprendido entre dos múltiplos consecutivos $m\alpha$ y $(m+1)\,\alpha$. El defecto del polígono N es nd y el de M está comprendido entre md y $(m+1)\,d$ (133-II y 137-II). Tendremos, pues,

$$\frac{m}{n} < \frac{M}{N} < \frac{m+1}{n}, \qquad \frac{m}{n} < \frac{\text{defecto de } M}{\text{defecto de } N} < \frac{m+1}{n}$$

Si n es un número variable arbitrariamente grande, las razones $\frac{m}{n}$ y $\frac{m+1}{n}$ tienden hacia un mismo límite, porque su diferencia $\frac{1}{n}$ tiende hacia cero; luego las razones $\frac{M}{N}$ y $\frac{\text{defecto de } M}{\text{defecto de } N}$, por estar comprendidas entre dos cantidades variables que tienden hacia un mismo límite, son iguales.

OBSERVACIONES. — 1.ª *La extensión de un triángulo no puede ser arbitrariamente grande.*

Porque la razón entre el triángulo variable M y un polígono constante *N* es igual á la razón de sus defectos, y ésta es una cantidad finita.

2.ª *Los triángulos con 1, 2 ó 3 ángulos nulos* (134), *tienen extensión finita.*

Porque (figs. 57, 58 y 59) son los límites de triángulos variables MNX, AXY, XYZ cuya superficie, siempre creciente, tiende hacia un límite *(Obs. 1.ª)*.

3.ª *Entre todos los triángulos, el de superficie máxima es el triángulo límite* (134).

Porque la suma de sus ángulos es mínima (vale cero), y por lo tanto, su defecto angular es máximo.

4.ª *Si la superficie de un triángulo tiende hacia cero, la suma de sus ángulos tiende hacia dos rectos. Y viceversa.*

Porque, de la proporcionalidad entre los polígonos y sus defectos, se deduce que un polígono y su defecto angular se desvanecen simultáneamente.

5.ª De lo expuesto resulta que, *cuando la superficie de un triángulo crece desde cero hasta el valor del triángulo límite, la suma de sus ángulos disminuye desde 2 rectos hasta cero.*

6.ª Si se miden los ángulos de un triángulo con un goniómetro de precisión (por ejemplo, con un buen teodolito) la suma de los valores obtenidos resulta aproximadamente igual á 180°. No prueba esto, de ningún modo, que la Geometría hiperbólica esté en contradicción con la experiencia; prueba tan sólo que, en todos los triángulos observados hasta hoy, el defecto angular (si no es nulo) es pequeñísimo, é inapreciable, por lo tanto, con los más delicados instrumentos. Para los triángulos que tienen por base un diámetro de la órbita terrestre, y por vértice una estrella cualquiera, el defecto angular es insensible; y como la superficie de un polígono es proporcional á su defecto, imagínese cuan insignificante será éste para los triángulos situados dentro de nuestro sistema solar, en la superficie de nuestro planeta ó en los reducidos límites de un dibujo. DE LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA NO PUEDE, PUES, AFIRMARSE QUE SEA CONTRARIA Á LA REALIDAD: los triángulos cuyo defecto angular sea sensible, deben ser inmensamente grandes. Y esto explica también la imposibilidad de representar correctamente, por una figura pequeña, el triángulo límite.

139. Terminaremos este artículo, haciendo notar la gran analogía que existe entre las propiedades de los polígonos esféricos (de una misma esfera) y las de los polígonos planos.

En el triángulo esférico, la suma de los ángulos es siempre mayor que 2 rectos; en el triángulo rectilíneo es siempre menor.

En el polígono esférico, la suma de los ángulos externos es siempre menor que 4 rectos; y en el polígono plano es siempre mayor. Dos triángulos esféricos ó rectilíneos, que tengan sus ángulos respectivamente iguales, son iguales ó simétricos.

Polígonos esféricos equivalentes tienen iguales excesos; si crece un polígono esférico, crece su exceso; y viceversa. Polígonos planos equivalentes tienen iguales defectos; si crece un polígono plano, crece su defecto; y viceversa.

Dos polígonos esféricos son entre sí como sus excesos; y dos polígonos planos son entre sí como sus defectos.

Un triángulo esférico (de una esfera dada) no puede ser arbitrariamente grande; y lo mismo sucede con un triángulo rectilíneo.

Si la superficie de un triángulo esférico ó rectilíneo, tiende hacia cero, la suma de sus ángulos tiende hacia dos rectos.

En un triángulo esférico menor que una billonésima del huso recto, ó en un triángulo rectilíneo menor que una billonésima del triángulo límite, la suma de sus ángulos, medidos con un goniómetro, es aproximadamente igual á 180°, porque el exceso ó defecto es un ángulo pequeñísimo, mucho menor que los errores de la observación.

VII.—De la normal común á dos rectas ó dos planos, que no se cortan ni son paralelos.

140. I. *Dos rectas, situadas en un mismo plano, y normales á otra recta del mismo, no son paralelas.*

Porque forman con la normal común, y á un mismo lado de ella, dos ángulos internos suplementarios (117·III).

II. *Si dos rectas son paralelas, no existe ninguna recta que corte normalmente á las dos.*

Porque si existiera, dichas dos rectas no podrian ser paralelas (I).

III. *Si dos rectas de un plano no se cortan ni son paralelas, existe una recta, y solamente una, que corta normalmente á las dos.*

Demostración.—(Fig. 69). Sean *m* y *n* dos rectas situadas en un mismo plano, y que no se cortan ni son paralelas. Si MA y MA′ son direcciones opuestas

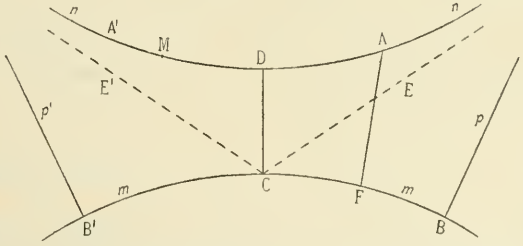


Fig. 69

de la recta *n*, trácense la recta *p* normal á *m*, y paralela al rayo MA; y la recta

p' normal á m, y paralela al rayo MA' (129-I). Sean B y B' las intersecciones de la recta m con las p y p'. Por el punto C, medio de BB', trácese (en el plano de la figura) la recta CD normal á n, y esta recta CD será también normal á m. Para demostrarlo, trácense por C los dos rayos CE, CE' paralelos á la recta m, y se tendrá: ECD = DCE', porque son ángulos de paralelismo correspondientes á una misma distancia CD; BCE = E'CB', porque son ángulos de paralelismo correspondientes á las distancias iguales CB y CB'. Sumando ordenadamente las dos igualdades anteriores, resulta BCD = DCB'; luego CD es normal á m. Otra recta cualquiera AF, normal á m, no lo es á n, porque en el cuadrilátero CDFA, con tres ángulos rectos C, D y F, el ángulo en A debe ser agudo (131-*Cor.*). Tenemos, pues, demostrado que existe una recta CD normal á m y n; y nada más que una.

141. (Fig. 70). *Si en el cuadrilátero convexo* ABCD *son rectos sus ángulos* A *y* B, *y agudos los* C *y* D, *los lados* AB *y* CD *tendrán una normal común, que cortará á estos dos lados, no á sus prolongaciones.*

Demostración.—Si el rayo DC fuera paralelo á la recta AB, ó la cortara, el ángulo BCE, adyacente del agudo DCB, sería ángulo de paralelismo de la distancia CB, ó ángulo oblicuo de un triángulo rectángulo; y ambas cosas son imposibles, porque dicho ángulo BCE es obtuso. Luego el rayo DC no es paralelo á la recta AB, ni la corta; y como lo mismo puede afirmarse del rayo CD y la recta BA, resulta que las dos rectas AB y CD no se cortan, ni son paralelas; y (140-III) tienen, por consiguiente, una normal común.

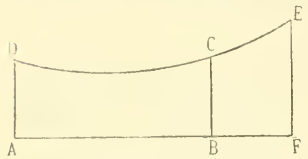


Fig. 70

Sean E y F las intersecciones de esta normal con DC y AB. Las tres rectas AD, BC y FE, por ser normales á AB, no se cortan. Por consiguiente, si el punto E cayese en una prolongación del lado CD, por ejemplo, en la que sigue la dirección DC, F caería en la prolongación opuesta del rayo BA; y en el cuadrilátero convexo BCEF, con sus tres ángulos rectos en B, F y E, el cuarto ángulo BCE debería ser agudo (131-*Cor.*), y como es obtuso, por adyacente del agudo DCB, resulta absurdo suponer que E caiga en una prolongación del lado CD; luego caerá sobre este lado. Tenemos, pues, que la normal común á las rectas AB y CD corta al lado CD, no á su prolongación; y por lo tanto, lo mismo ocurrirá respecto del lado AB.

142. I. (Fig. 71). *Si un plano* α *y una recta* m *cortan normalmente á una recta* p, *no son paralelos.*

Efectivamente, sean A y B las respectivas intersecciones de la recta p con m y α. Los ángulos que p forma con m son rectos; y no pueden, por consiguiente, ser ángulos de paralelismo de la distancia AB; luego m no es paralela á α.

II. *Una recta y un plano paralelos no tienen ninguna normal común.*

Porque, si la tuvieran, no serían paralelos (I).

III. (Fig. 71). *Si un plano* α *y una recta* m *no tienen ningún punto común, ni son paralelos, tendrán una normal común, y solamente una.*

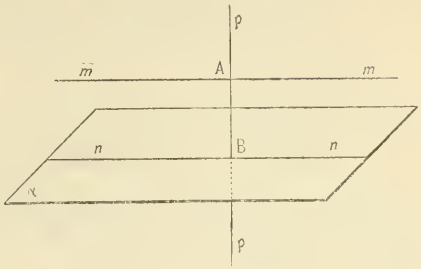


Fig. 71

DEMOSTRACIÓN.—En virtud de la hipótesis, la recta *m* y su proyección ortogonal *n* sobre el plano α no se cortan, ni son paralelas, y tienen, por consiguiente (141-III) una normal común única *p*. Esta recta *p* es, evidentemente, la única normal común á la recta *m* y al plano α.

143. I. (Fig. 72). *Dos planos* α *y* β, *normales á una recta* p, *no son paralelos.*

DEMOSTRACIÓN.—Sean A y B las intersecciones de la recta *p* con α y β. Si fueran α y β paralelos, y CD la dirección del paralelismo de estos dos planos (122-*Obs.*), la paralela AE al rayo CD, dirigida por A, debería estar situada en α, y sería paralela al plano β (122) y normal á la recta *p*. Tendríamos, pues, que el ángulo de paralelismo BAE, correspondiente á la distancia AB, sería recto, cuando sabemos que debe ser agudo.

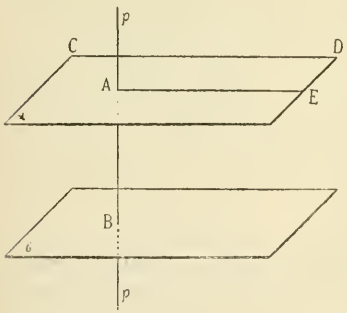


Fig. 72

II. *Dos planos paralelos no pueden tener una normal común.*

Porque, si la tuvieran, no podrían ser paralelos (I).

III. (Fig. 73). *Si dos planos* α *y* β *no se cortan ni son paralelos, existe una recta única* p *normal á los dos.*

DEMOSTRACIÓN.—Una recta cualquiera AB del plano α, y su proyección normal A′B′ sobre el plano β, no se cortan ni son paralelas, y tienen por lo tanto, una normal común CC′ (140-III). El plano dirigido por CC′, normalmente al ABA′B′, es normal á las rectas AB, A′B′, y por lo tanto á los planos α y β, y corta á éstos según dos rectas *m* y *n*, que, por no cortarse ni ser paralelas, tienen una normal común *p*. Además, la recta *p* está situada en un plano *mn*

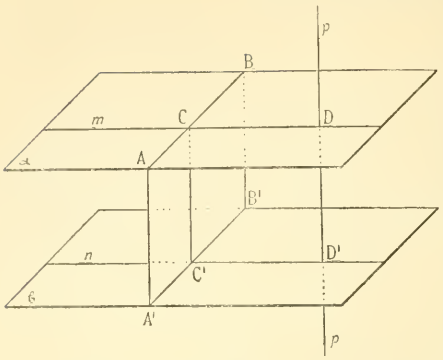


Fig. 73

normal á los α y 6; luego es normal á estos dos planos. Otra recta cualquiera (CC′ por ejemplo) no puede ser normal á α y 6; porque, en tal caso, existiría un cuadrilátero convexo CC′D′D con cuatro ángulos rectos, lo cual es imposible (131-*Cor.*)

144. (Fig. 74). *Los planos normales á otros dos α y 6 que no se cortan ni son paralelos, son tan solamente los que contienen la normal común* p *á α y 6.*

Demostración.—Todo plano que pase por p es normal á α y 6 (69). Recíprocamente, si un plano γ es normal á α y 6, contendrá la recta p. En efecto, las intersecciones AB y A′B′ de γ con α y 6 no se cortan ni son paralelas, y tendrán por lo tanto una normal común p la cual (70-1.°) debiendo ser normal á α y 6, no puede ser otra que la misma recta p; luego el plano γ pasa por p.

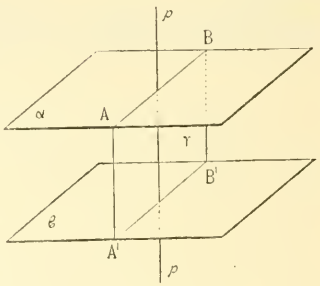


Fig. 74

145. *Todos los planos normales á otros dos α y 6 que son paralelos, tienen la propiedad de ser paralelos entre sí, y con la misma dirección de paralelismo que los dos planos α y 6*

Demostración.—(Fig. 75). Si MA, NB, PC,... son rayos del plano α, paralelos al 6, los planos MAM′A′, NBN′B′, PCP′C′.... que proyectan normalmente aquellos rayos sobre el plano 6, serán también normales al α (113-II-*Cor.*), paralelos entre sí (113-I), y con la misma dirección MA de paralelismo que tienen los planos α y 6. Otro plano cualquiera γ normal al 6,

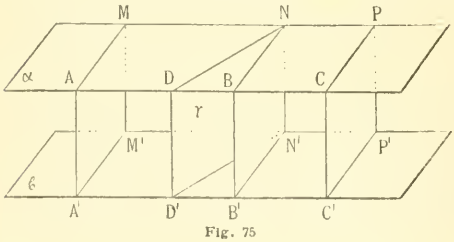


Fig. 75

y que corte al α según una recta ND no paralela al rayo MA, no puede ser normal á α; porque, si lo fuera, trazando por N la paralela NB al rayo MA, el plano γ y el NBB'N' que proyecta normalmente NB sobre δ, deberían cortarse según una recta NN' normal á α y δ; y resultaría que estos dos planos paralelos tenían una normal-común NN', lo que es imposible (143-II).

VIII. — De las ordenadas de una recta con relación á otra.

146. *Las ordenadas de un ángulo agudo crecen á medida que se alejan del vértice, y pueden ser arbitrariamente grandes. Las abcisas crecen también, y tienden hacia un límite.* (*)

Demostración.—(Fig. 76). Sean A y C puntos de un lado del ángulo agudo CMD, y AB, CD sus distancias al otro lado. Nos proponemos demostrar: 1.° Que, si MA < MC, será AB < CD; y 2.° Que si la longitud MC es arbitrariamente grande, también lo será la ordenada CD, y la abcisa MD tenderá hacia un límite.

1.° El ángulo DCM es agudo (18—III), y el CAB es obtuso (por adyacente del agudo BAM); luego CAB > DCA. Y puesto que, en el cuadrilátero birrectángulo ABDC, el ángulo en C es menor que el ángulo en A, será AB < CD (20). Las rectas AB y CD no se cortan, por ser normales á la MD (17); y como A está entre M y C, B caerá entre M y D; luego MB < MD.

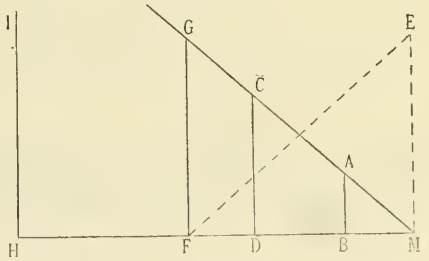


Fig. 76

2.° Para probar que la ordenada puede ser arbitrariamente grande, basta probar que dada una longitud cualquiera, por grande que sea, existe sobre el lado MC un punto G cuya ordenada GF es igual á dicha longitud. Pues bien, trácese el segmento ME normal á MB, igual á la longitud dada, y situado con MA, á un mismo lado de MB; diríjase por E la recta EF, que forma con MB otro ángulo agudo MFE igual al dado (103); llévese sobre el lado MC, en la dirección MC, la longitud MG igual á la FE, y entonces será GF normal á BF é igual á ME; porque, de la construcción, resulta que son iguales los dos triángulos, MFE y FMG. Si se traza la recta HI paralela

(*) Exceptuando la afirmación de que las abcisas tienden hacia un límite, las demás partes de la proposición son independientes del Postulado.

al lado MC, y normal al MD, (129-I), se ve inmediatamente que la abcisa MD tiene por límite MH, cuando la distancia MC es arbitrariamente grande.

147. (Fig. 77). *En la faja de plano, comprendida entre dos rectas paralelas* m *y* n, *las ordenadas decrecen hacia el lado del paralelismo, y tienden hacia cero; pero crecen sin límite en la dirección opuesta. Dos rectas paralelas son líneas asintóticas.*

DEMOSTRACIÓN. — Suponemos que el rayo AB, situado sobre la recta *n*, es paralelo á la recta *m*, y que AC y BD son las distancias de A y B á dicha recta *m*; y afirmamos: 1.° Que AC > BD; y 2.° Que la longitud de la ordenada variable AC tiende hacia cero ó hacia el infinito, según que el punto A se aleje al infinito sobre el rayo AB ó sobre su prolangación opuesta.

1.° En el cuadrilátero birrectángulo ABDC, los ángulos en A y B suman menos de 2 rectos (131), y por consiguiente, CAB < DBE; pero estos ángulos son los de paralelismo, correspondientes á las distancias AC y BD; luego (126) AC > BD.

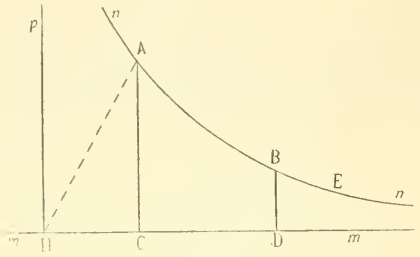


Fig. 77

2.° Trácese la recta *p* paralela al rayo BA, y normal á la recta *m* (129-I); y únase con A la intersección H de *p* y *m*. Si el punto A se aleja al infinito en la dirección BA, el ángulo HAB tiende hacia cero (102-*Obs. 2.ª*); y lo mismo sucede, por consiguiente, al CAB que es parte del HAB. Y puesto que el ángulo de paralelismo CAB tiende hacia cero, la distancia correspondiente AC tiende hacia el infinito (128).

Si el punto A marcha sobre el rayo AB, y se aleja á distancias arbitrariamente grandes, el ángulo variable HAE tiende hacia 2 rectos (porque su adyacente tiende hacia cero (102-*Obs. 2.ª*). El ángulo CAB, por crecer constantemente, y permanecer siempre agudo, tiende hacia un límite *igual ó menor* que un recto; el mismo ángulo CAB, por ser mayor que la mitad del HAE cuyo límite es 2 rectos, tiende hacia un límite *igual ó mayor* que un recto; luego su límite es precisamente un ángulo recto, y como es ángulo de paralelismo, su distancia correspondiente AC tiende hacia cero.

148. (Figs. 78, 79, 80, 81 y 82). *Todo segmento* AB *de recta es mayor que su proyección normal* MN *sobre otra recta.*

DEMOSTRACIÓN. — Si AB y MN tienen un extremo común (Fig. 78), será AB > MN, por ser AB la hipotenusa, y MN un cateto del triángulo ABN.

Si AB y MN se cortan en otro punto C (Fig. 79), será AC > MC, CB > CN, y por consiguiente, AC + CB > MC + CN, ó AB > MN.

Si AB y MN (Fig. 80) están en un mismo plano, y no tienen ningún punto común, tómese sobre la proyectante BN la longitud BD = AM (el punto D podrá

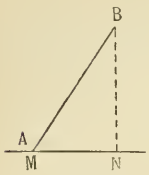


Fig. 78

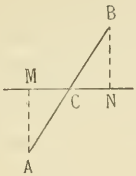


Fig. 79

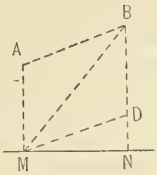


Fig. 80

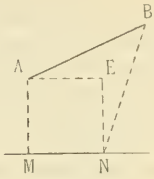


Fig. 81

caer en N, sobre BN ó en su prolongación) y trácese el segmento MD y la diagonal MB. Por ser MNB un triángulo rectángulo, es el ángulo MBN menor que el complemento de NMB, es decir, menor que BMA. Por lo tanto, los triángulos MAB, BMD reunen las condiciones MA = BD, MB = BM, BMA > MBD; luego (39) AB > MD; pero MD $\overline{>}$ MN; luego AB > MN.

Si AB y MN (Fig. 81) no están en un mismo plano, diríjase por B un plano normal á MN, y proyéctese normalmente A sobre este plano. Si E es la proyección, será plano el cuadrilátero AMNE, y por ser EN normal á MN, tendremos (según el caso anterior) MN < AE; pero (59) AE < AB; luego MN < AB.

149. (Fig. 82). *Entre todos los segmentos rectilíneos, terminados en dos rectas* m *y* n *que, estando situadas en un mismo plano, no se cortan ni son paralelas, el* AB *normal á las dos es el menor. Las ordenadas de cada una de las rectas* m *y* n, *con relación á la otra, crecen á medida que se alejan de la normal común, y pueden ser arbitrariamente grandes.* (*)

Demostración. — 1.° Entre los segmentos rectilíneos, terminados por las rectas *m* y *n*, el AB normal á *m* y *n* es menor que otro cualquiera CD; porque (148) CD es mayor que su proyección normal AB sobre la recta AB.

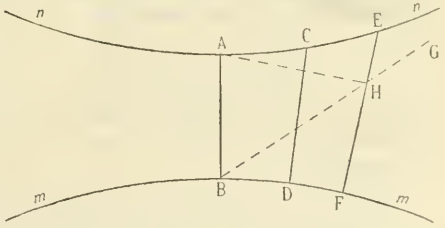


Fig. 82

2.° Sean C y E puntos de la recta *n*, y CD, EF sus distancias á *m*. Si AC es parte de AE, será CD < EF. Efectivamente; en los cuadriláteros trirrectángulos ABDC, ABFE, son agudos los ángulos ACD

(*) Estas proposiciones subsisten, cuando las dos rectas *m* y *n* no están en un mismo plano; y son, en tal caso, independientes de la verdad ó falsedad del Postulado.

y AEF (131 - *Cor.*); luego, en el cuadrilátero birrectángulo CDFE, es obtuso el ángulo DCE, y mayor, por lo tanto, que el agudo CEF; luego (20) CD < EF.

3.° Sea BG un rayo paralelo á n, dirigido por B. En el ángulo agudo DBG existe (146) una ordenada HF de longitud dada (por grande que sea); la prolongación de FH corta en un punto E á la recta n (porque dicha prolongación es interior al ángulo GHA, y HG es paralelo á AC); es decir que EF > HF; pero el segundo miembro puede ser arbitrariamente grande; luego también puede serlo el primero.

Observación. — La longitud del segmento AB mide la *distancia* entre las dos rectas no secantes ni paralelas m y n.

150. (Fig. 83). *Entre todos los segmentos rectilíneos, terminados en dos planos* α *y* 6 *no secantes ni paralelos, el menor es el* AB *normal á dichos planos.*

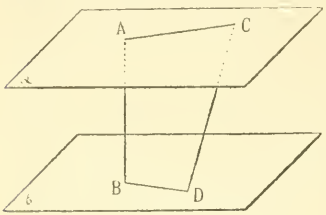


Fig. 83

Porque otro segmento cualquiera CD, terminado en α y 6, es mayor que su proyección normal AB sobre la recta AB.

La longitud del segmento normal AB se llama *distancia* en tre los dos planos α y 6 no secantes ni paralelos.

151. I. *dos fajas de plano, limitadas por paralelas, son iguales.*

Demostración. — (Fig. 84). Sean las dos fajas comprendidas por las paralelas m y n, m y n'. Trácese una ordenada cualquiera AB de la primera faja, y sea A′ un punto del lado n', tal que su distancia A′B′ al lado m es igual á AB (este punto existe, porque las ordenadas de la faja mn' pueden adquirir todos los valores posibles desde cero hasta el infinito) (147). Los ángulos de paralelismo en A y A′ son iguales (126), y por lo tanto, si colocamos las fajas mn y mn' de manera que coincidan dichos ángulos, coincidirán también las dos fajas; luego éstas son iguales.

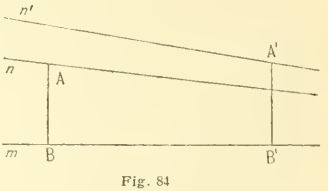


Fig. 84

II. Según este principio, si una faja de plano comprendida entre paralelas, la dividimos en otras varias, mediante paralelas á sus lados, las fajas componentes son todas iguales entre sí, é iguales á la faja total. Este resultado extraordinario no debe considerarse como absurdo, pues el que una superficie ilimitada *se componga* de otras varias, no significa que sea *la suma* de todas ellas, ni aun en el caso de que dichas superficies sean cantidades de la misma naturaleza. En la Geometría hiperbólica, *las fajas de plano, comprendidas entre paralelas, no son cantidades*, y por lo tanto, no pueden sumarse. Que una superficie ilimitada

puede ser parte de otra igual, se manifiesta (dentro de la misma Geometría euclídea) en los dos siguientes ejemplos: 1.° Si dos ángulos correspondientes son iguales, uno de ellos, considerado como figura (mas no como cantidad) es parte del otro; 2.° (Fig. 84). Si la faja de plano, comprendida entre una rama de hipérbola n y su asíntota m, resbala sobre esta asíntota m en su mismo plano, la nueva posición mm' de la faja puede ser parte de la faja primitiva.

III. (Fig. 85). *La faja de plano* ab *comprendida entre dos rectas* a *y* b *que no se cortan ni son paralelas, es una cantidad proporcional á la distancia mínima* h *entre sus dos lados.* Para sumar dos de estas fajas ab y bc, hay que colocarlas sobre un mismo plano, de manera que se sumen las distancias mínimas h y h' de sus lados. Si cada dos de las tres rectas a, b, c no se cortan ni son paralelas, y b está dentro de la faja ac, no puede asegurarse que dicha faja ac sea la suma de las fajas ab y bc, más que en el caso de que las tres rectas a, b, c tengan una normal común. En el caso contrario, la distancia PR entre a y c es mayor que $h+h'$, puesto que, si Q es la intersección de las rectas PR y b, es (149) $PQ>h$, $QR>h'$; y por consiguiente, $PQ+QR>h+h'$, ó $PR>h+h'$; luego, en tal caso, existe la relación $ac>ab+bc$ entre las tres fajas ab, bc y ac. Este resultado, más extraordinario aún que el anterior (porque ahora se trata de fajas que son cantidades) es digno de meditación.

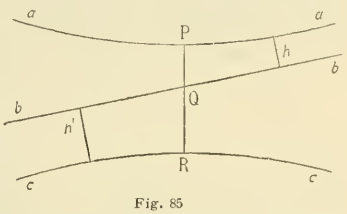


Fig. 85

152. Dos planos que no se cortan (sean ó no paralelos) dividen al espacio en tres regiones: la de enmedio se llama *estrato*, y tiene por *caras* los dos planos que lo limitan, y por *secciones rectas* ó *secciones normales* las que resultan de cortarlo por planos normales á sus dos caras.

Todas las secciones rectas de un mismo estrato son iguales.

Efectivamente; si sus dos caras no son paralelas, tienen una normal común, por la cual pasarán los planos de todas las secciones rectas (144); y de esto se infiere que dichas secciones son iguales, por ser fajas de plano, (limitadas por rectas no paralelas) con la misma altura, que es la distancia entre las dos caras del estrato. Y si estas dos caras son paralelas, todas las secciones rectas son tambien iguales, por ser fajas de plano, limitadas por paralelas (145 y 151-I).

153. *Dos estratos, limitados por planos paralelos son iguales.*

Porque coinciden, cuando se les coloca de manera que una sección recta del uno coincida con una sección recta del otro, lo cual es posible, porque (151-I) ambas secciones rectas son iguales.

IX.—Elementos en el infinito é ideales. (*)

154. I.—*De dos rectas paralelas, se dice que se cortan en un punto límite ó infinitamente lejano, situado en la dirección de su paralelismo.* De este convenio que ya se justificó (102-*Obs. 1.ª*), y que tiene por objeto abreviar el lenguaje y dar generalidad á ciertas proposiciones, resulta inmediatamente que un punto límite está determinado por dos rectas paralelas, ó por un rayo rectilíneo que indique la dirección del paralelismo. Con el mismo objeto, es de gran utilidad la consideración de rectas y planos infinitamente distantes, y de puntos, rectas y planos idelales, cuya significación vamos á exponer en este artículo.

II.—(Fig. 86). Supongamos que los dos planos α y β son paralelos, que el sentido de su paralelismo es el que indica el rayo MA situado sobre α (122-*Obs.*), y que NB es la proyección normal de MA sobre β, con lo cual el plano proyectante MANB será normal á los dos planos α y β (113-*Cor.*). El rayo MA se dirige hacia el punto en el infinito del rayo NB (102-*Obs. 1.ª*): por con siguiente, si ese punto en el infinito fuera realmente un punto geométrico, estaría á la vez sobre los dos planos α y β; y éstos se cortarían según una recta que pasaría por dicho punto (9), y debería ser normal en él á la recta MA, por serlo al plano MANB (71). Por este motivo, *para afirmar que los dos planos α y β son paralelos, se dice también que se cortan según una recta límite ó infinitamente lejana, normal en el punto del infinito al rayo* MA.

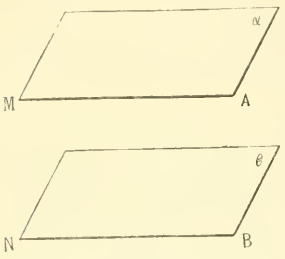


Fig. 86

De acuerdo con este lenguaje, como dos planos secantes determinan una recta, según la cual se cortan, la posición de una recta límite está definida por dos planos paralelos α y β, ó por uno de estos dos planos y el rayo MA que indica la dirección del paralelismo.

Por un punto N, exterior al plano α, pasan infinidad de planos paralelos al α

(*) La expresión *punto en el infinito* de una recta, adoptada por DESARGUES (1630) y empleada en más amplio sentido por NEWTON (1687), como asimismo las denominaciones relativas á las rectas y plano infinitamente distantes, son ya de uso corriente en la Geometría vulgar. La consideración de los elementos ideales, en la Geometría hiperbólica, está sugerida por BATTAGLINI, quien para generalizar ciertas fórmulas, conviene en decir que las rectas de un plano normales á una recta del mismo, se cortan en un punto ideal. (Véase su memoria *Sulla Geometria imaginaria de Lobatschewsky*, Giornale di Matematiche, 1867, t. V, pág. 217.

(119), y cada uno de ellos determina con el α una recta límite; luego, en un plano α se pueden considerar infinidad de rectas límites, correspondientes á las diversas direcciones que pueden imaginarse en aquel plano.

III. (Fig. 87). Sean α un plano normal en X á la recta fija MA. Si, permaneciendo fijo el punto M, el X se aleja del M á una distancia arbitrariamente grande, el plano α no tenderá hacia ninguna posición límite. Pues bien, esta propiedad se expresa también, diciendo que *existe un plano límite ó infinitamente lejano, normal en el punto del infinito al rayo* MA. Un plano límite está determinado por un rayo rectilíneo MA. Si NB es otro rayo paralelo al MA, y que corta en Y al plano α, cuando la distancia MX se haga arbitrariamente grande, el ángulo NYX tenderá hacia un recto, porque la distancia YX tiende hacia cero (147), y de esto se infiere que el plano variable α tiende á ser normal al rayo NB. Por esta propiedad, debemos convenir en que *los planos límites correspondientes á dos ó mas rayos paralelos* MA, NB,... *son uno mismo*. Á cada sistema de rayos paralelos, corresponde un plano infinitamente distante; luego el número de éstos es ilimitado.

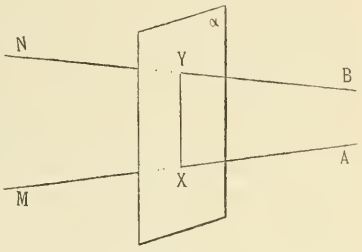


Fig. 87

Por una recta fija MA pasan infinidad de planos, y en cada uno de ellos, hay que considerar una recta límite, normal en el punto del infinito del rayo MA. Por consiguiente, si esas rectas límites fueran realmente rectas, su lugar constituiría un plano, que sería el del infinito, correspondiente al rayo MA.

155. I. Se dice que varias rectas se cortan en un *punto ideal*, cuando todas ellas son normales á un mismo plano α. Este plano se denomina *polar* de dicho punto, el cual, á su vez, recibe el nombre de *polo* de aquel plano.

Un plano, que contiene una recta, pasa también por todos los puntos de esta recta; y generalizando este principio para los puntos ideales, podemos afirmar que *todo plano* 6 *normal á otro* α, *pasa por el polo de* α; porque contiene rectas normales á α.

II. Llamaremos *recta ideal* al conjunto de los polos correspondientes á todos los planos imaginables que pasan por una recta fija *b* geométrica ó límite (154-II); y diremos que aquella recta ideal y la *b* son *recíprocas*. *Un plano* 6, *normal á la recta* b, *contiene todos los puntos de la recta recíproca de* b; porque, siendo 6 normal á todos los planos que pasan por *b*, contendrá los polos de dichos planos (I).

Infiérese de esto que, *si varios planos son normales á la recta* b, *tienen una recta ideal común, que es la recíproca de* b.

Por este motivo, diremos que dichos planos se cortan según una recta ideal.

De lo expuesto, resulta que dos planos cualesquiera se cortan siempre; porque ó se cortan realmente según una recta geométrica; ó son paralelos, y entonces se dice que se cortan según una recta infinitamente lejana (154-II); ó tienen una normal común (143-III), en cuyo caso acabamos de ver que se cortan según una recta ideal.

III. Llamaremos *plano ideal* al conjunto de los polos correspondientes á todos los planos imaginables que pasan por un punto fijo A geométrico ó límite; y diremos que este punto es el *polo* de aquel plano, el cual, á su vez, será el plano *polar* del punto A. De esta definición, y de las relativas á los puntos y rectas ideales, resulta inmediatamente que, *si una recta ideal tiene dos puntos en un plano ideal, tiene los demás puntos en dicho plano.*

156. Los anteriores convenios de lenguaje, relativos á los elementos ideales y á los infinitamente lejanos, permiten incluir en un mismo enunciado proposiciones al parecer muy diversas; y no pueden originar ningún error, mientras no se olvide su verdadera significación, mientras no se olvide que los puntos límites y los ideales no son puntos geométricos; que las rectas ideales y las infinitamente lejanas no son líneas; y que, tanto los planos límites como los ideales, no son superficies. Sin embargo, cuando se tema que estas denominaciones produzcan confusión, puede calificarse con el nombre de *geométricos* ó *propios* los verdaderos puntos, rectas y planos; y con el de *impropios*, los ideales y los infinitamente lejanos. En todos los casos, las frases en que intervengan elementos impropios pueden traducirse á otras en que no figuren dichos elementos. Así, por ejemplo: la afirmación de que una recta propia se dirige hacia el punto en el infinito del rayo MA, significa que aquella recta tiene igual dirección que dicho rayo MA; decir que un plano geométrico α pasa por el punto en el infinito del rayo MA, significa que α es paralelo al rayo MA, ó lo contiene; cuando se dice que una recta propia b pasa por el punto ideal que es polo del plano α, debe entenderse que b es normal á α; afirmar que un plano geométrico β pasa por la recta ideal que es recíproca de la recta a, equivale á decir que β es normal á a. La admisión de los elementos ideales é infinitamente lejanos es de gran utilidad, porque, permitiendo considerar varias figuras, al parecer muy diversas, como casos particulares de una misma, da brevedad al lenguaje y generalidad á las proposiciones. Las leyes descriptivas fundamentales, referentes á los puntos, rectas y planos propiamente dichos, se cumplen también en el caso de que estos elementos sean impropios. Por no dar á esta teoría un desarrollo innecesario para las aplicaciones que haremos de ella, no entraremos en la generalización de aquellas leyes, limitándonos, por su importancia, y por vía de ejemplo, á la siguiente proposición.

157. *Dos puntos (aunque no sean geométricos) determinan una recta, geométrica, límite ó ideal.*

Demostración.— Puede suceder que los dos puntos dados sean propios, ó

que lo sea uno solamente, ó ninguno; y en estos dos últimos casos, los puntos impropios, de que se trata, pueden ser límites ó ideales. De aquí los seis casos siguientes.

1.° Es axiomático que, si A y B son puntos geométricos, determinan una recta AB.

2.° (Fig. 88 y 89). Si A es el punto en el infinito del rayo MC, y B un punto geométrico, puede ocurrir que éste se halle sobre la recta MC (fig. 88) ó fuera de ella (fig. 89): en ambos casos, A y B determinan una recta, que es la MC ó la paralela BE á MC, dirigida por B.

Fig. 88

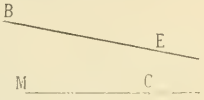


Fig. 89

3.° Si A y B son respectivamente los puntos en el infinito de los rayos

Fig. 90

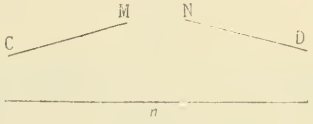


Fig. 91

MC y ND, de diferente dirección, puede ocurrir que estos dos rayos caigan sobre una misma recta (fig. 90) ó sobre rectas diferentes (fig. 91); pero, en ambos casos, A y B determinan una recta, que es la CMND (fig. 90) ó la paralela *n* á los dos rayos MA y ND. (fig. 91) (124).

4.° Si A es un punto ideal, cuyo plano polar es α, y B es un punto geométrico, existe una recta única que pasa por A y B; y es la normal al plano α, dirigida por B.

5.° (Figs. 92, 93, 94 y 95). Si A es un punto ideal, polo del plano α, y B

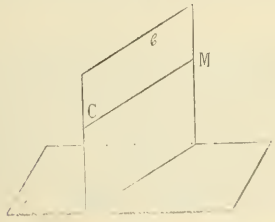


Fig. 92

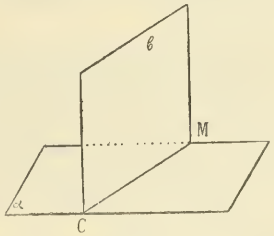


Fig. 93

es el punto en el infinito del rayo rectilíneo MC, puede ocurrir que la dirección de este rayo esté contenida en el plano α, ó que no lo esté. En el primer caso

(figs. 92 y 93) considérese el plano δ que proyecta normalmente sobre el α la recta MC; y la recta límite de este plano proyectante δ, dirigida hacia el punto en el infinito del rayo MC, pasará también por A, puesto que dicha recta límite, por estar en el plano δ y ser normal á la intersección de los planos normales α y δ (154-II), debe considerarse como normal al plano α (70-1.°), es decir, como dirigida hacia el polo A de α. En el segundo caso, ó sea cuando la direc-

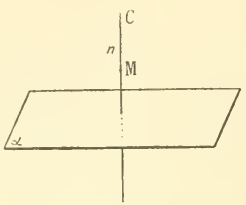


Fig. 94

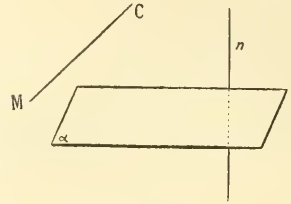


Fig. 95

ción del rayo MC no está contenida en el plano α (figs. 94 y 95), existe una sola recta n normal á α, y de la misma dirección que el rayo MC (129-II) la cual es la única recta que pasa por A y B. Obsérvese que, en este segundo caso, la recta n coincidirá con MC (fig. 94) ó será paralela al rayo MC (fig. 95) según que MC sea ó no sea normal al plano α.

6.° Si los dos puntos A y B son ideales, y sus respectivos planos polares son α y δ, puede ocurrir que α y δ se corten, que sean paralelos, ó que no cumplan ninguna de estas dos condiciones. Pues bien, en los dos primeros casos, la intersección geométrica ó límite de α y δ tiene por recíproca una recta ideal, que es la única que pasa por A y B; y en el tercer caso, α y δ tendrán una normal común única, que pasará por A y B.

158. Hasta ahora hemos tratado de los elementos ideales con relación al espacio en general. Las siguientes propiedades y denominaciones se refieren solamente al plano.

Si varias rectas de un plano α son normales á una recta b de él, se cortan en un punto ideal; porque son normales al plano δ que corta normalmente al α, según la recta b. Pues bien, con relación al plano α, diremos que aquel punto ideal es el *polo* de la recta b, y que esta recta b es la *polar* del referido punto.

Dos rectas de un mismo plano se cortan siempre; porque ó son concurrentes, ó paralelas, ó tienen una normal común: en el primer caso, se cortan según un punto geométrico; en el segundo, en un punto infinitamente lejano; y en el tercero, en un punto ideal.

En un plano α, los polos de todas las rectas propias de este plano, que pasan por un punto fijo B geométrico ó ideal, forman una recta ideal, recíproca de la normal al plano α en el punto B: Esto advertido, diremos que, con relación al

plano α, el punto B es el *polo* de aquella recta ideal; y que éste es la *polar* de aquel punto.

159. Dos rectas de un plano, que no se cortan, dividen al plano en que yacen en 3 regiones: á la de enmedio la llamaremos *ángulo límite* ó *ángulo ideal*, según que dichas rectas sean paralelas ó tengan una normal común (140 - III); sus *lados* serán dichas rectas, y su *vértice* el punto infinitamente lejano ó ideal en que estas rectas concurren. Todos los ángulos límites son iguales (151 - I).

Dos planos, que no se cortan, dividen al espacio total en 3 regiones: á la de enmedio la llamaremos *diedro límite* ó *diedro ideal*, según que dichos planos sean paralelos ó tengan una normal común (143 - III); sus *caras* serán dichos planos, y su *arista* la recta límite ó ideal en que estos planos se cortan. Todos los diedros límites son iguales (153).

Una superficie constituída solamente por ángulos límites, ó solamente por ángulos ideales, que tengan común su vértice, y sin ninguna arista libre, divide al espacio total en 2 regiones: á la región interna la llamaremos *ángulo sólido límite* ó *ángulo sólido ideal*, según que aquel vértice común sea límite ó ideal. Este ángulo sólido tendrá por *caras* las diferentes fajas de plano que componen su superficie; por *aristas* los lados de estas fajas; por *vértice* el punto límite ó ideal en que concurren todas las aristas, y por *diedros* los que forman cada dos caras consecutivas. Al ángulo sólido límite se le llama también *prisma ilimitado*. Para construir un ángulo sólido límite, diríjanse por los vértices de un polígono plano paralelas á un rayo rectilíneo fijo; y las fajas planas determinadas por cada dos paralelas consecutivas, formarán la superficie de dicho ángulo. Para construir un ángulo sólido ideal, diríjanse, por los vértices de un polígono, normales á un plano fijo; y las fajas de plano limitadas por cada dos normales consecutivas, formarán la superficie de dicho ángulo sólido.

Superficie *cónica* es la descrita por una recta móvil, que, pasando constantemente por un punto fijo, llamado *vértice*, resbala sobre una curva fija denominada *directriz*. La recta móvil, en cualquiera de sus infinitas posiciones, se llama *lado* de la superficie cónica.

El vértice puede ser geométrico, límite ó ideal. Una porción del espacio, limitada por una hoja de superficie cónica propiamente dicha (de vértice geométrico) se llama *ángulo cónico*. Análogamente, la superficie cónica límite y la ideal, cuando la directriz es reentrante, divide al espacio en 2 regiones: pues bien, á la región de enmedio la llamaremos también *ángulo cónico*, pero le daremos además el calificativo de *límite* ó *ideal* que corresponda á su vértice. Al ángulo cónico límite, se le llama también *cilindro ilimitado*.

X.—Mediatrices de los lados, y bisectrices de los ángulos, en el triángulo.

160. *Las mediatrices de los lados de un triángulo, situadas en el plano de éste, concurren en un mismo punto (geométrico límite ó ideal).*

Demostración.—(Figs. 96, 97 y 98.) Sean ABC el triángulo, y m, n, p, las normales á sus lados BC, CA, AB en sus puntos medios M, N, P, y situadas en el plano del triángulo.

1.° (Fig. 96). Si n y p se cortan en un punto propio O, este punto, equidista de A y C, por estar sobre la mediatriz n del lado AC; y también equidista de A y B, por estar sobre la mediatriz p del lado AB; luego dicho punto O equidista de B y C, y pertenece, por lo tanto á la mediatriz m del lado BC. Luego, en este caso, las tres rectas m, n, p concurren en un mismo punto geométrico O.

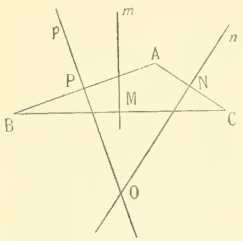


Fig. 96

2.° (Fig. 97). Si n y p son paralelas, y ND, PE es su dirección de paralelismo, trácese dentro del ángulo EPN una recta PF, hállese el punto B′ simétrico de A, respecto de dicha recta PF, y fórmese el triángulo AB′C. Por ser PE paralelo á ND, la recta PF corta á la ND (101); sea O el punto de intersección. En el triángulo AB′C, las mediatrices PF, ND de los lados AB′ y AC se cortan; luego, según el caso ya demostrado, la mediatriz del tercer lado B′C pasará por O. Ahora bien, si el ángulo EPF disminuye, la distancia NO aumenta, y si aquel es arbitrariamente pequeño, será NO arbitrariamente grande; pero, cuando dicho ángulo EPF tiende hacia cero, para los diversos elementos de la figura se obtienen los límites siguientes: para el triángulo AB′C, el ABC; para la mediatriz de B′C, la paralela al rayo ND, y normal al mismo tiempo á BC en su punto medio; luego las tres rectas m, n, p, concurren en un punto infinitamente lejano.

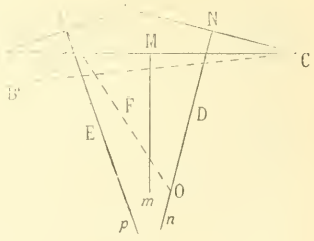


Fig. 97

3.° Si n y p no se cortan ni son paralelas (fig. 98), tendrán una normal común o. Sean AA′, BB′, CC′, las distancias de los vértices del triángulo á la recta o. El cuadrilátero ACC′A′ está dividido por la recta n en otros dos igua-

les; y, por consiguiente, es $CC' = AA'$; el cuadrilátero $ABB'A'$, proporciona también la igualdad $BB' = AA'$; y de las dos igualdades establecidas, se deduce $BB' = CC'$. Pero en un cuadrilátero $BCC'B'$ con los ángulos rectos en B' y C', é iguales los lados BB', CC', la normal al lado BC en su punto medio M debe ser normal al lado opuesto $B'C'$; luego la recta m es normal á o; luego m, n y p concurren en un punto ideal, que es el polo de la recta o.

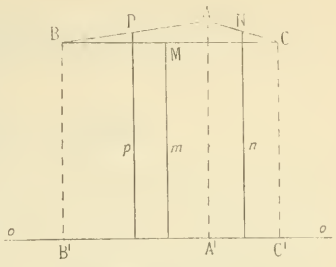


Fig. 98

Observación.—Si A, B y C están en línea recta, m, n y p concurren también en un mismo punto, que es el polo de aquella recta. Luego, *cualquiera que sea la situación de los puntos* A, B *y* C, *las mediatrices de los tres segmentos* AB, BC *y* CA, *situadas en un mismo plano, concurrirán en un mismo punto.*

161. *En el triángulo, las bisectrices de dos cualquiera de sus ángulos externos, y la del ángulo interno situado en el tercer vértice, concurren en un mismo punto (geométrico, límite ó ideal).*

Demostración.—(Figs. 99, 100 y 101). Sean ABC el triángulo, m la bisectriz del ángulo A, y n, p las bisectrices de los ángulos externos DBC, BCE.

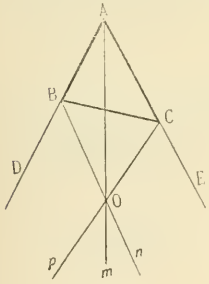


Fig. 99

1.° (Fig. 99). Si m y p se cortan, el punto O de intersección equidista de las rectas BD y BC, por estar sobre la bisectriz n del ángulo DBC; y también equidista de CB y CE, por pertenecer á la bisectriz p del ángulo BCE; luego O equidista de BD y CE, y como además está situado dentro del ángulo BAC, la bisectriz m de este ángulo pasará por O. Luego si n y p se cortan, las tres bisectrices m, n y p concurren en un mismo punto geométrico O.

2.° (Fig. 100). Supongamos que n y p son paralelas. Su dirección de paralelismo será la de los rayos BF, CG bisectores de los ángulos externos DBC, BCE, porque los ángulos FBC, BCG son agudos, por ser mitades de ángulos cóncavos. La bisectriz m del ángulo BAC corta al lado BC en un punto H; la paralela HI á BF, dirigida por H es paralela á CG; por consiguiente, si m no coincidiera con HI, sería interior á uno de los ángulos adyacentes BHI, IHC; y, por consiguiente, cortaría al rayo BF ó al CG; pero esto es imposible, porque (según el 1.er caso) si dos bisectrices m y n, ó m y p, se cortaran, por el punto de intersección, pasaría la tercera bisectriz, y tendríamos que n y p

(paralelas por hipótesis) se cortarían; luego las rectas m y HI son una misma; luego las tres bisectrices m, n, p concurren en un punto infinitamente lejano.

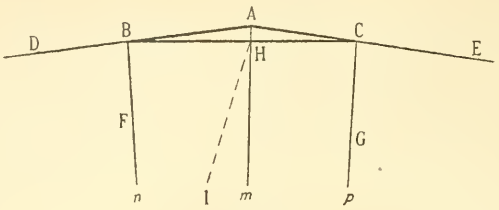


Fig. 100

3.° (Fig. 101). Supongamos, finalmente, que n y p no se cortan ni son paralelas. En este caso, n y p tendrán una normal común o; y se trata de probar que esta recta o es también normal á m. Sean F y G las intersecciones de la recta o con las n y p. Los ángulos FBC y BCG son agudos, por ser mitades de ángulos cóncavos, y esto enseña que F y G caen sobre los rayos bisectores de los ángulos externos (no sobre sus prolongaciones opuestas). Teniendo presente que en el cuadrilátero birrectángulo BCGF son agudos sus ángulos en B y C, se ve (141) que las rectas FG y BC no se cortan ni son paralelas, y que su normal común HI corta (en H é I) á los lados BC y FG,

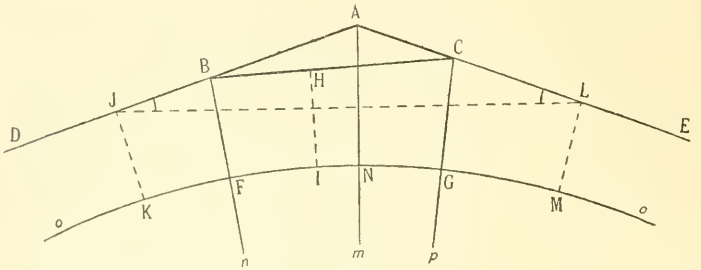


Fig. 101

no á sus prolongaciones. Pues bien, sobre las direcciones CE y BD, hágase respectivamente CL = CH, BJ = BH, y trácense las distancias LM, JK de los puntos L y J á la recta o. Resulta de esta construcción, que son iguales los cuadriláteros CHIG y CLMG, BHIF y BJKF, y que, por lo tanto, HI = LM, HI = JK; luego LM = JK. De esta igualdad, y de ser birrectángulo en K y M el cuadrilátero JLMK, se sigue que sus ángulos agudos en J y L son iguales;

que también lo son, por consiguiente, sus complementos en J y L señalados con un arco; y que, en el triángulo AJL, es AJ = AL. Siendo isósceles este triángulo, la bisectriz *m* del ángulo en el vértice es normal á su base JL en su punto medio; y como JL es base del cuadrilátero simétrico JLMK, también será *m* normal á KM en su punto medio N; luego *m*, *n* y *p* tienen una normal común *o*; y concurren, por lo tanto, en un punto ideal.

XI. — Círculo, horiciclo é hiperciclo.

162. (Figs. 102, 103 y 104). Imagínense en un plano dado todas las rectas *n*, *p*, *q*,... que pasan por un punto fijo (geométrico, límite ó ideal); márquese un punto M en el plano dado, y búsquense los puntos N, P, Q,... respectivamente simétricos del M, respecto de las rectas *n*, *p*, *q*,...: el lugar de los puntos N, P, Q,..., así obtenidos, es una línea que se llama *ciclo*. Su *centro* es el punto en que concurren las rectas *n*, *p*, *q*,..., y su *base* es la recta polar de este punto (158). Finalmente, en el ciclo se llaman *ejes* (porque lo son de simetría, según veremos) las rectas MA, NB, PC, QD,... de su plano, que pasan por el centro.

Cuando el centro es un punto geométrico O (fig. 102), el ciclo es una circunferencia de círculo, cuyo radio es la distancia OM. La base de una circunferencia es una recta ideal (158).

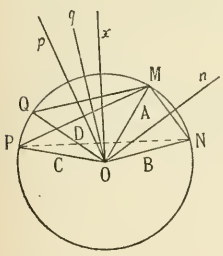


Fig. 102

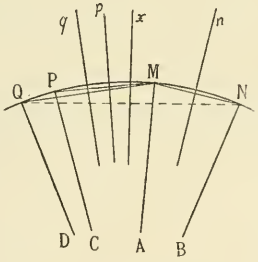


Fig. 103

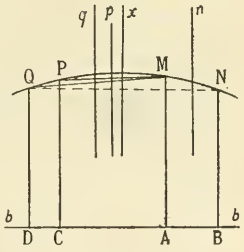


Fig. 104

Cuando el centro es un punto límite (fig. 103), ó dicho de otro modo, cuando las rectas *n*, *p*, *q*,... son paralelas, el ciclo es una línea abierta, denominada *horiciclo*. Muy pronto veremos que esta línea puede considerarse como una circunferencia de círculo, cuyo centro está infinitamente lejano. Por este motivo, llamaremos *radios* del horiciclo á los rayos paralelos NB, NC, ND,... que, empezando en los diferentes puntos de dicha línea, se dirigen hacia su centro infinitamente lejano. El horiciclo divide á su plano en dos regiones: la que contiene

los radios se llama *círculo límite*, aunque también suele darse este nombre á la circunferencia del círculo límite, ó sea al horiciclo. La base del horiciclo es una recta ideal (158).

Cuando el centro es un punto ideal (fig. 104) ó en otros términos, cuando las rectas n, p, q,... tienen una normal común b, el ciclo es una línea abierta, que lleva el nombre de *hipérciclo*. Las distancias MA, NB, PC,... de los diferentes puntos del hipericiclo á la recta b se llaman *alturas*, y son todas iguales, pues por la simetría de los cuadriláteros MANB, MAPC,..., es MA = NB, MA = PC,.... Podemos, pues, decir que *el hipérciclo es el lugar de los puntos de un plano, equidistantes de una recta* b *del mismo, y situados á un mismo lado de ella.* El hipérciclo divide al plano en que yace, en dos regiones: á la que contiene las alturas le daremos el nombre de *círculo ultralímite*.

En resumen, el ciclo comprende tres variedades, que son: la circunferencia de círculo, el horiciclo y el hipérciclo. En la circunferencia, el centro es geométrico, y la base ideal; en el horiciclo, el centro está infinitamente lejano, y la base es ideal; en el hipérciclo, el centro es ideal, y la base geométrica. El punto puede considerarse como un círculo de radio nulo; y la línea recta como un hipérciclo de altura nula.

163. *En el ciclo:*

1.° *Toda recta de su plano, mediatriz de una cuerda, pasa por el centro;*

2.° *Toda recta de su plano, que pasa por el centro, es eje de simetría del ciclo.*

Demostración. — (Figs. 102, 103 y 104).

1.° Si M, N, P... son puntos de esta línea, y M es el punto fijo que ha servido para definir todos los demás, la misma definición (162) expresa que las rectas n, p, q,... respectivamente normales á las cuerdas MN, MP, MQ,... en sus puntos medios, pasan por el centro del ciclo. Lo que falta es que probemos que lo mismo ocurre para otra cuerda cualquiera NP, que no tiene ninguno de sus extremos en M. Sea x la recta (situada en el plano del ciclo) normal á la cuerda NP en su punto medio. Sabemos (160 - *Obs.*) que las mediatrices n, p y x de los tres segmentos MN, MP y NP concurren en un mismo punto; pero n y p concurren en el centro del ciclo; luego por este mismo punto pasará también la recta x.

2.° Sean M el punto fijo del ciclo, que ha servido para definir todos los demás, y x una recta de su plano, que pasa por el centro. Se debe probar que todo punto del ciclo tiene sobre esta línea su simétrico respecto de x. Pues bien, por definición (162), el punto M y su simétrico, con relación á x, pertenecen al ciclo. Sean N otro punto cualquiera de esta línea, y P su simétrico respecto de x: las tres mediatrices n, p y x de MN MP y NP, situadas en el plano del ciclo, concurren en un mismo punto (160 - *Obs.*); pero n y x concurren en el centro; luego por este punto pasará p; es decir, que P es simétrico del punto fijo M, con relación á una recta p que pase por el centro; y por lo tanto P es, por definición, un punto del ciclo.

164. *En el horiciclo, y también en el hiperciclo, toda recta* n *de su plano, que pase por el centro, tiene un punto sobre esta línea, y solamente uno.*

DEMOSTRACIÓN. — Este principio resulta evidente para el hiperciclo, si se considera esta línea como el lugar de los puntos de un plano, equidistantes de su base, y situadas á un mismo lado de ella.

Si se trata de un horiciclo (fig. 105), trácense un radio NA y el eje x de simetría de la faja plana comprendida entre las paralelas NA y n. El punto P simétrico de N, respecto de x, pertenecerá al horiciclo (163-2.°); y estará sobre la recta n, por ser esta recta la simétrica de NA respecto de x; luego sobre la recta n existe un punto P del horiciclo. Y no existe otro; pues si existieran sobre n dos puntos P y P′ del horiciclo, la mediatriz del segmento PP′ (situada en el plano de aquella línea) debería pasar por el centro (163-1.°), es decir, debería coincidir con la misma recta PP′, lo que es absurdo.

165. I. *Dos ciclos que tienen el mismo plano, el mismo centro y un punto común, coinciden.*

Efectivamente, en los dos ciclos, que designaremos por α y 6, las rectas de su plano, que pasan por el centro, son las mismas. Si N (fig. 105) es un punto común á los dos ciclos, y P un punto del ciclo α, la recta x de su plano, mediatriz de la cuerda NP, pasa por el centro (162-1.°); luego (162-2.°) el punto P simétrico de N, respecto de x, pertenece también al ciclo 6. Así, queda demostrado que todo punto P del ciclo α pertenece al 6; y como de igual modo se probaría que todo punto del 6 pertenece al α, queda establecido que las dos líneas α y 6 son una misma.

II. *Todos los horiciclos son iguales. También lo son todos los hiperciclos de igual altura.*

Porque (I) los horiciclos ó hiperciclos de que se trata, coincidirán, cuando se les coloque sobre un mismo plano, de manera que coincidan sus centros, y tengan un punto común.

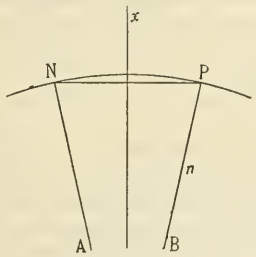


Fig. 105

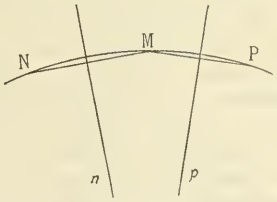


Fig. 106

166. I. *Un ciclo no puede tener más de un centro.* (Fig. 106). Efectivamente, si el ciclo MNP tuviera dos centros, las rectas n y p (situadas en el

plano del ciclo) mediatrices de las cuerdas MN y MP, deberían pasar á la vez por dichos centros (163-1.°); es decir, que *n* y *p* tendrían dos puntos comunes, lo que es absurdo, porque dichas mediatrices *n* y *p* son rectas diferentes.

II. *Dos hiperciclos de alturas desiguales no pueden coincidir. Ó de otro modo: un hiperciclo no puede tener dos bases.*

Porque, si las tuviera, tendría dos centros (los polos ideales de estas bases) lo cual es imposible (I).

167. *Toda cuerda* NP *de un círculo*, (fig. 107), *de un horiciclo* (fig. 108), *ó de un hiperciclo (cuya altura no sea nula)* (fig. 109) *forma con los dos radios* NA *y* PB, *ó con las dos alturas* NA *y* PB, *que van á sus extremos, dos ángulos cóncavos,* N *y* P, *que son iguales y agudos.*

Demostración.—La recta *x* situada en el plano del ciclo, y mediatriz de la cuerda NP, pasa por el punto geométrico, límite ó ideal en que concurren NA y PB (163-1.°); y es, por lo tanto, eje de simetría de la figura ANPB; luego los

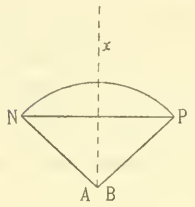


Fig. 107

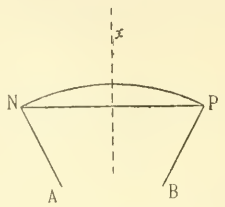


Fig. 108

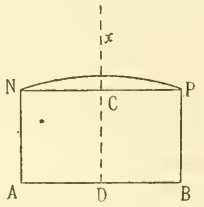


Fig. 109

ángulos homólogos ANP y NPB son iguales. Además, son agudos; porque, si se trata de un círculo (fig. 107) son ángulos en la base de un triángulo isósceles ANB; si se trata de un horiciclo (fig. 108), son los ángulos de paralelismo, correspondientes á la distancia $\frac{1}{2}$NP; y si se trata de un hiperciclo, cuya altura no sea nula (fig. 109), la recta *x* divide al cuadrilátero ABPN en otros dos ADCN y BDCP que son trirrectángulos en A, D, C y B, D, C; y tienen, por lo tanto (131 - *Cor.*) agudos sus ángulos oblicuos en N y P.

168. *La circunferencia de círculo, el horiciclo y el hiperciclo (cuya altura no sea nula) son líneas curvas y convexas.*

Efectivamente (figs. 110, 111 y 112): tres puntos M, N, P, de cualquiera de estos ciclos, no pueden estar en línea recta, porque uno de los tres radios ó alturas MA, NB, PC, el MA por ejemplo, estará situado dentro del ángulo cóncavo NMP ó faja PCBN que forman los otros dos radios ó alturas; y como los ángulos NMA y AMP son agudos (167), la suma de los dos, ó sea el ángulo NMP, será menor que dos rectos. Y puesto que los referidos ciclos no pueden tener tres puntos en línea recta, son líneas convexas, y no pueden componerse de ninguna porción rectilínea; luego son líneas curvas.

169. I. *Para todo punto del plano de un hiperciclo, situado con esta línea á un mismo lado de su base, la distancia á la base, es menor, igual ó mayor que la altura, según que dicho punto, esté dentro de la faja comprendida*

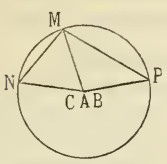


Fig. 110

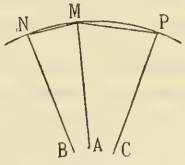


Fig. 111

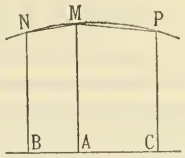


Fig. 112

entre el hiperciclo y su base, sobre el hiperciclo, ó fuera de dicha faja; y viceversa.

Porque el hiperciclo es el lugar de los puntos del plano, equidistantes de su base, y situados á un mismo lado de ella.

II. (Fig. 113). *Si* A *es un punto de un horiciclo,* B *otro punto de su plano,* AM *un radio, y* BN *un rayo rectilíneo paralelo á* AM, *podremos afirmar que el ángulo* MAB *será menor, igual ó mayor que el* ABN, *según que el punto* B *esté dentro del círculo límite, en su orilla, ó fuera de él; y viceversa.*

Demostración.—1.° (Fig. 113). Si B también está sobre el horiciclo, es MAB = ABN (167).

2.° (Fig. 114). Si B es interior al círculo límite, la prolongación opuesta

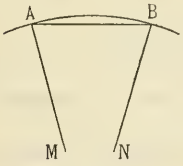


Fig. 113

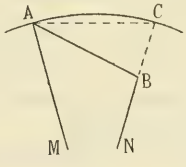


Fig. 114

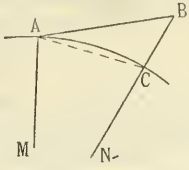


Fig. 115

de BN corta al horiciclo en un punto C (164); y se tendrá:

MAB < MAC (porque MAB es parte de MAC);

MAC = ACN (porque A y C están sobre el ciclo);

ACN < ABN (porque ABN es ángulo externo del triángulo ABC).

Y de estas tres relaciones, se deduce MAB < ABN.

3.° (Fig. 115). Si B está fuera del círculo límite (pero en su plano) el rayo BN corta al horiciclo en un punto C (164); y se tiene:

$$MAB > MAC \text{ (porque MAC es parte de MAB);}$$

$$MAC = ACN \text{ (porque A y C son puntos del ciclo);}$$

$$ACN > ABN \text{ (porque ACN es ángulo externo del triángulo ABC).}$$

Y de estas tres relaciones, se saca la consecuencia $MAB > ABN$.

4.° Recíprocamente, el punto B, situado en el plano del círculo límite, estará dentro de este círculo, en su circunferencia ó fuera de él, según que el ángulo MAB sea menor, igual ó mayor que el ABN; porque la negación de la conclusión, en cualquiera de estos tres casos, conduce, en virtud de los tres recíprocos (ya demostrados) á una conclusión incompatible con el supuesto.

170.—I. *En el círculo límite, los puntos de una cuerda cualquiera (excepto los extremos) son interiores al mismo; pero los de la prolongación son exteriores.*

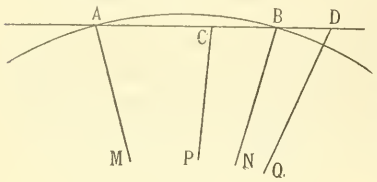


Fig. 116

Demostración. — (Fig. 116). Sea AB una cuerda de un horiciclo. Nos proponemos demostrar que todo punto C de esta cuerda, situado entre A y B, es interior al círculo límite; y todo punto D de la prolongación es exterior. Trácense los radios AM y BN, y por los puntos C y D los rayos CP y DQ paralelos al AM; y tendremos:

$$PCB > MAB \text{ (117-III) y } MAB = CBN \text{ (167);}$$

$$ADQ < ABN \text{ y } ABN = MAB;$$

luego $PCB > CBN$ y $ADQ < MAB$; luego (169-II) el punto C es interior al círculo límite, mientras que el D es exterior.

II. *Toda cuerda de un hiperciclo (cuya altura no sea nula) es interior á la faja de plano, limitada por dicha curva y su base; pero las prolnogaciones son exteriores.*

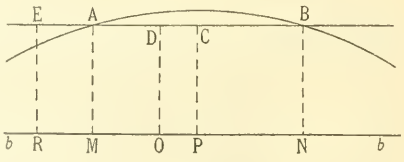


Fig. 117

Demostración.—(Fig. 117) Sean AB una cuerda del hiperciclo, D un punto de esta cuerda (diferente de A y B) E un punto de la prolongación, y AM, BN, DQ, ER las distancias de los puntos A, B, D, E á la base *b* del hiperciclo. Como el cuadrilátero ABNM es simé-

trico, las rectas AB y *b* tienen una normal común CP, determinada por los puntos medios C y P de los lados AB y MN; pero DC < AC y EC > AC; luego (149) DQ < AM y ER > AM. Estas desigualdades prueban (169-I) que el punto D es interior á la consabida faja, mientras que el E es exterior; y esto es lo que se quería demostrar.

171. *El horiciclo es normal á todos sus radios. O de otro modo: la tangente al horiciclo es normal al radio que va al punto de contacto. Todo otro punto de la tangente es exterior al círculo límite.*

El hiperciclo es normal á todas sus alturas. O lo que es lo mismo: la tangente al hiperciclo es normal á la altura que va al punto de contacto. La tangente es exterior á la faja limitada por el hiperciclo y su base.

DEMOSTRACIÓN.—(Figs. 118 y 119). Sean A y X dos puntos del horiciclo

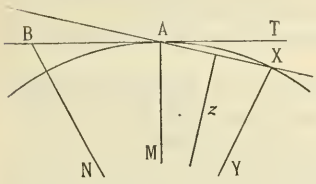


Fig. 118

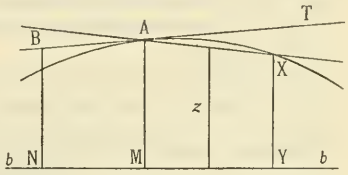


Fig. 119

(fig. 118) ó del hiperciclo (fig. 119), AM y XY los radios ó alturas correspondientes, *z* el eje de simetría de la faja ó cuadrilátero AMYX, y AT la normal á AM en A (situada en el plano de la figura). La recta *z* es normal á la cuerda AX, aunque ésta sea arbitrariamente pequeña. Si, permaneciendo fijo el punto A, la cuerda AX tiende hacia cero, la recta *z* tenderá hacia una posición límite, que es la recta AM; luego la posición de la recta AX (por ser siempre normal á *z*) tendrá por límite la recta AT. Queda, pues, demostrado que la tangente en A es normal al radio ó altura MA que va al punto de contacto.

Otro punto cualquiera B de la tangente al horiciclo (fig. 118) es exterior al círculo límite; porque siendo agudo el ángulo NBA de paralelismo, correspondiente á la distancia BA, es menor que el recto BAN (169-II).

Análogamente, en el hiperciclo (fig. 118), otro punto B de la tangente AT, distinto del de contacto A, es exterior á la faja de plano comprendida entre el hiperciclo y su base. Efectivamente, si BN es la distancia de B á la base, será BN > AN (149); luego (169-I) B está fuera de la referida faja.

172. (Figs. 120, 121 y 122). *Si un ángulo* NQP *está circunscrito á un ciclo, su vértice equidista de los dos puntos de contacto* N *y* P*; y su bisectriz* QC *pasa por el centro, y es mediatriz de la cuerda* NP*, que une aquellos dos puntos.*

DEMOSTRACIÓN.—(Figs. 120, 121 y 122). Sean NA y PB los radios ó alturas

del ciclo, correspondientes á N y P. Los ángulos P y N del triángulo NQP son guales, por serlo sus complementos ANP, NPB (167); luego los lados QN y

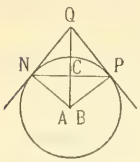


Fig. 120

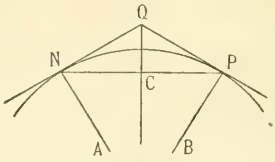


Fig. 121

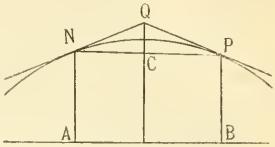


Fig. 122

QP de dicho triángulo son iguales. Además, puesto que el triángulo QNP es isósceles, la bisectriz QC de su ángulo en el vértice es mediatriz de su base NP; luego (163·2.°) dicha bisectriz CP pasa por el centro del ciclo.

173.—I. Las denominaciones de horiciclo é hiperciclo se fundan en la siguiente propiedad.

(Fig. 123). *Cuando un círculo, un horiciclo y un hiperciclo, situados en un mismo plano, se tocan internamente en un mismo punto* A, *queda el horiciclo fuera del círculo, y el hiperciclo fuera del círculo límite.*

Demostración.—1.° Si el círculo, de centro M, y un horiciclo se tocan internamente en el punto A, todo otro punto B del horiciclo será exterior á dicho círculo, pues construyendo el triángulo ABM y el radio BN del horiciclo, tendremos: BAM = NBA > MBA; es decir, que BAM > MBA; luego en el

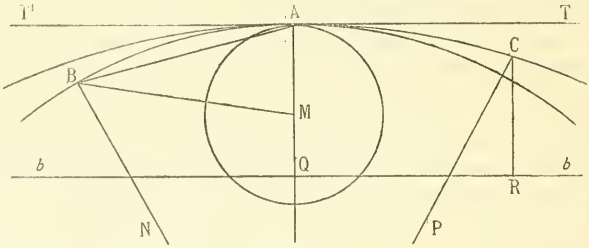


Fig. 123

triángulo ABM es BM > AM; y esto prueba que el punto B es exterior al círculo (M).

2.° Si un círculo límite y un hiperciclo de base *b* se tocan internamente en el punto A, todo otro punto C del hiperciclo es exterior á dicho círculo límite; pues trazando la cuerda AC, las alturas AQ y CR de los puntos A y C, y el rayo CP paralelo al AQ, tendremos: ACP < ACR = QAC, es decir, ACP < QAC; y esto prueba (169-II) que el punto C es exterior al círculo límite de radio AQ.

II. *Si dos hiperciclos se tocan internamente, el de menor altura está fuera de la faja plana limitada por el otro y su base.*

Demostración.—(Fig. 124) Supongamos que los dos hiperciclos h y h' de bases b y b' se tocan internamente en A, y que la altura AM del primero es menor que la AC del segundo. Afirmamos que todo otro punto B de h está fuera de la faja plana limitada por el otro hiperciclo h' y su base b. Sean BN y BD las distancias de B á las dos bases b y b'. El segmento BD está cortado por la recta b en un punto E, porque B y D quedan á distinto lado de dicha recta; y se tiene $BE > BN = AM$, es decir, $BE > AM$; y además (149) $ED > MC$. Sumando ordenadamente estas dos últimas desigualdades, resulta $BE + ED > AM + MC$, ó sea $BD > AC$. Esta desigualdad prueba que el punto B está fuera de la consabida faja, que es lo que se afirmaba.

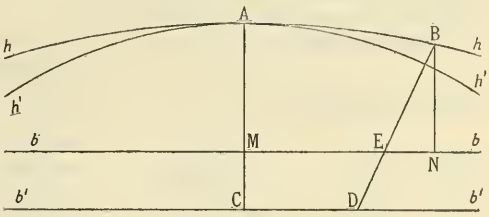


Fig. 124

174.—I. (Fig. 125). Sea c una circunferencia de centro O, situada en el plano del horiciclo h, al cual toca internamente en A Sean, además, B otro punto del horiciclo, BD el radio que parte de B, C la intersección de la circunferencia con el segmento rectilíneo OB, y AB, AC las cuerdas de los arcos AC, AB. Si, permaneciendo fijos los puntos A y B y la normal común á las dos curvas, el centro O se aleja indefinidamente del punto A de contacto, en la dirección AO, cuando la longitud del radio OA tienda hacia el infinito, el punto C tenderá hacia una posición límite, que es precisamente el punto B. Efectivamente: la recta BO tiene por límite la BD, y por lo tanto, el ángulo ABO tiende hacia ABD. Se tiene, además, $OAB > OAC = ACO > ABO$; es decir, que el valor del ángulo OAC está comprendido entre el del ángulo constante OAB y el del ángulo variable ABO; pero el límite de ABO es $ABD = OAB$; luego OAC tiene por límite el ángulo OAB. En resumen, las rectas CA y CO tienen por respectivos límites las BA y BD; luego la intersección C de las dos primeras tiene por límite la intersección B de las dos segundas. Podemos, pues, afir-

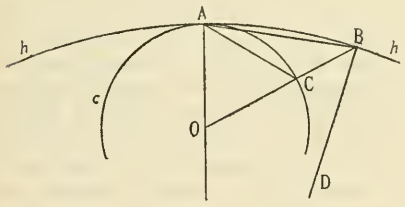


Fig. 125

mar que todo punto B del horiciclo *h* es el límite del punto correspondiente C de la circunferencia variable *c;* y que, por tanto, la posición límite hacia que tiende la circunferencia *c* es el horiciclo *h*. Esta propiedad, que justifica la denominación de círculo límite (162) suele expresarse incorrectamente, por brevedad, diciendo que *el horiciclo es una circunferencia de radio infinito.*

II. (Fig. 126). Supongamos que un horiciclo y un hiperciclo, situados en un mismo plano, se tocan internamente en el punto A. Sean, además, B otro punto cualquiera del horiciclo, BD el radio que parte de B, *b* la base del hiperciclo, AE la altura correspondiente al punto de contacto, y CO la altura que pasa por B. Si, permaneciendo fijos los puntos A y B y la normal AE, el punto E se aleja indefinidamente del punto de contacto, en la dirección AE, cuando la longitud de la altura AE tiende hacia el infinito, el punto C tenderá hacia una posición límite, que será precisamente el punto B, como vamos á ver. El punto C cae fuera del círculo límite (173·I), y si la altura AE es suficientemente grande, O caerá dentro de dicho círculo. El ángulo DBO tiende hacia cero, porque DBO < EBO < BEA (130·*Cor.*), y lím. BEA = 0 (102·*Obs. 2.ª*); el límite de ABO es ABD, porque ABO se compone de un ángulo constante ABD y de uno variable DBO que en el límite se desvanece. Se tiene, además, (18·I y 167) ABO > ACO = EAC > EAB, es decir, que el valor del ángulo EAC está comprendido entre los de los ángulos ABO y EAB; pero EAB es constante, y límite ABO = ABD = EAB; luego límite EAC = EAB. En resúmen, las rectas CA y CO tienen por respectivos límites las BA y BO; luego la intersección C de las dos primeras tiene por límite la intersección B de las dos segundas. Queda, pues, establecido que todo punto B del horiciclo fijo es la posición límite del punto correspondiente C del hiperciclo variable AC, y que, por lo tanto, dicho horiciclo es la posición límite hacia que tiende el hiperciclo. Se expresa este resultado incorrectamente, por brevedad, diciendo que *el horiciclo es un hiperciclo de altura infinitamente grande.*

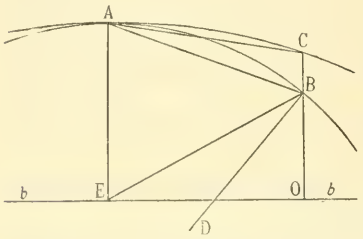


Fig. 126

175. *Tres puntos determinan la posición de un ciclo; ó en otros términos: por tres puntos dados pasa un ciclo, y solamente uno.*

Demostración.—(Fig. 127). Si los tres puntos dados M, N, P están en línea recta, determinan un hiperciclo de altura nula, que es la referida recta. Si M, N, P no están en linea recta, trácense en el plano MNP las mediatrices *n* y *p* de los segmentos rectilíneos MN y MP, las cuales se cortarán en un punto geométrico, límite ó ideal: el ciclo (situado en el plano MNP) que tenga por

centro dicho punto de intersección, y pase por M, pasará evidentemente por N y P (163-2.°). Todo otro ciclo que pase por M, N y P, coincidirá con el anterior (165-I), pues estará en el mismo plano MNP, y tendrá con aquel ciclo un punto común M y el mismo centro, porque éste debe hallarse á la vez sobre las dos rectas *n* y *p*. Luego por los tres puntos M, N, P pasa un ciclo, y solamente uno.

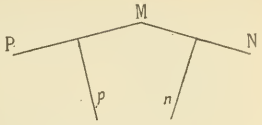


Fig. 127

COROLARIOS. — *Dos ciclos que tienen tres puntos comunes, coinciden. Dos ciclos diferentes no pueden tener más de dos puntos comunes.*

176. (Figs. 128, 129 y 130). *Para todo triángulo* ABC, *existen tres ciclos ex-inscritos, cada uno de los cuales toca á un lado del triángulo y á las prolongaciones de los otros dos.*

DEMOSTRACIÓN. — Las bisectrices de los ángulos externos DBC y BCE se cortan en un punto O geométrico (fig. 128), límite (fig. 129), ó ideal (fig. 130), cuya proyección normal R sobre la recta BC existe siempre (129-I), y cae entre B y C, pues aunque O sea ideal (fig. 130), BC y la normal común *o* á las bisectrices OB y OC tienen una normal común RR′, por ser agudos los ángulos en B y C del cuadrilátero birrectángulo BB′C′C (141). Llévense sobre las prolongaciones BD y CE las longitudes BT = BR y CS = CR; y trácense las rectas OT y OS. Como la bisectriz OB es eje de simetría de la figura OTBR, resulta recto el ángulo OTB, por serlo su homólogo BRO, y, además será T el punto simétrico de R, con relación á la bisectriz OB.

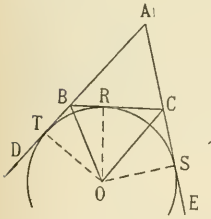


Fig. 128

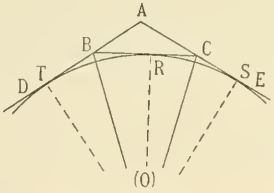


Fig. 129

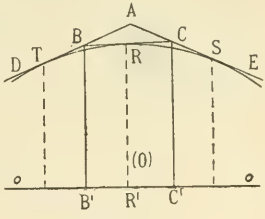


Fig. 130

Análogamente, resulta recto el ángulo OSE, y S simétrico de R, respecto de la bisectriz OC. De todo lo cual se infiere que, si en el plano del triángulo ABC, tomando O por centro, se construye un ciclo que pase por R, este ciclo pasará también por S y T, y tocará recpectivamente en R, S y T á las 3 rectas BC, CA y AB.

Otro ciclo que tocara también al lado BC y á las prolongaciones BD y CE

de los otros dos, coincidiría con el anterior. Efectivamente, dicho ciclo, por estar inscrito en los ángulos DBC y BCE, tendría sus centros sobre las bisectrices de estos ángulos (172), ó sea en su intersección O; y además, tocaría al lado BC en la proyección normal R de O sobre este lado. Así, los dos ciclos tendrían el mismo plano, el mismo centro y un punto R común; luego (165-I) estarían en coincidencia.

En resumen, queda demostrado que dentro del ángulo A existe un ciclo ex-inscrito, y uno solo; y de igual modo se probaría que lo mismo ocurre para los otros dos ángulos B y C del triángulo ABC. Luego existen tres ciclos ex-inscritos á este triángulo; y no existen más.

177. (Fig. 131). *Si se divide un arco* NT *de ciclo en partes iguales, las cuerdas correspondientes á estos arcos forman una línea quebrada regular* NPQRST.

Si un arco NT *de ciclo está dividido en partes iguales, y una línea quebrada y convexa* NABCDET *toca á este arco en sus extremos* N, T *y en todos los puntos de división* P, Q, R, S, *la línea quebrada* ABCDE *será regular.*

Demostración.—1.° Las figuras constituidas por cada arco parcial, su cuerda y los dos radios ó alturas que van á sus extremos, son iguales, porque coinciden, cuando se las coloca de manera que coincidan sus arcos. Infiérese de esto, que son iguales los lados de la línea quebrada inscrita NPQRST, é iguales también todos los ángulos agudos que con estos lados forman los radios ó alturas dirigidos á sus extremos; pero cada dos de estos ángulos componen uno de la línea quebrada inscrita; luego esta línea tiene todos sus ángulos iguales; y como según hemos visto, también tiene iguales todos sus lados, es regular.

2.° Los triángulos NAP, PBQ, QCR,... son isósceles y además iguales, por serlo sus bases NP, PQ QR,... (según acaba de probarse) y tener iguales todos los ángulos en las bases, como complementos de los ángulos (iguales, según hemos visto) que las cuerdas NP, PQ, QR,... forman con los radios ó alturas que van á sus extremos. Por lo tanto, serán iguales por una parte los ángulos homólogos A, B, C, D y E, y por otra los lados homólogos AP, PB, BQ,

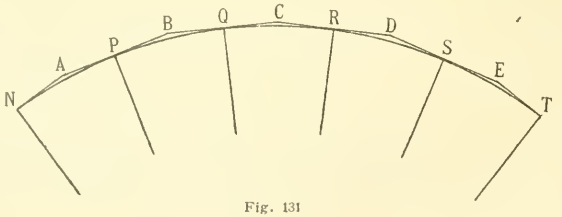


Fig. 131

QC,..., y también sus duplos, ó sea los lados AB, BC, CD, DE de la línea quebrada circunscrita ABCDE. Luego esta línea es regular.

178. *Para toda línea quebrada regular, existe un ciclo circunscrito, y otro incrito, los cuales son concéntricos.*

Demostración. — (Fig. 132). Sea ABCDEF la línea quebrada regular. Vamos á ver que el ciclo determinado por los tres primeros vértices A, B, C, pasa también por todos los otros. La mediatriz *n* del lado BC, situada en el plano de dicho ciclo, es eje de simetría de esta línea (163-2.º); y como, por ser regular la línea quebrada, el vértice D es simétrico de A, respecto de aquel eje *n*, dicho ciclo pasará por D. Análogamente, la mediatriz *p* de la cuerda CD (situada en el plano de la figura) es eje de simetría del ciclo; y como el vértice E es simétrico del B respecto de *p*, dicho ciclo pasará por E. Y reiterando este razonamiento, se verá que el ciclo determinado por los tres primeros vértices A, B, C, pasa por todos los otros. Existe, pues, un ciclo circunscrito á la línea quebrada regular ABCDEF.

El ciclo concéntrico con el anterior, que pasa por el punto medio M del lado AB, y está en el plano de dicha línea quebrada, pasa también por los puntos medios N, P, Q, R, de los otros lados. Efectivamente, pasa por N (169) porque los ángulos OMN y MNO son iguales, como complementos de los ángulos en la base del triángulo isósceles BMN. Ahora, fundándonos en que dicho

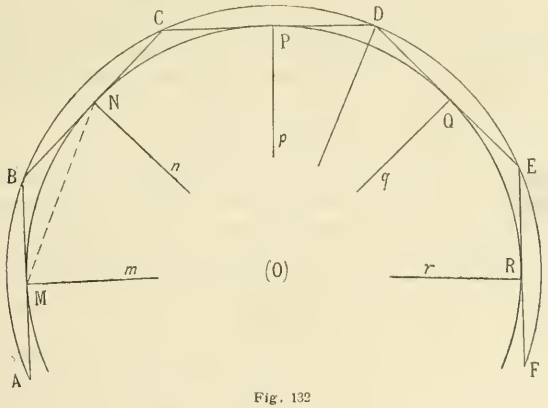


Fig. 132

ciclo pasa por N, demostraríamos que pasa por P; y, reiterando el razonamiento, veríamos sucesivamente, que pasa por Q y R. Además, este ciclo toca en M, N, P, Q y R á los lados de la línea quebrada, porque estos lados son respectivamente normales á las rectas *m*, *n*, *p*, *q*, *r*, que unen el centro con aquellos puntos (171). Existe, pues, un ciclo inscrito en la línea quebrada regular ABCDEF, que es concéntrico con el inscrito.

XII.—Esfera, horisfera é hiperesfera.

179. Si un ciclo gira alrededor de uno de sus ejes, la superficie de revolución, que describe, lleva en sentido lato, el nombre de superficie *esférica*. Su *centro* es el centro del ciclo generador; su *base* es el plano polar de este punto; y sus *ejes* las rectas que pasan por el centro, el cual, como ya sabemos, puede ser geométrico, límite ó ideal. En los tres casos, la superficie de que se trata divide al espacio en dos regiones: la que contiene los radios ó alturas del ciclo generador se llama *esfera* propiamente dicha, *horisfera* ó *hiperesfera*, según que aquel ciclo sea una circunferencia de círculo, un horiciclo ó un hiperciclo.

En la esfera propiamente dicha, el centro es un punto geométrico, la base un plano ideal, y la superficie cerrada, con todos sus puntos equidistantes del centro. En la horisfera, que también se llama *esfera límite*, el centro está infinitamente lejano, la base es ideal, y la superficie abierta y sin orillas. Los rayos rectilíneos, que, empezando en la superficie, se dirigen hacia su centro, y son por consiguiente paralelos, se llaman *radios*.

En la hiperesfera, á la cual llamaremos también *esfera ultralímite*, su superficie es también abierta y sin orillas, el centro es ideal, y la base un plano geométrico, el descrito por la base del hiperciclo generador, girando en torno del eje de revolución. Las distancias de este plano á los diferentes puntos de la superficie hiperesférica se llaman *alturas*, y son todas iguales, pues son las diversas posiciones que adquieren las alturas del hiperciclo generador. Podemos, pues, decir que *la superficie de la hiperesfera es el lugar de los puntos equidistantes de un plano fijo, y situados á un mismo lado de él.*

En resumen, la esfera comprende tres variedades, que son: la esfera propiamente dicha, la horisfera ó esfera límite, y la hiperesfera ó esfera ultralímite. En la esfera propiamente dicha, la superficie es cerrada, el centro geométrico y la base ideal. En la horisfera, la superficie es abierta y sin orillas, el centro, infinitamente lejano, y la base es ideal. En la hiperesfera, la superficie es también abierta y sin orillas, el centro ideal y la base geométrica. El punto puede considerarse como una esfera de radio nulo, y el plano como una hiperesfera de altura nula.

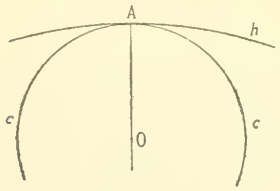


Fig. 133

180. 1. (Fig. 133). Supongamos que una circunferencia *c*, de centro O, y un horiciclo *h*, situados en un mismo plano, se tocan internamente en A. Sabemos (174 - 1) que, si permaneciendo fijos el punto A y la normal AO común á las dos curvas, el centro O se aleja indefinidamente de A en la dirección AO, la circunferencia *c* tiende á ocupar una posición límite, que es el hori-

ciclo h. Si toda la figura da una vuelta completa alrededor de OA, la circunferencia c describe la superficie de una esfera propiamente dicha, y el horiciclo h la superficie de una horisfera. Por consiguiente, si el centro O se aleja indefinidamente sobre el rayo rectilíneo AO, la forma y posición límite de la esfera será la horisfera. Esta propiedad, que justifica la denominación de *esfera límite*, suele expresarse incorrectamente, por brevedad, diciendo que *la horisfera es una esfera de radio infinito.*

II. (Fig. 134). Supongamos que un hiperciclo h, de base o, y un horiciclo h', situados en un mismo plano, se tocan internamente en A, y sea AM la altura correspondiente al punto de contacto. Sabemos (174-II) que, si permaneciendo fijos el punto A y la normal común AM á las dos curvas, el punto M se aleja indefinidamente en la dirección AM, el hiperciclo h tiende á adquirir una forma y posición límite, que es el horiciclo h'. Si toda la figura gira alrededor de AM, el horiciclo describe la superficie de una horisfera, y el hiperciclo la de una hiperesfera. Por consiguiente, cuando el punto M se aleje indefinidamente sobre el rayo AM, la hiperesfera tendrá por posición límite la horisfera. Este resultado se expresa incorrectamente, por brevedad, diciendo que *la horisfera es una hiperesfera de altura infinita.*

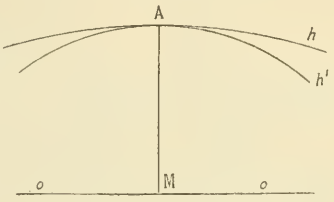


Fig. 134

181. *Toda recta que pasa por el centro de una superficie horisférica ó hiperesférica, tiene con estas superficies un punto común, y solamente uno.*

Demostración.—(Fig. 135). Sea MC el horiciclo ó hiperciclo que, girando en derredor de su eje MA, ha descrito la superficie horisférica ó hiperesférica. Esta superficie tiene con la recta MA un solo punto común, que es el M. Si BD es otra recta que pasa por el centro, el plano MABD corta á la superficie descrita por el ciclo MC, según un meridiano ME, es decir, según una línea igual á la MC. Así, la línea de intersección ME es un horiciclo ó hiperciclo, y la recta BD uno de sus ejes; luego (164) esta recta tiene con la curva ME (y por consiguiente, con la superficie horisférica ó hiperesférica) un solo punto común N.

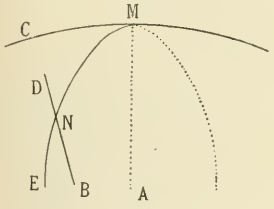


Fig. 135

182. *En la esfera, en la horisfera y en la hiperesfera (cuya altura no sea nula) los dos ángulos cóncavos que una cuerda forma con los radios ó alturas, que van á sus extremos, son iguales y agudos.*

Demostración—1.° (Fig. 136). En la esfera propiamente dicha, cuyo centro es O, los dos ángulos cóncavos OMN y MNO, que la cuerda MN forma con los

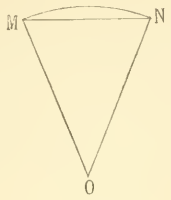


Fig. 136

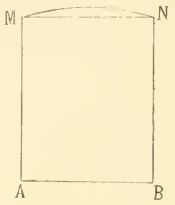


Fig. 137

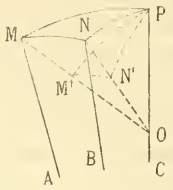


Fig. 138

radios OM y ON, son iguales y agudos, porque son ángulos en la base del triángulo isósceles OMN (35).

2.° (Fig. 137). En la hiperesfera que tiene la cuerda MN y las alturas MA y NB, son iguales y agudos los ángulos cóncavos AMN y MNB, porque el cuadrilátero convexo ABNM tiene rectos los ángulos en A y B, é iguales los lados MA y NB. (20).

3.° (Fig. 138). Consideremos, finalmente, una horisfera. Sea PM el horiciclo que, girando en torno de su radio PC, describe la superficie horisférica. Toda cuerda de esta superficie, tal como PN, que tiene su extremo en P, forma con los radios PC y NB los ángulos cóncavos BNP y NPC iguales y agudos, por ser PN cuerda de un horiciclo meridiano (167). Lo que falta probar es que lo mismo ocurre para cualquiera otra cuerda MN de la horisfera, que no tenga ningún extremo en P. Márquese un punto O sobre el rayo rectilíneo PC; y, haciendo centro en O, con radio OP, descríbase una superficie esférica, la cual cortará á las aristas OM, ON, OP del triedro OMNP en los puntos M′, N′, P, y á las caras POM, PON según los arcos de círculo PM′, PN′. Si el centro O se aleja indefinidamente de P en la dirección PC, dichos arcos de círculo PM′ y PN′ tendrán por respectivos límites los arcos de horiciclo PM y PN; y, por lo tanto, los ángulos AMN y MNB, que forma la cuerda MN con los radios MA y NB, serán los respectivos límites de los OM′N′ y N′M′O; pero estos dos son iguales (porque OM′ = ON′); luego también lo son sus límites AMN y MNB.

Que estos dos ángulos cóncavos son agudos, resulta de que son iguales, y suman menos de dos rectos, en atención á que los rayos MA y NB son paralelos (117-III).

183. I. *En la superficie hiperesférica, para todo punto que esté con ella á un mismo lado de su base, la distancia á esta base es menor, igual ó mayor que la altura, según que dicho punto esté dentro del estrato comprendido por la base y la superficie hiperesférica, sobre esta misma superficie, ó fuera de dicho estrato; y viceversa.*

Porque la superficie hiperesférica es el lugar de los puntos equidistantes de su base, y situados á un mismo lado de ella.

II. (Figs. 113, 114 y 115 de la pág. 83). *Si* A *es punto de una superficie horisférica*, B *otro punto cualquiera,* AM *un radio, y* BN *un rayo rectilíneo paralelo á* AM, *podremos afirmar que el ángulo* MAB *será menor, igual ó mayor que el* ABN, *según que el punto* B *esté dentro de la horisfera, en su superficie ó fuera de aquélla; y viceversa.*

Se demuestra de igual modo que la ley análoga del horiciclo.

184. *La superficie esférica, la horisférica y la hiperesférica (cuya altura no sea nula) son superficies curvas y convexas.*

Demostración.—(Fig. 139). Tres puntos M, N, P de una cualquiera de dichas superficies no pueden estar en línea recta; porque, si lo estuvieran, uno de los tres, el N por ejemplo, caería entre los otros dos; y trazando su radio ó altura NB, sería no agudo alguno de los dos ángulos adyacentes MNB y BNP, lo cual es imposible, pues ya sabemos (182) que los ángulos cóncavos que forman las cuerdas MN y NP con los radios ó alturas que van á sus extremos, son agudos. Y puesto que las referidas superficies no pueden tener tres puntos en línea recta, son convexas, y no se componen de ninguna porción plana; luego son también superficies curvas.

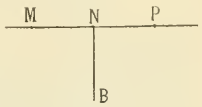


Fig. 139

185. I. *Dos superficies esféricas (de centro propio ó impropio) que tienen un punto común y el mismo centro, coinciden.*

Demostración.—(Fig. 140). Designemos por α y β las dos superficies esféricas que tienen un punto M común y el mismo centro (geométrico, límite ó ideal). Para todo otro punto N de la superficie α, serán iguales los dos ángulos cóncavos M y N que la cuerda MN forma con las rectas MA y NB, dirigidas desde M y N al centro, (182); y esto prueba que el punto N está sobre β. Tenemos, pues, demostrado que todo punto N de la superficie α pertenece á la β; y como de igual modo se probaría que todo punto de β pertenece á α, debemos deducir que ambas superficies α y β son una misma.

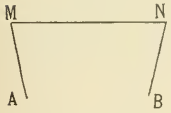


Fig. 140

II. *Todas las horisferas son iguales. También lo son todas las hiperesferas de igual altura.*

Porque, las horisferas ó hiperesferas, de que se trata, pueden ser colocadas de manera que sus superficies tengan un punto común y el mismo centro; y entonces coincidirán (I).

186. *La superficie esférica (de centro geométrico, límite ó ideal) es de revolución alrededor de cualquiera recta que pase por su centro.*

Demostración.—(Fig. 141). Supongamos que una superficie esférica ha sido descrita por la revolución del ciclo MP alrededor de su radio ó altura MA.

Vamos á probar que, si x es otra recta cualquiera que pasa por el centro, dicha superficie también puede ser descrita por la revolución de cierto ciclo alrededor de x. Pues bién, la superficie esférica corta á la recta x en un punto N (181), y al plano de las dos rectas MA y x según una línea MN, que será igual á la MP, porque ambas son meridianos correspondientes al eje MA. Pero la superficie esférica de que se trata, coincidirá consigo misma, si la colocamos de manera que, conservando su mismo centro, el punto N se situe en M (185-I): luego la figura constituída por dicha superficie y la recta MA es igual á la constituída por la misma superficie y la recta NB; y como la primera figura es de revolución alrededor de MA, la segunda también lo será alrededor de la recta NB homóloga de MA.

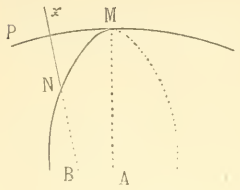


Fig. 141

187. *En la esfera límite y en la hiperesfera (cuya altura no sea nula) los puntos de una cuerda (excepto los extremos) son interiores á dichas esferas; mientras que los de las prolongaciones son exteriores.*

Se demuestra de igual manera que las proposiciones análogas para el horiciclo é hiperciclo.

188. *Cortando una horisfera por un plano, la sección que resulta es un círculo límite, si el plano secante pasa por el centro; y un círculo finito, en el caso contrario.*

Demostración.—1.° (Fig. 142). Sean l la línea de intersección de una superficie horisférica con un plano α que pasa por su centro, M un punto de esta línea, y MA el radio correspondiente. Todo punto N de esta línea pertenece al horiciclo que, estando situado en el plano α, tiene MA por uno de sus radios; porque, si NB es el radio de la horisfera, correspondiente al punto N, serán iguales los ángulos cóncavos AMN y MNB (182 y 169-II). Recíprocamente, todo punto N de dicho horiciclo está sobre la intersección l de la superficie horisférica con el plano α; puesto que, á causa de estar M y N sobre aquel horiciclo, serán iguales los ángulos cóncavos AMN y MNB. Luego el referido horiciclo es la intersección de la superficie horisférica con el plano α, que pasa por su centro.

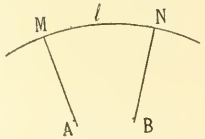


Fig. 142

2.° (Fig. 143). Si el plano secante α no pasa por el centro de la superficie horisférica, sean M y N dos puntos de la intersección, y MA y NB los radios correspondientes. Los ángulos AMN y MNB son agudos (182), y de esto se infiere que el plano secante α es oblicuo á MA; y que, por lo tanto, existirá una recta x normal al plano α, y paralela al rayo MA (129-II). La superficie horisférica es de revolución alrededor del eje x (186); y como el plano secante α

es normal á este eje, su intersección con la superficie horisférica será un paralelo de la misma, ó sea una circunferencia de círculo. Decimos que esa intersección será una circunferencia, y no varias, porque el plano α y el meridiano PM (que es la mitad del horiciclo) no se cortan más que en un punto M (168).

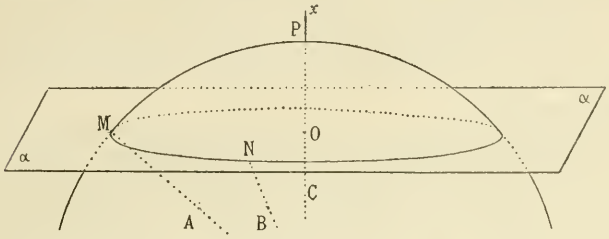


Fig. 143

189. *Cortando la superficie hiperesférica por un plano, la sección que resulta es un hiperciclo, un horiciclo ó una circunferencia de círculo, según que dicho plano corte á la base, le sea paralelo, ó no cumpla ninguna de estas dos condiciones.*

Demostración. — Designemos por l la intersección de un plano α con la superficie de una hiperesfera. Pudeden ocurrir tres casos: que este plano α corte á la base 6 de aquella hiperesfera, que le sea paralelo, ó que no cumpla ninguna de estas dos condiciones.

1.° Si el plano α corta normalmente á la base 6, la línea l es evidentemente un hiperciclo, cuya base es la recta en que se cortan α y 6.

Si el plano α (fig. 144) corta oblicuamente al 6, sea b la recta de intersección: la línea l, ó sea MNP, común á la superficie hiperesférica y al plano α,

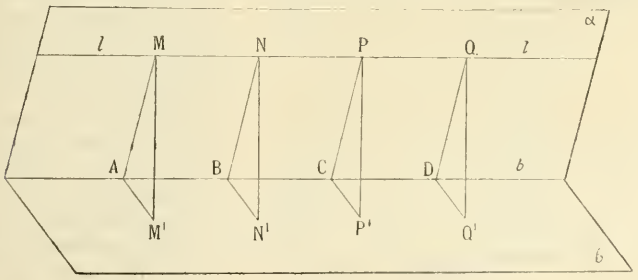


Fig. 144

será un hiperciclo de base b. Efectivamente, sean MM', NN', PP'.... las alturas de la hiperesfera, correspondientes á los puntos M, N, P, ... de la línea l, y

MA, NB, PC,.... las distancias de estos mismos puntos á la recta b. Los triángulos rectángulos MM'A, NN'B, PP'C,.... son iguales, porque tienen iguales los catetos MM', NN', PP'...., como alturas de la misma hiperesfera, é iguales tambien los ángulos agudos en A, B, C,...., por ser secciones rectas de uno de los dos diedros agudos que forman los planos α y 6. Y, de la igualdad de estos triángulos rectángulos, se sigue la de sus hipotenusas MA, NB, PC.... Es decir, que todos los puntos M, N, P,.... de la línea l equidistan de b; y como, además, están sobre un mismo plano α y á un mismo lado de b, caerán sobre un hiperciclo h de base b.

Recíprocamente, todo punto Q de este hiperciclo pertenece á la intersección l de la superficie hiperesférica con el plano α. Efectivamente, si QD es la distancia de Q á la recta b, y QQ' la distancia del mismo punto al plano 6, serán iguales los triángulos rectángulos QQ'D y MM'A, porque tienen iguales sus hipotenusas QD y MA, como alturas del hiperciclo h, é iguales también sus ángulo agudos en D y A, como secciones rectas de un mismo diedro. Por lo tanto, los catetos homólogos QQ' y MM' son iguales; y puesto que el punto Q dista de la base 6 una longitud igual á la altura MM' de la hiperesfera, y se halla con ésta á mismo lado de la base, cae sobre la superficie hiperesférica. Luego la línea l es un hiperciclo de base b.

2.° (Fig. 145). Suponganos que el plano α es paralelo á la base 6 de la hiperesfera; y sean MA la dirección del paralelismo, N un punto de la línea l en que se cortan el plano α y la superficie hiperesférica, NB el rayo paralelo al MA, dirigido por N, h el horiciclo situado en el plano α, que tiene NB por uno de sus radios, y NN' la altura de la hiperesfera, correspondiente al punto N.

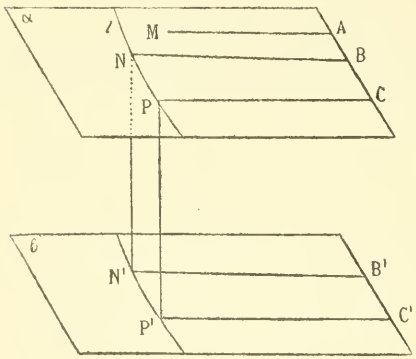


Fig. 145

Todo punto P de la línea l cae sobre el horiciclo h. Efectivamente, trácense por P el rayo PC paralelo al MA, la distancia PP' de P al plano 6, y los rayos N'B', P'C' paralelos al MA, que resultarán situados en 6. Los planos B'N'NB y C'P'PC son normales al 6, y por consiguiente al α (113-II -*Corol.*). Los triedros NN'PB y PP'NC tienen respectivamente iguales y dispuestos en orden inverso los elementos siguientes: 1.° Las caras N'NB y P'PC, como ángulos de paralelismo correspondientes á las alturas iguales NN' y PP'

de la hiperesfera; 2.° Las caras N'NP y NPP', como ángulos homólogos del cuadrilátero simétrico y birrectángulo NPP'N'; y 3.° Los diedros NB y PC, por ser rectos. Y, como además los ángulos iguales N'NB y P'PC son agudos, se deduce sucesivamente (99) que dichos tiedros son simétricos; que sus caras homólogas PNB y CPN son iguales; y que el punto P pertenece al horiciclo h, es decir, al que, estando situado en el plano α, tiene NB por uno de sus radios (169-II). Queda, pues, demostrado que todo punto P la intersección l pertenece al horiciclo h.

Recíprocamente, todo punto P del horiciclo h está sobre la intersección l. En efecto, los triedros NN'PB y PP'NC tienen respectivamente iguales y dispuestos en orden inverso los elementos siguientes: 1.° Las caras PNB y CPN, por ser N y P puntos del horiciclo h; 2.° Los diedros NB y PC, por ser rectos; y 3.° Los diedros NP y PN, porque son uno mismo. Por consiguiente, sus caras homólogas N'NB y P'PC son iguales; y como á estos ángulos de paralelismo corresponden las distancias NN' y PP', éstas serán iguales; luego el punto P está sobre la superficie hiperesférica dada, cuya altura es NN'; y por lo tanto, en la línea l. Luego todo punto P del horiciclo h, pertenece á la línea l en que se cortan el plano α y la superficie hiperesférica; y como ya hemos probado que, recíprocamente, todo punto de l pertenece á h, se debe concluir que la línea l es un horiciclo h.

3.° (Fig. 146). Consideremos, finalmente, el caso en que el plano α no corta á la base 6 de la hiperesfera, ni le es paralelo. Entonces α y 6 tienen una normal común x (143-III); es decir, existe una recta x que pasa por el centro de la hiperesfera, y es normal al plano α. Ahora bien, la superficie hiperesférica es de revolución alrededor del eje x (186); y como el plano secante α es normal á este

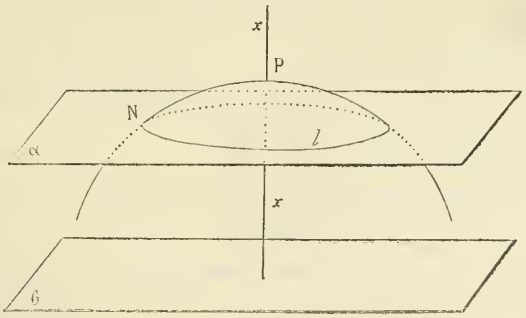


Fig. 146

eje, cortará á dicha superficie hiperesférica según un paralelo de la misma, ó sea según una circunferencia de círculo. Decimos que su intersección será una cir-

cunferencia, y no varias, porque el plano α y el meridiano PN (que es la mitad de un hiperciclo) no se cortan más que en un punto N.

XIII.—Geometría de las figuras horisféricas.

190. I.—*Dos puntos de una superficie horisférica determinan un horiciclo de la misma. En otros términos, por dos puntos dados de la superficie horisférica pasa un horiciclo, y solamente uno, que esté situado en dicha superficie.*

Efectivamente (fig. 147), todo horiciclo de una superficie horisférica, que pase por dos puntos M y N marcados en ella, debe contener en su plano al centro de la horisfera (188), y también, por consiguiente, á los radios paralelos MA y NB; luego el horiciclo en que el plano MANB de estos dos radios corta á la superficie horisférica, es el único que, estando situado en dicha superficie, pasa por los dos puntos dados M y N.

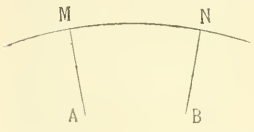


Fig. 147

II.—*Dos horiciclos de una superficie horisférica, que tienen dos puntos comunes, coinciden.*

Porque, si no coincidieran, por dichos dos puntos pasarían dos horiciclos de la horisfera, lo cual es imposible (I).

III.—*Dos horiciclos de una superficie horisférica no pueden tener más de un punto común.*

Porque, si tuvieran dos, coincidirían (II).

IV.—(Fig. 147). *Distancia horisférica* entre dos puntos M y N de una superficie horisférica es el arco MN del horiciclo trazado en dicha superficie, y terminado por aquellos dos puntos.

191. (Fig. 148). La porción finita de una superficie horisférica, terminada por una circunferencia de círculo, se llama *casquete* horisférico; y tiene por *polo* el extremo del radio PO que es normal al plano de su circunferencia ABC; y por *radios horisféricos* los diversos arcos horiciclares PA, PB, PC.... de la horisfera, comprendidos entre el polo del casquete y su orilla. A una circunferencia de la horisfera se atribuyen el mismo polo y los mismos radios horisféricos que al casquete que limita.

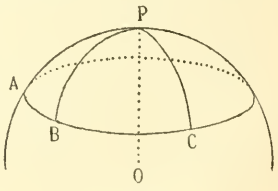


Fig. 148

Todos los radios horisféricos de un casquete PABC son iguales; porque la revolución de uno de sus radios horisféricos PA alrededor del eje PO, engendraría el casquete (186); y por consiguiente, los diferentes radios horisféricos

PA, PB, PC,.... son posiciones diversas del arco generador PA. Un punto de una superficie horisférica está dentro de un casquete de la misma, en su circunferencia, ó fuera de él, según que su distancia horisférica al polo sea menor, igual ó mayor que el radio horisférico; y viceversa; luego *el lugar de los puntos de una superficie horisférica, que equidistan horisféricamente de un punto de la misma, es una circunferencia de círculo, que tiene por polo el punto dado.*

192. (Fig. 149). Si sobre la superficie horisférica, se trazan, á partir del punto M, dos mitades *a* y *b* de horiciclo, que tengan común su único extremo M, dicha superficie queda dividida en dos partes, que se llaman *ángulos horisféricos;* y tienen por *vértice* el punto M, y por *lados* los dos medios horiciclos *a* y *b*. Un ángulo horisférico se denomina *llano*, si sus dos lados tienen dirección opuesta; *cóncavo*, si la prolongación opuesta de uno de sus lados cae fuera de su superficie; y *convexo*, si cae dentro. Todos los ángulos horisféricos llanos son iguales, porque pueden coincidir. El ángulo horisférico es una cantidad. Á todo ángulo horisférico NMP *corresponde* un diedro NAMP, que tiene por arista el radio MA que parte de su vértice, y por caras los hemiedros en que están sus lados MN y MP. Es fácil ver que un ángulo horisférico y su diedro son de la misma especie; es decir, ambos agudos, ambos rectos, ó ambos obtusos.

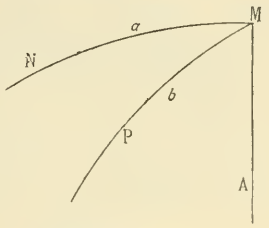


Fig. 149

A un ángulo horisférico NMD (fig. 150) corresponde también un ángulo rectilíneo N′MD′, bajo el cual se cortan sus lados, y es el que forman las tangentes MN′ y MD′ á estos lados en el punto M de intersección. El ángulo N′MD′, bajo el cual se cortan los lados de un ángulo horisférico NMD, es una sección recta de su diedro NAMD; porque las tangentes MN′ y MD′ á los lados del ángulo horisférico, son normales al radio MA (171), arista del diedro, y están situadas en las caras de éste.

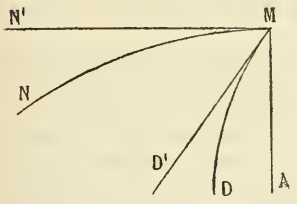


Fig. 150

193. (Fig. 151). *En la horirfera, si dos horiciclos* a *y* b *cortados por un tercero* c, *forman con éste, y á un mismo lado de él, dos ángulos internos* RNM *y* NMQ, *cuya suma es menor que un ángulo llano, los dos horiciclos* a *y* b *se cortarán, y el punto de intersección* P *estará al mismo lado del horiciclo secante en que se hallan dichos ángulos internos.*

Demostración.—Trácense los radios MA y NB de la horisfera, que par-

ten de los puntos M y N. Puesto que, por hipótesis, la suma de los dos ángulos horisféricos RNM y NMQ es menor que un llano, la suma de sus diedros correspondientes RBNM y NAMQ también será menor que un diedro llano; y por consiguiente (115), los planos NBR y MAQ se cortarán según una recta x paralela á la dirección MA, es decir, según un eje x de la horisfera. Esta recta corta á la superficie de la horisfera en un punto P (181); y es evidente que por este punto pasarán los dos horiciclos a y b. Luego estos dos horiciclos se cortan. Además, el punto P de intersección debe estar al mismo lado del horiciclo MN en que se hallan los dos ángulos internos NMQ y RNM, porque (115) á este mismo lado está la recta x que contiene aquel punto P.

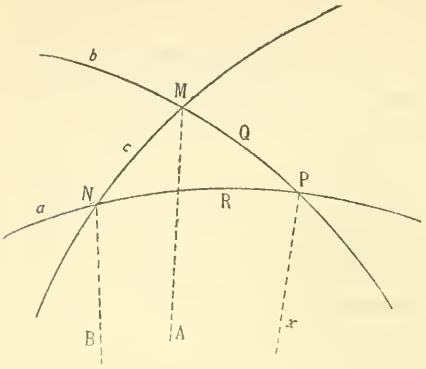


Fig. 151

194. I. Á toda figura plana, corresponde otra figura horisférica, que se obtiene sustituyendo en la primera el plano y sus rectas por la superficie horisférica y sus horiciclos. Prescindiendo del círculo, cuya correspondiente figura horisférica lleva el nombre de casquete, las otras denominaciones empleadas para las figuras planas, se aplican con análogo sentido á las figuras horisféricas. Según esto, sobre la horisfera habrá que considerar polígonos horisféricos, horiciclos paralelos, paralelógramos horisféricos, &.

II. *Las leyes de la Geometría euclídea, referentes á las figuras planas, se cumplen para las figuras horisféricas, con la sola restricción de que, en algunos casos, la igualdad de las figuras está sustituída por la simetría.*

Demostración.—El plano euclídeo y la superficie horisférica ofrecen las siguientes analogías: son superficies ilimitadas, y además, *uniformes*, es decir, pueden coincidir por resbalamiento consigo mismas, y esto de infinitas maneras, porque son de revolución alrededor de infinidad de ejes; dos puntos de un plano determinan una recta, que está situada en aquel plano, y dos puntos de una superficie horisférica determinan un horiciclo de dicha superficie; cada una de aquellas rectas puede coincidir por resbalamiento y por inversión consigo misma, y de igual propiedad goza cada uno de aquellos horiciclos; una recta de un plano divide á éste en dos partes, y lo mismo ocurre con el horiciclo en la superficie horisférica; en fin, la ley fundamental de la Geometría euclídea, conocida con el nombre de Postulado de Euclides, se cumple para la figura correspondiente de

la horisfera (193). Y puesto que los axiomas y postulados del plano euclídeo y sus rectas se cumplen para la superficie horisférica y sus horiciclos, las figuras trazadas en esta superficie tendrán las mismas propiedades que atribuye la Geometría euclídea á las figuras trazadas en el plano. Nótese, no obstante, que ciertas leyes referentes á la igualdad de las figuras planas, estarán sustituidas en la Geometría de la horisfera por otras referentes á la simetría; porque el plano puede coincidir por inversión consigo mismo, mientras que la superficie horisférica no goza de esta propiedad.

EJEMPLOS.—La suma de los tres ángulos de un triángulo horisférico vale dos rectos. Dos triángulos horisféricos, que tienen sus lados respectivamente iguales, son iguales ó simétricos. Si se toma por unidad de superficies el cuadrado horisférico que tiene su lado equivalente á la unidad de longitud, el área de un paralelógramo horisférico es igual al producto del número que mide su base por el número que mide su altura. Dos triángulos horisféricos, que tengan sus ángulos respectivamente iguales, tendrán sus lados proporcionales. *En el casquete horisférico, la razón de su circunferencia al duplo de su arco meridiano es un número constante, igual al número que en la Geometría euclídea se designa por la letra* π.

CAPÍTULO II

Trigonometría

I.—Las funciones circulares y el imaginarismo.

195. *Razonando sobre la horisfera, de igual modo que se razona en la Geometría euclídea sobre un plano, se pueden establecer la teoría de las funciones circulares y la del imaginarismo geométrico; las cuales son, por consiguiente, admisibles independientemente de la verdad ó falsedad del Postulado de Euclides.*

II.—Trigonometría de las figuras horisféricas.

196. *Las relaciones trigonométricas entre los elementos de una figura horisférica son las mismas que la Geometría euclídea atribuye á las correspondientes figuras planas (194-II).*

III.—Relaciones trigonométricas en el triángulo esférico rectángulo.

197. *Las fórmulas de la trigonometría esférica son las mismas en la Geometría hiperbólica que en la euclídea.*

Esto es lo que vamos á demostrar entre este artículo y el siguiente.

(Fig. 152). Sean AB un arco de horiciclo, AM y BN los radios que parten de sus extremos, y C la proyección normal del punto B sobre AM: llamaremos *ordenada del arco AB* á la distancia BC. Todo segmento rectilíneo BC puede

considerarse como ordenada de cierto arco de horiciclo: efectivamente, trazando CM normal á BC, BN paralelo á CM, y finalmente el horiciclo dirigido por B en el plano BCN, y que tenga por uno de sus radios al rayo BN, este horiciclo cortará (164) á la recta CM en un punto A; y el arco AB tendrá BC por ordenada.

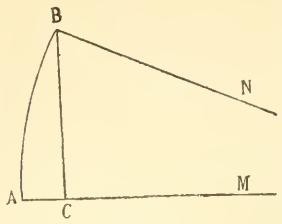


Fig. 152

198.—Lema.—*En todo triángulo rectángulo, el seno de un ángulo agudo es igual á la razón entre los dos arcos horiciclares, cuyas respectivas ordenadas son el cateto opuesto y la hipotenusa.*

Demostración.—(Fig. 153).—Sea el triángulo ABC, rectángulo en A. Trácese, por B, la normal BN al plano del triángulo; y, por los otros vértices, A y C, diríjanse los rayos AM, CP paralelos al BN. La superficie de la esfera límite, que pasa por C, y tiene el rayo rectilíneo CP por radio, está cortada por las tres paralelas auxiliares en tres puntos C, A′, B′, que determinan un triángulo A′B′C de la esfera límite, formado por arcos de horiciclo. De esta construcción, resulta que el plano ABC es normal al ABN, por serlo á una recta BN de este plano; luego la recta CA, situada en uno de estos dos planos (el ABC), y normal por hipótesis, á su intersección AB, debe ser normal al otro plano ABN; y también á la recta AM de este otro. Infiérese de esto, que el plano ABM es normal al ACM, por serlo á una recta AC de este último. Además, el ángulo rectilíneo ABC y el curvilíneo A′B′C son iguales, por que el primero es una sección recta del diedro BN, y las tangentes en B′ á los arcos B′A′ y B′C forman otra sección recta. En cuanto al ángulo curvilíneo CA′B′ es recto, por serlo su diedro correspondiente AM. Resulta, pues, que, entre los elementos de un triángulo rectilíneo ABC y los del curvilíneo A′B′C existen las relaciones siguientes:

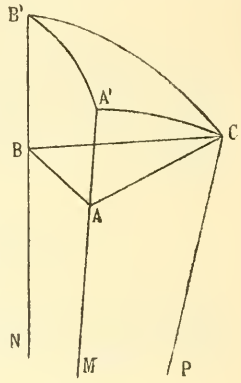


Fig. 153

$$\text{áng. A} = \text{áng. A}' = 90°, \qquad \text{áng. B} = \text{áng. B}',$$

$$AC = \text{ordenada del arco A}'C,$$

$$BC = \text{ordenada del arco B}'C.$$

Con estos antecedentes, pasemos á demostrar la proposición. Sabemos (196) que la Trigonometría euclídea es aplicable al triángulo A'B'C de la esfera límite; y, por consiguiente, tendremos

$$\text{sen } B' = \frac{A'C}{B'C}; \quad \text{pero} \quad B = B'; \quad \text{luego} \quad \text{sen } B = \frac{A'C}{B'C}.$$

Esta última igualdal es la que se quería demostrar, puesto que A'C y B'C son los arcos del horiciclo, cuyas respectivas ordenadas son el cateto AC y la hipotenusa BC.

199.—Los lados del triángulo ABC los designaremos respectivamente por *a, b, c;* y los ángulos opuestos á estos lados, por A, B, C. En el triángulo rectángulo, A designará el ángulo recto.

Entre los elementos del triángulo esférico ABC, rectángulo en A, se verifican las relaciones siguientes:

I. $$\cos a = \cos b \cos c,$$

II. $$\text{sen } B = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } a}, \qquad \text{sen } C = \frac{\text{sen } c}{\text{sen } a},$$

III. $$\cos B = \frac{\text{tang } c}{\text{tang } a}, \qquad \cos C = \frac{\text{tang } b}{\text{tang } a},$$

IV. $$\text{tang } B = \frac{\text{tang } b}{\text{sen } c}, \qquad \text{tang } C = \frac{\text{tang } c}{\text{sen } b},$$

V. $$\cos a = \cot B \cot C,$$

VI. $$\cos b = \frac{\cos B}{\text{sen } C}, \qquad \cos c = \frac{\cos C}{\text{sen } B}.$$

Demostración de las fórmulas II.—(Fig. 154).—Sea el triángulo esférico ABC, rectángulo en A, O su centro, A' la proyección normal de C sobre OA, y B' la proyección normal de A' sobre OB. Como el diedro OA es recto, la normal CA' á su arista, trazada en la cara AOC, es normal á la otra cara AOB, y también á la recta A'B' de esta cara. Además, de esta construcción, resulta CB' normal á OB. En resumen, en el triángulo rectilíneo A'B'C es recto el ángulo CA'B'; y el ángulo B' es una sección recta del diedro OB (ó de su suplemento); y, por consiguiente, dicho ángulo B' y el B del triángulo esférico son iguales ó suplementarios, y tienen el mismo seno. Pues bien, si los arcos de

horiciclo, cuyas ordenadas son OC, A'C, B'C, los designamos respectivamente por la notación (OC), (A'C), (B'C), y aplicamos el lema anterior á los tres triángulos A'B'C, OB'C OA'C, tendremos:

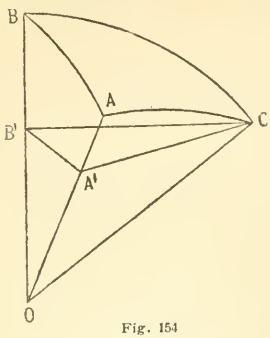


Fig. 154

$$\text{sen B} = \text{sen B}' = \frac{(A'C)}{(B'C)} = \frac{(OC)\ \text{sen}\ b}{(OC)\ \text{sen}\ a} = \frac{\text{sen}\ b}{\text{sen}\ a};$$

luego sen B = sen b sen a, que es la primera de las relaciones II; y de ella se deduce la segunda, cambiando las bes por ces.

Demostración de las fórmulas I y VI. (Fig.s 155, 156 y 157.--La circunferencia polar del vértice B, corta á los tres lados BC, CA y AB del triángulo esférico ABC (prolongados, si es necesario) en tres puntos, que designamos respectivamente por P, Q y R. Por ser B el polo de la circunferencia PR, y Q el polo de la AR (87), serán cuadrantes los arcos BP, BR, QA y QR (88), recto el ángulo QPB (87), y además (en amplitud) es áng. Q = AR, áng. B = RP (89). Se tiene también

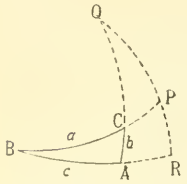


Fig. 155

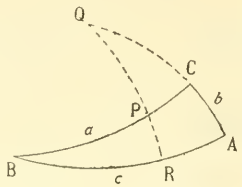


Fig. 156

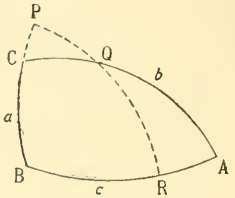


Fig. 157

$$QP = QR - PR = 90^\circ - B \quad \text{ó} \quad QP = PR - QR = B - 90^\circ;$$

$$QC = QA - CA = 90^\circ - b \quad \text{ó} \quad QC = CA - QA = b - 90^\circ;$$

$$CP = BP - BC = 90^\circ - a \quad \text{ó} \quad CP = BC - BP = a - 90^\circ;$$

$$Q = AR = BR - BA = 90^\circ - c \quad \text{ó} \quad Q = AR = AB - RB = c - 90^\circ;$$

luego

$$\text{sen}\ QP = \pm\cos B, \quad \text{sen}\ QC = \pm\cos b, \quad \text{sen}\ CP = \pm\cos a, \quad \text{sen}\ Q = \pm\cos c.$$

Teniendo presentes estas relaciones, si aplicamos al triángulo esférico PQC, rectángulo en P, las fórmulas II (ya demostradas) hallaremos (tras fácil discusión sobre los signos)

$$\operatorname{sen} Q = \frac{\operatorname{sen} CP}{\operatorname{sen} QC}, \qquad \text{ó} \qquad \cos c = \frac{\cos a}{\cos b};$$

$$\operatorname{sen} C = \frac{\operatorname{sen} QP}{\operatorname{sen} QC} = \frac{\cos B}{\cos b}, \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen} C = \frac{\cos B}{\cos b};$$

luego $\cos a = \cos b \cos c$, $\cos b = \dfrac{\cos B}{\operatorname{sen} C}$, que son las formulas I y VI-1.ª Por igual procedimiento, ó cambiando las bes con las ces, resulta la VI-2.ª

Demostración de las otras fórmulas.—De las ecuaciones I, II-2.ª y VI (ya establecidas) se deduce

$$\cos B = \cos b \operatorname{sen} C = \frac{\cos a}{\cos c} \cdot \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} c}{\cos c} : \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} = \frac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{tang} a};$$

luego $\cos B = \operatorname{tang} c : \operatorname{tang} a$, que es la ecuación III-1.ª; y cambiando en ella mutuamente las bes por ces, resulta la III-2.ª

Dividiendo ordenadamente las ecuaciones

$$\operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a}, \qquad \cos B = \cos b \operatorname{sen} C,$$

ya demostradas, y teniendo presente que $\operatorname{sen} a \operatorname{sen} C = \operatorname{sen} c$, se halla

$$\operatorname{tang} B = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a \cos b \operatorname{sen} C} = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} C} = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{sen} c};$$

luego $\operatorname{tang} B = \operatorname{tang} b : \operatorname{sen} c$, que es la ecuación IV-1.ª; y de ella se deduce la IV-2.ª por la simple permutación de letras.

Finalmente, multiplicando ordenadamente las ecuaciones VI, y observando que $\cos b \cos c = \cos a$, resulta la ecuación V.

IV.—Relaciones trigonométricas en un triángulo esférico cualquiera.

200. I.—*Relaciones entre dos lados y los dos ángulos opuestos:*

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B}, \qquad \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}, \qquad \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}.$$

II.—*Relaciones entre dos lados, el ángulo comprendido y el opuesto á uno de aquellos:*

$$\cot a \operatorname{sen} b = \cos b \cos C + \operatorname{sen} C \cot A,$$

$$\cot b \operatorname{sen} c = \cos c \cos A + \operatorname{sen} A \cot B,$$

$$\cot c \operatorname{sen} a = \cos a \cos B + \operatorname{sen} B \cot C,$$

$$\cot a \operatorname{sen} c = \cos c \cos B + \operatorname{sen} B \cot A,$$

$$\cot b \operatorname{sen} a = \cos a \cos C + \operatorname{sen} C \cot B,$$

$$\cot c \operatorname{sen} b = \cos b \cos A + \operatorname{sen} A \cot C,$$

III.—*Relaciones entre un ángulo y los tres lados:*

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A,$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos B,$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C.$$

IV.—*Relaciones entre un lado y los tres ángulos:*

$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a,$$

$$\cos B = -\cos A \cos C + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C \cos b,$$

$$\cos C = -\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos c.$$

Demostración.—Basta instituir la primera fórmula de cada grupo, pues de ellas se deducirán todas las otras, por la simple permutación de letras. Además, podemos suponer que el ángulo A es oblicuo, porque, si fuera recto, dichas primeras fórmulas se reducirían á las II-1.ª, III-2.ª, I y V del párrafo 199, que ya se establecieron para los triángulos rectángulos. En suma, sólo tendremos que demostrar las relaciones

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B},$$

$$\cot a \operatorname{sen} b = \cos b \cos C + \operatorname{sen} C \cot A,$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A,$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a;$$

y esto en la hipótesis de que el ángulo A es oblicuo.

La altura CH del triángulo ABC (Fig.s 158, 159, 160 y 161) origina dos triángulos rectángulos HCA, HCB, pues aunque el ángulo B sea recto (fig. 160)

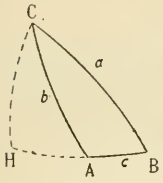


Fig. 158

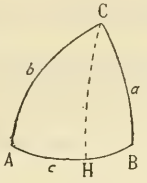


Fig. 159

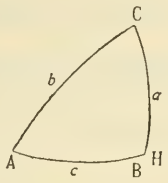


Fig. 160

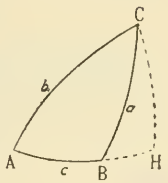


Fig. 161

puede considerarse HCB como un triángulo rectángulo en el cual son nulos el cateto HB y su ángulo opuesto. Esto advertido, he aquí como se demuestran las cuatro fórmulas últimamente enunciadas.

1.° Los triángulos esféricos rectángulos HCB y HCA proporcionan (199-II) las relaciones

$$\operatorname{sen} CH = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B, \qquad \operatorname{sen} CH = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A,$$

de las cuales se deduce, sucesivamente,

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A, \qquad \operatorname{sen} a : \operatorname{sen} A = \operatorname{sen} b : \operatorname{sen} B.$$

2.° De los mismos triángulos rectángulos HCB, HCA, se saca (199-III)

$$\cot a = \cot CH \cos HCB, \qquad \cot CH = \frac{\cot b}{\cos HCA};$$

luego

$$\cot a = \cot b \frac{\cos HCB}{\cos HCA}, \qquad \cot a \operatorname{sen} b = \cos b \frac{\cos HCB}{\cos HCA}.$$

Si A es obtuso (fig. 158), será $HCB = C + HCA$, $\cos HCB = \cos (C + HCA)$, y

$$\cos HCB = \cos C \cos HCA - \operatorname{sen} C \operatorname{sen} HCA;$$

luego

$$\cot a \operatorname{sen} b = \cos b \cos C - \cos b \operatorname{sen} C \operatorname{tang} HCA.$$

Y, haciendo en esta igualdad la sustitución

$$\text{tang HCA} = \frac{-\cot A}{\cos b},$$

que (199-V) se saca del triángulo esférico HCA, cuyo ángulo en A vale 180°—A, resulta

$$\cot a \operatorname{sen} b = \cos b \cos C + \operatorname{sen} C \cot A.$$

Pero, si A es agudo (fig.s 159, 160 y 161), será HCB = C — HCA (fig.s 158 y 159) ó HCB = HCA — C (fig. 160), y en ambos casos,

$$\cos \text{HCB} = \cos C \cos \text{HCA} + \operatorname{sen} C \operatorname{sen} \text{HCA};$$

luego

$$\cot a \operatorname{sen} b = \cos b \cos C + \cos b \operatorname{sen} C \text{ tang HCA}.$$

Sustituyendo, en esta ecuación, tang HCA por el segundo miembro de la igualdad

$$\text{tang HCA} = \frac{\cot A}{\cos b},$$

que (199-V) ofrece el triángulo HCA (cuyo ángulo en A es el A del triángulo dado) se halla, como antes,

$$\cot a \operatorname{sen} b = \cos b \cos C + \operatorname{sen} C \cot A.$$

Luego esta fórmula es verdadera en todos los casos.

3.° Los consabidos triángulos rectángulos HCB, HCA dan (199-I)

$$\cos a = \cos \text{CH} \cos \text{BH}, \qquad \cos \text{CH} = \frac{\cos b}{\cos \text{AH}};$$

luego

$$\cos a = \cos b \frac{\cos \text{BH}}{\cos \text{AH}}.$$

Si A es obtuso (fig. 158), será BH = c + AH; y cos BH = cos (c + AH). Pero si A no es obtuso, en cuyo caso puede ser recto (caso que ya hemos dicho es innecesario considerar) ó agudo, será BH = c — AH (fig. 159) ó BH = AH — c,

(fig. 161) y, en ambos casos, tendremos $\cos BH = \cos (c - AH)$. En definitiva, $\cos BH = \cos (c \pm AH)$,

$$\cos BH = \cos c \cos AH \mp \operatorname{sen} c \operatorname{sen} AH;$$

y sustituyendo este desarrollo de BH en la última expresión encontrada para $\cos a$, se halla

$$\cos a = \cos b \cos c \mp \cos b \operatorname{sen} c \operatorname{tang} AH.$$

En esta fórmula debe tomarse el signo *menos*, si el ángulo A es obtuso; y el signo *más*, si es agudo.

En el primer caso (fig. 158), el triángulo rectángulo HAC, con el ángulo $HAC = 180^\circ - A$, proporciona la relación

$$\operatorname{tang} AH = -\operatorname{tang} b \cos A.$$

En el segundo caso (fig.s 159, 160 y 161), del mismo triángulo HAC con el ángulo $HAC = A$, se saca (199-III)

$$\operatorname{tang} AH = \operatorname{tang} b \cos A.$$

Luego, en ambos casos, es

$$\cos a = \cos b \cos c + \cos b \operatorname{sen} c \operatorname{tang} b \cos A;$$

y reemplazando, en esta ecuación, el producto $\cos b \operatorname{tang} b$ por su igual $\operatorname{sen} b$, resulta finalmente

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A.$$

4.° Aplicando esta fórmula al triángulo polar del ABC, se obtiene inmediatamente

$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a.$$

OBSERVACIÓN.—Puesto que las ecuaciones fundamentales entre los elementos del triángulo esférico son las mismas en la Geometría vulgar que en la hiperbólica, lo mismo ocurrirá con todas las demás fórmulas de la Trigonometría esférica, en atención á que estas fórmulas pueden ser deducidas de aquéllas, mediante cálculos, que serán idénticos en ambas geometrías.

V.—Las funciones hiperbólicas.

201.—Estas funciones juegan un papel importante en la Trigonometría no euclídea hiperbólica de los triángulos rectilíneos, por cuyo motivo vamos á estudiarlas, aunque muy brevemente, en este artículo.

Dichas funciones son el *seno hiperbólico, coseno hiperbólico, etc.;* es decir, que se llaman de igual modo que las funciones circulares; mas, para distinguirlas de éstas, llevan además el calificativo de *hiperbólicas*. Su notación y definición analítica es la que expresan las igualdades

$$\text{sh } z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \text{ch } z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \text{th } z = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1},$$

$$\text{cosec h } z = \frac{2}{e^z - e^{-z}}, \qquad \text{sec h } z = \frac{2}{e^z + e^{-z}}, \qquad \text{cot h } z = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1},$$

cuyos primeros miembros se leen respectivamente «seno hiperbólico de z», «coseno hiperbólico de z», &. La variable independiente z puede recibir valores cualesquiera reales ó imaginarios, y lleva el nombre de *arco;* pero téngase presente que, á pesar de tal denominación, es un número abstracto, pues, entrando como exponente de una potencia, no puede ser concreto.

Las inversas de las seis funciones que estamos considerando, se llaman también funciones hiperbólicas; pero llevan además el calificativo de *inversas*, para distinguirlas de las anteriores, las cuales, á su vez, reciben la denominación de *directas*. En las funciones hiperbólicas directas, la variable independiente es el arco; mientras que en las inversas lo es el seno hiperbólico, ó el coseno hiperbólico, &. Estas funciones inversas, cuando la variable independiente es y, se designan por las notaciones

$$\text{arc sh } y, \qquad \text{arc ch } y, \qquad \text{arc th } y,$$

$$\text{arc cosec h } y, \qquad \text{arc sec h } y, \qquad \text{arc cot h } y,$$

que se leen respectivamente «arco cuyo seno hiperbólico es y», «arco cuyo coseno hiperbólico es y», &.

202.—*Entre las funciones hiperbólicas de un mismo arco* a, *se verifican las relaciones siguientes:*

$$\text{cosec h } a = \frac{1}{\text{sh } a}, \qquad \text{sec h } a = \frac{1}{\text{ch } a}, \qquad \text{cot h } a = \frac{1}{\text{th } a},$$

$$\operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a = e^{a}, \qquad \operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a = e^{-a},$$

$$\operatorname{ch}^2 a - \operatorname{sh}^2 a = 1,$$

$$\operatorname{th} a = \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a}, \qquad \operatorname{cot\,h} a = \frac{\operatorname{ch} a}{\operatorname{sh} a},$$

Demostración.—Las tres primeras fórmulas se desprenden inmediatamente de la definición de las funciones hiperbólicas; la cuarta y quinta resultan de sumar y restar ordenadamente las igualdades

$$\operatorname{ch} a = \frac{e^{a} + e^{-a}}{2}, \qquad \operatorname{sh} a = \frac{e^{a} - e^{-a}}{2};$$

la sexta se obtiene multiplicando ordenadamente la cuarta y quinta; y las dos últimas se establecen de este modo:

$$\operatorname{th} a = \frac{e^{2a} - 1}{e^{2a} + 1} = \frac{\frac{1}{2} e^{-a} \left(e^{2a} - 1 \right)}{\frac{1}{2} e^{-a} \left(e^{2a} + 1 \right)} = \frac{\frac{1}{2} \left(e^{a} - e^{-a} \right)}{\frac{1}{2} \left(e^{a} + e^{-a} \right)} = \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a};$$

$$\operatorname{cot\,h} a = 1 : \operatorname{th} a = 1 : \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a} = \frac{\operatorname{ch} a}{\operatorname{sh} a}.$$

203.—I. *Las funciones hiperbólicas directas son periódicas: el período es* $2\pi i$ *para el seno, coseno, cosecante y secante, y* πi *para la tangente y cotangente.*

En efecto: sh z, ch z, cosec h z, sec h z son funciones de e^{z} y e^{-z}; y como estas exponenciales no varían, cuando z aumenta ó disminuye en un múltiplo de $2\pi i$, tampoco varían dichas funciones. Además, e^{2z} y e^{-2z} no se alteran, si á z se agrega ó sustrae un múltiplo de πi; luego tampoco se alteran th z y cot h z, que son funciones de e^{2z} y e^{-2z}.

II.—*Si al arco se le cambia el signo, el coseno hiperbólico permanece invariable; pero el seno, tangente y cotangente hiperbólicos se cambian en los respectivamente opuestos. Es lo que expresan las fórmulas*

$$\operatorname{sh} (-a) = -\operatorname{sh} a, \qquad \operatorname{ch} (-a) = \operatorname{ch} a,$$

$$\operatorname{th} (-a) = -\operatorname{th} a, \qquad \operatorname{cot\,h} (-a) = -\operatorname{cot\,h} a.$$

Porque, si en las igualdades que sirven para definir las funciones hiperbólicas del arco a, se cambia a por $-a$, no sufre alteración el coseno; mientras que el seno, tangente y cotangente no hacen más que cambiar de signo.

III.—*Si el arco* a *se cambia por* $\pi i - a$, *no se altera el seno hiperbólico; pero el coseno, tangente y cotangente hiperbólicos adquieren los respectivos valores opuestos. Así,*

$$\operatorname{sh}(\pi i - a) = \operatorname{sh} a, \qquad \operatorname{ch}(\pi i - a) = -\operatorname{ch} a,$$

$$\operatorname{th}(\pi i - a) = -\operatorname{th} a, \qquad \operatorname{cot h}(\pi i - a) = -\operatorname{cot h} a.$$

Demostración.—Teniendo presente que $e^{\pi i} = -1$, y $e^{-\pi i} = -1$, y que por consiguiente,

$$e^{\pi i - a} = -e^{-a}, \qquad e^{-\pi i + a} = -e^{a},$$

efectuaremos las siguientes deducciones:

$$\operatorname{sh}(\pi i - a) = \tfrac{1}{2}\left(e^{\pi i - a} - e^{-\pi i + a}\right) = \tfrac{1}{2}\left(-e^{-a} + e^{a}\right) = \operatorname{sh} a,$$

$$\operatorname{ch}(\pi i - a) = \tfrac{1}{2}\left(e^{\pi i - a} + e^{-\pi i + a}\right) = \tfrac{1}{2}\left(-e^{-a} - e^{a}\right) = -\operatorname{ch} a,$$

que demuestran las dos primeras fórmulas del enunciado. Las otras dos pueden establecerse directamente por igual procedimiento; y también de este otro modo:

$$\operatorname{th}(\pi i - a) = \frac{\operatorname{sh}(\pi i - a)}{(\operatorname{ch} \pi i - a)} = \frac{\operatorname{sh} a}{-\operatorname{ch} a} = -\operatorname{th} a,$$

$$\operatorname{cot h}(\pi i - a) = \frac{\operatorname{ch}(\pi i - a)}{\operatorname{sh}(\pi i - a)} = \frac{-\operatorname{ch} a}{\operatorname{sh} a} = -\operatorname{cot h} a,$$

IV.—*Si un arco aumenta ó disminuye en* πi, *la tangente y cotangente hiperbólicas no varían; pero el seno y coseno hiperbólicos adquieren los respectivos valores opuestos. Es decir, que*

$$\operatorname{sh}(a \pm \pi i) = -\operatorname{sh} a, \qquad \operatorname{ch}(a \pm \pi i) = -\operatorname{ch} a,$$

$$\operatorname{th}(a \pm \pi i) = \operatorname{th} a, \qquad \operatorname{cot h}(a \pm \pi i) = \operatorname{cot h} a.$$

DEMOSTRACIÓN.—La tangente y cotangente hiperbólicas son funciones periódicas, cuyo período es πi (I); y por lo tanto no varían, cuando su arco aumenta ó disminuye en el período πi. Las dos últimas fórmulas ya están pues, demostradas; y sólo falta establecer las dos primeras. Para conseguirlo, teniendo presente que $e^{\pm \pi i} = -1$, y que por lo tanto,

$$e^{a \pm \pi i} = -e^{a}, \qquad e^{-a \mp \pi i} = -e^{-a},$$

efectuaremos las siguientes deducciones:

$$\text{sh}\,(a \pm \pi i) = \tfrac{1}{2}\left(e^{a \pm \pi i} - e^{-a \mp \pi i}\right) = -\tfrac{1}{2}\left(e^{a} - e^{-a}\right) = -\,\text{sh}\,a,$$

$$\text{ch}\,(a \pm \pi i) = \tfrac{1}{2}\left(e^{a \pm \pi i} + e^{-a \mp \pi i}\right) = -\tfrac{1}{2}\left(e^{a} + e^{-a}\right) = -\,\text{ch}\,a.$$

V.—*Entre las funciones hiperbólicas de los arcos* a *y* $\frac{1}{2}\pi i - a$ *(que suman un cuadrante imaginario* $\frac{1}{2}\pi i$*) existen las relaciones siguientes:*

$$\text{sh}\left(\frac{\pi i}{2} - a\right) = i\,\text{ch}\,a, \qquad \text{ch}\left(\frac{\pi i}{2} - a\right) = -i\,\text{sh}\,a,$$

$$\text{th}\left(\frac{\pi i}{2} - a\right) = -\,\text{cot h}\,a, \qquad \text{cot h}\left(\frac{\pi i}{2} - a\right) = -\,\text{th}\,a.$$

DEMOSTRACIÓN.—Por ser $e^{\frac{1}{2}\pi i} = i$, $e^{-\frac{1}{2}\pi i} = -i$, tendremos:

$$\text{sh}\left(\tfrac{1}{2}\pi i - a\right) = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}\pi i - a} - e^{-\frac{1}{2}\pi i + a}\right) = \tfrac{1}{2}\left(ie^{-a} + ie^{a}\right) = i\,\text{ch}\,a;$$

luego $\text{sh}\left(\frac{1}{2}\pi i - a\right) = i\,\text{ch}\,a$, que es la primera fórmula del enunciado. Cambiando en ésta, a por $\frac{1}{2}\pi i - a$, y multiplicando sus dos miembros por $-i$, resulta la segunda. Ahora, fundándonos en las dos ya demostradas, estableceremos las dos últimas, del modo siguiente:

$$\text{th}\left(\tfrac{1}{2}\pi i - a\right) = \frac{\text{sh}\left(\frac{1}{2}\pi i - a\right)}{\text{ch}\left(\frac{1}{2}\pi i - a\right)} = \frac{i\,\text{ch}\,a}{-i\,\text{sh}\,a} = -\,\text{cot h}\,a,$$

$$\cot h\left(\tfrac{1}{2}\pi i - a\right) = \frac{1}{\operatorname{th}\left(\tfrac{1}{2}\pi i - a\right)} = \frac{1}{-\cot h\, a} = -\operatorname{th} a.$$

204.—*Si z crece desde* $-\infty$ *hasta* 0, *y después desde* 0 *hasta* $+\infty$, *el seno, coseno, tangente y cotangente hiperbólicos varían del modo siguiente:*

1.° *El seno crece primero desde* $-\infty$ *hasta* 0, *y después desde* 0 *hasta* $+\infty$;

2.° *El coseno mengua primero desde* $+\infty$ *hasta* $+1$, *y después crece desde* $+1$ *hasta* $+\infty$;

3.° *La tangente crece al principio desde* -1 *hasta* 0, *y luego desde* 0 *hasta* $+1$;

4.° *La cotangente mengua primero desde* -1 *hasta* $-\infty$, *y después desde* $+\infty$ *hasta* $+1$.

Demostración.—1.° Si z crece, también crece $\frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$, ó sea el seno hiperbólico de z, porque en aquella semi-diferencia crece el minuendo y mengua el sustraendo. Además, se tienen los valores límites $\operatorname{sh}(-\infty) = -\infty$, $\operatorname{sh} 0 = 0$, $\operatorname{sh}(+\infty) = +\infty$.

2.° La expresión $\frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$, ó sea $\operatorname{ch} z$, es positiva para todos los valores reales de z. Si, permaneciendo real, crece el valor absoluto de z, crece también $\operatorname{sh}^2 z$ (según hemos demostrado antes); luego lo mismo ocurre á $\operatorname{ch}^2 z$, en atención (202) á que $\operatorname{ch}^2 z = \operatorname{sh}^2 z + 1$. Y puesto que $\operatorname{ch} z$ es positivo, y su cuadrado crece con el valor absoluto de z, también crecerá $\operatorname{ch} z$. Se tienen, además, los valores límites siguientes: $\operatorname{ch}(-\infty) = +\infty$, $\operatorname{ch} 0 = 1$, $\operatorname{ch}(+\infty) = +\infty$.

3.° y 4.° Escribiendo las expresiones

$$\operatorname{th} z = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}, \qquad \cot h\, z = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1},$$

bajo la forma

$$\operatorname{th} z = 1 - \frac{2}{e^{2z} + 1}, \qquad \cot h\, z = 1 + \frac{2}{e^{2z} - 1},$$

se ve claramente que, cuando z crece, primero desde $-\infty$ hasta 0, y después desde 0 hasta $+\infty$, la tangente hiperbólica crece primero desde -1 hasta 0, y después desde 0 hasta $+1$; y que la cotangente mengua al principio desde -1 hasta $-\infty$, salta después al valor $+\infty$, y continúa después menguando desde $+\infty$ hasta $+1$. Claro está que se tienen los valores límites siguientes:

$$\operatorname{th}(-\infty) = -1, \qquad \operatorname{th} 0 = 0, \qquad \operatorname{th}(+\infty) = +1,$$

$$\cot h(-\infty) = -1, \qquad \cot h\, 0 = \pm\infty, \qquad \cot h(+\infty) = +1.$$

205.—*Cualesquiera que sean los números* a *y* b, *se tienen las fórmulas*

$$(\operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a)\ (\operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b) = \operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{sh}(a+b),$$

$$(\operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a)\ (\operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b) = \operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{sh}(a+b),$$

que se obtienen (202) haciendo en las igualdades

$$e^a e^b = e^{a+b}, \qquad e^{-a} e^{-b} = e^{-(a+b)},$$

las sustituciones

$$e^a = \operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a, \qquad e^{-a} = \operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a,$$

$$e^b = \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b, \qquad e^{-b} = \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b.$$

$$e^{a+b} = \operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{sh}(a+b), \qquad e^{-(a+b)} = \operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{sh}(a-b).$$

206.—*Entre las funciones hiperbólicas de* $a \pm b$, a *y* b, *existen las relaciones*

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b,$$

$$\operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b,$$

$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b,$$

$$\operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b,$$

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}, \qquad \operatorname{th}(a-b) = \frac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b}.$$

Demostración.—Sumando y restando ordenadamente las igualdades

$$\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{sh}(a+b) = (\operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a)\ (\operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b),$$

$$\operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{sh}(a+b) = (\operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a)\ (\operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b),$$

instituídas en el párrafo 205, se obtienen, tras fáciles transformaciones, la 1.ª y 3.ª de las fórmulas que deseábamos demostrar. Cambiando, en éstas, b por $-b$, con lo cual, en los segundos miembros, solo cambiarán de signo los términos en que

entre sh b (203-II), resultan la 2.ª y 4.ª. Y por fin, fundándose en las cuatro ya demostradas, se establecen la 5.ª y 6.ª de esta manera:

$$\text{th}\ (a \pm b) = \frac{\text{sh}\ (a \pm b)}{\text{ch}\ (a \pm b)} = \frac{\text{sh}\ a\ \text{ch}\ b \pm \text{ch}\ a\ \text{sh}\ b}{\text{ch}\ a\ \text{ch}\ b \pm \text{sh}\ a\ \text{sh}\ b};$$

y dividiendo los dos términos de la última fracción por ch a ch b, se halla sucesivamente

$$\text{th}\ (a \pm b) = \frac{\frac{\text{sh}\ a}{\text{ch}\ a} \pm \frac{\text{sh}\ b}{\text{ch}\ b}}{1 \pm \frac{\text{sh}\ a}{\text{ch}\ a}\frac{\text{sh}\ b}{\text{ch}\ b}} = \frac{\text{th}\ a \pm \text{th}\ b}{1 \pm \text{th}\ a\ \text{th}\ b}.$$

207.—I. Por adición y sustracción de las cuatro primeras fórmulas, que acabamos de instituir, se deduce

$$\text{ch}\ (a+b) + \text{ch}\ (a-b) = 2\ \text{ch}\ a\ \text{ch}\ b,$$

$$\text{ch}\ (a+b) - \text{ch}\ (a-b) = 2\ \text{sh}\ a\ \text{sh}\ b,$$

$$\text{sh}\ (a+b) + \text{sh}\ (a-b) = 2\ \text{sh}\ a\ \text{ch}\ b,$$

$$\text{sh}\ (a+b) - \text{sh}\ (a-b) = 2\ \text{ch}\ a\ \text{sh}\ b;$$

y poniendo en ellas $a+b=x$ y $a-b=y$, en cuyo caso será $a=\frac{1}{2}(x+y)$, $b=\frac{1}{2}(x-y)$, resultan estas otras, que sirven para *transformar en un producto la suma ó diferencia de dos senos hiperbólicos ó de dos cosenos hiperbólicos:*

$$\text{ch}\ x + \text{ch}\ y = 2\ \text{ch}\ \tfrac{1}{2}(x+y)\ \text{ch}\ \tfrac{1}{2}(x-y)$$

$$\text{ch}\ x - \text{ch}\ y = 2\ \text{sh}\ \tfrac{1}{2}(x+y)\ \text{sh}\ \tfrac{1}{2}(x-y)$$

$$\text{sh}\ x + \text{sh}\ y = 2\ \text{sh}\ \tfrac{1}{2}(x+y)\ \text{ch}\ \tfrac{1}{2}(x-y)$$

$$\text{sh}\ x - \text{sh}\ y = 2\ \text{ch}\ \tfrac{1}{2}(x+y)\ \text{sh}\ \tfrac{1}{2}(x-y)$$

II. La suma y diferencia de dos tangentes hiperbólicas ó de dos cotangen-

tes hiperbólicas, se transforma también en un producto, como manifiesta el siguiente ejemplo:

$$\text{th } x \pm \text{th } y = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} \pm \frac{\text{sh } y}{\text{ch } y} =$$

$$\frac{\text{sh } x \text{ ch } y \pm \text{ch } x \text{ sh } y}{\text{ch } x \text{ ch } y} = \frac{\text{sh } (x \pm y)}{\text{ch } x \text{ ch } y}.$$

III. Dividiendo ordenadamente cada dos de las ecuaciones I, se obtienen diversas fórmulas, entre las cuales conviene recordar la siguiente:

$$\frac{\text{sh } x + \text{sh } y}{\text{sh } x - \text{sh } y} = \frac{\text{th } \frac{1}{2}(x+y)}{\text{th } \frac{1}{2}(x-y)}.$$

208.—I. *Conociendo el seno y el coseno hiperbólicos de un arco, calcular el seno y coseno hiperbólicos del arco duplo.*

Poniendo a en vez de b en la 1.ª y 3.ª de las fórmulas establecidas en el párrafo 206, resultan estas otras, que resuelven el problema:

$$\text{sh } 2a = 2 \text{ sh } a \text{ ch } a, \qquad \text{ch } 2a = \text{ch}^2 a + \text{sh}^2 a.$$

II. *Dada la tangente hiperbólica de un arco, hallar la tangente hiperbólica del duplo de dicho arco.*

Hágase $b = a$ en la 5.ª fórmula del párrafo 206, y resultará la que se pide, á saber:

$$\text{th } 2a = \frac{2 \text{ th } a}{1 + \text{th}^2 a}.$$

209.—*Conociendo el coseno hiperbólico de* a, *calcular las funciones hiperbólicas seno, coseno y tangente de* $\frac{1}{2}$ a.

Resolución.—Aplicando al arco $\frac{1}{2} a$ las igualdades

$$\text{ch}^2 a + \text{sh}^2 a = \text{ch } 2a, \qquad \text{ch}^2 a - \text{sh}^2 a = 1,$$

demostradas en los párrafos 208-I y 202, se tiene:

$$\text{ch}^2 \tfrac{1}{2} a + \text{sh}^2 \tfrac{1}{2} a = \text{ch } a, \qquad \text{ch}^2 \tfrac{1}{2} a - \text{sh}^2 \tfrac{1}{2} a = 1.$$

Restando y sumando ordenadamente estas dos igualdades, partiendo por 2 las que resultan, y extrayendo en ellas la raíz cuadrada de los dos miembros, se hallan las expresiones de $\operatorname{sh}\frac{1}{2}a$ y $\operatorname{ch}\frac{1}{2}a$, las cuales, divididas ordenadamente, dan la expresión de $\operatorname{th}\frac{1}{2}a$. Las fórmulas que resultan, son estas:

$$\operatorname{sh}\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\operatorname{ch}a-1}{2}},\qquad \operatorname{ch}\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\operatorname{ch}a+1}{2}},$$

$$\operatorname{th}\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\operatorname{ch}a-1}{\operatorname{ch}a+1}}.$$

Obsérvese que, en cada una, el segundo miembro tiene dos valores iguales y opuestos; y así debe ser. Efectivamente, como el arco a está definido por su coseno hiperbólico, es indeterminado. Si designamos por k nn número entero positivo ó negativo, y por a un arco cuyo coseno hiperbólico sea igual al dado, la expresión general del arco a será $2k\pi i\pm\alpha$; y la de su mitad será, por consiguiente $k\pi i\pm\frac{1}{2}\alpha$; pero como los senos hiperbólicos de esta infinidad de arcos son iguales ú opuestos, y lo mismo puede afirmarse de sus cosenos y tangentes hiperbólicos, se infiere que cada una de las expresiones $\operatorname{sh}\frac{1}{2}a$, $\operatorname{ch}\frac{1}{2}a$, $\operatorname{th}\frac{1}{2}a$ tendrá dos valores iguales y opuestos.

210.—*Para valores cualesquiera de* z, *reales ó imaginarios, se verifican las relaciones*

$$\operatorname{sh}z=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}+\cdots\cdots$$

$$\operatorname{ch}z=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\cdots\cdots$$

Demostración.—Sustituyendo en las expresiones

$$\operatorname{sh}z=\frac{e^z-e^{-z}}{2},\qquad \operatorname{ch}z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},$$

los desarrollos en serie de e^z y e^{-z}, que son

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots\cdots$$

$$e^{-z}=1-z+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots\cdots$$

se hallan las fórmulas del enunciado.

211.—*Si* z *tiende hacia cero, las razones*

$$\frac{\operatorname{sh} z}{z}, \qquad \frac{\operatorname{th} z}{\operatorname{sh} z}, \qquad \frac{\operatorname{th} z}{z},$$

tienden hacia 1.

Demostración.—1.° Del desarrollo en serie del seno hiperbólico (210), se infiere

$$\frac{\operatorname{sh} z}{z} = 1 + \left[\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \frac{z^6}{7!} + \cdots\right]$$

En esta expresión, la serie incluida en el paréntesis es siempre convergente, y su suma tiende hacia cero al mismo tiempo que z. Luego, si z se desvanece, el segundo miembro, y por consiguiente el primero, tienden hacia 1.

2.° $$\frac{\operatorname{th} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} : \operatorname{sh} z = \frac{1}{\operatorname{ch} z} = \frac{2}{e^z + e^{-z}};$$

luego, para lím. $z = 0$, tendremos

$$\text{lím.} \frac{\operatorname{th} z}{\operatorname{sh} z} = \text{lím.} \frac{2}{e^z + e^{-z}} = 1.$$

3.° De la identidad

$$\frac{\operatorname{th} z}{z} = \frac{\operatorname{th} z}{\operatorname{sh} z} \times \frac{\operatorname{sh} z}{z},$$

y de los límites ya encontrados para $\operatorname{th} z : \operatorname{sh} z$ y $\operatorname{sh} z : z$, se infiere que

$$\text{lím.} \frac{\operatorname{th} z}{z} = \left(\text{lím.} \frac{\operatorname{th} z}{\operatorname{sh} z}\right)\left(\text{lím.} \frac{\operatorname{sh} z}{z}\right) = 1.$$

212.—Las funciones hiperbólicas y las circulares de z y zi están relacionadas por las igualdades

$$\text{sen}\,(zi) = i\,\text{sh}\,z, \qquad \text{sh}\,(zi) = i\,\text{sen}\,z,$$

$$\cos\,(zi) = \text{ch}\,z, \qquad \text{ch}\,(zi) = \cos\,z,$$

$$\text{tang}\,(zi) = i\,\text{th}\,z, \qquad \text{th}\,(zi) = i\,\text{tang}\,z,$$

$$\cot\,(zi) = -i\,\cot\text{h}\,z, \qquad \cot\text{h}\,(zi) = -i\,\cot\,z,$$

$$\text{cosec}\,(zi) = -i\,\text{cosec h}\,z, \qquad \text{cosec h}\,(zi) = i\,\text{cosec}\,z,$$

$$\sec\,(zi) = \sec\text{h}\,z, \qquad \sec\text{h}\,(zi) = \sec\,z,$$

las cuales resultan inmediatamente de las definiciones dadas para las funciones hiperbólicas, y de las relaciones análogas que existen para las funciones circulares, y son las siguientes:

$$\text{sen}\,z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}, \qquad \text{tang}\,z = \frac{\left(1 - e^{2zi}\right) i}{1 + e^{2zi}},$$

$$\text{cosec}\,z = \frac{2i}{e^{zi} - e^{-zi}}, \qquad \sec z = \frac{2}{e^{zi} + e^{-zi}}, \qquad \cot z = \frac{1 + e^{2zi}}{\left(1 - e^{2zi}\right) i}.$$

VI.—Dignando de una distancia. Metro natural.

213.—(Fig. 162).—*Si* AB *y* CD *son arcos de horiciclo, que tienen por centro común el punto en el infinito de los rayos paralelos* AC *y* BD, *el valor de la razón* AB:CD *depende tan solo de la longitud* AC, *y crece continuamente desde 1 hasta infinito, cuando* AC *crece continuamente desde cero hasta infinito.*

Demostración.—Supongamos que A′B′ y C′D′ son otros dos arcos de

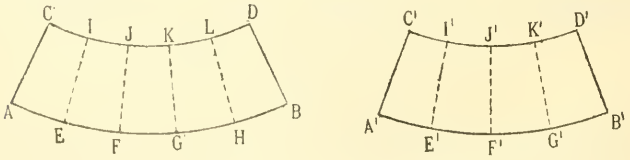


Fig. 162

horiciclo, que tienen por centro el punto infinitamente lejano de los rayos para-

lelos A'C' y B'D', y que, además es AC = A'C'. Demostremos, en primer lugar, que, entre los arcos AB, A'B', CD, C'D' se cumple la proporción

$$AB : CD = A'B' : C'D'.$$

Los arcos AB y A'B' ó son comensurables entre sí, ó no lo son. En el primer caso, serán múltiplos de un cierto arco AE, que estará contenido m veces en AB, y n veces en A'B', por cuyo motivo será

$$AB : A'B' = m : n.$$

Los radios EI, FJ, ... E'I', F'J', ... de los horiciclos AB y A'B', que dividen respectivamente á los arcos AB y A'B' en m y n partes iguales, dividen al arco CD en m arcos CI, IJ, ...; y al C'D' en n arcos C'I', I'J', ...; y todos estos arcos parciales CI, C'I', IJ, I'J', ... son iguales, porque los cuadriláteros mixtilíneos AEIC, A'E'I'C', ... son superponibles; luego

$$CD : C'D' = m : n.$$

De las dos igualdades anteriores, se deduce

$$AB : A'B' = CD : C'D'.$$

Si los dos arcos AB y A'B' son incomensurables, designemos por u la n-ava parte del A'B', y por v la n-ava parte del C'D'. El arco AB no será múltiplo de u; pero estará comprendido entre dos múltiplos consecutivos um y $u(m+1)$ de u. Tampoco el arco CD será múltiplo de v; pero estará comprendido entre vm y $v(m+1)$. Se verificarán, pues, las limitaciones

$$\frac{m}{n} < \frac{AB}{A'B'} < \frac{m+1}{n}, \qquad \frac{m}{n} < \frac{CD}{C'D'} < \frac{m+1}{n}.$$

Si n es un número arbitrariamente grande, las razones $\frac{m}{n}$ y $\frac{m+1}{n}$ tienden hacia un mismo límite, porque su diferencia $\frac{1}{n}$ tiende hacia cero; luego las razones AB : A'B' y CD : C'D', por estar comprendidas entre dos fracciones variables que tienden hacia un mismo límite, son iguales.

Tenemos, pues, establecido que, en todos los casos, se cumple la proporción AB: A'B' = CD : C'D'; y, permutando en ella los términos medios, resulta·

$$AB : CD = A'B' : C'D'.$$

Esta igualdad prueba que, si la distancia AC permanece constante, la razón AB: CD es independiente de la longitud del arco AB, pues siempre es igual á A′B′ : C′D′

(Fig. 163). — Sea *m* la bisectriz de la faja de plano, comprendida entre las paralelas AC y BD, y E la intersección de *m* con la cuerda CD. Si, permaneciendo constante el arco AB, la disiancia AC crece continuamente, y tiende hacia el infinito, la ordenada CE menguará continuamente y tenderá hacia cero (147); luego ambas cosas ocurrirán también al duplo de dicha ordenada, que es la cuerda CD, y al arco horiciclar CD. Por lo tanto, el valor de la razón AB : CD crece continuamente desde 1 hasta ∞, cuando la distancia AC crece continuamente desde 0 hasta ∞.

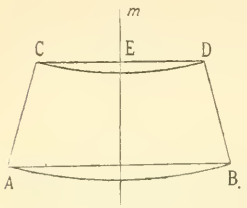


Fig. 163

Observación — Al valor de dicha razón AB : CD le llamaré *dignando* de la longitud AC. De la proposición anterior se infiere, que el dignando de un segmento rectilíneo es siempre un número positivo, mayor que 1; y que, recíprocamente, todo número positivo, mayor que 1, es dignado de cierto segmento rectilíneo,

214. — *El dignando de una suma es igual al producto de los dignandos de sus términos.*

Demostración. — (Fig. 164). — Sea, por ejemplo, la suma AB + BC + CD, que es AD. Tomando por centro el punto en el infinito del rayo AD, describanse los arcos de horiciclo AE, BF, CG, DH, que empiezan respectivamente en los puntos A, B, C, D, y terminan en una misma recta EH paralela á la dirección AD. Los respectivos dignandos de los segmentos AB, BC, CD, y de su suma AD son

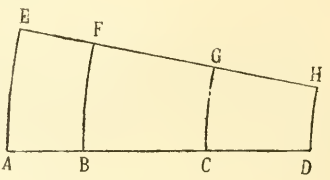


Fig. 164

$$\frac{AE}{BF'}\quad\frac{BF}{CG'}\quad\frac{CG}{DH'}\quad\frac{AE}{DH'}$$

y, como se ve, la última razón es igual al producto de las tres primeras.

215. — *Si el dignando de la distancia* a *es* α, *el de* an *será* α^n.

Demostración. 1.°—Si *n* (que necesariamente debe ser un número abstracto) es entero, *an* es la suma de *n* sumandos iguales á *a*; luego (214) el dignando de la suma *an*, será el producto de *n* factores iguales á α, ó sea α^n.

2.°—Si n es el quebrado $\frac{1}{q}$, deberemos demostrar que

$$\text{dig.}\,\frac{a}{q} = \alpha^{\frac{1}{q}}$$

y así es, pues, según el primer caso, tenemos:

$$\alpha = \text{dig.}\ a = \text{dig.}\left(\frac{a}{q}q\right) = \left(\text{dig.}\,\frac{a}{q}\right)^q;$$

luego

$$\left(\text{dig.}\,\frac{a}{q}\right)^q = \alpha, \qquad \text{dig.}\,\frac{a}{q} = \alpha^{\frac{1}{q}}.$$

3.°—Si n es el quebrado $\frac{p}{q}$, de los dos casos ya demostrados se infiere que

$$\text{dig.}\left(a\frac{p}{q}\right) = \text{dig.}\left(\frac{a}{q}p\right) = \left(\text{dig.}\,\frac{a}{q}\right)^p = \left[\left(\text{dig.}\ a\right)^{\frac{1}{q}}\right]^p = \left(\text{dig.}\ a\right)^{\frac{p}{q}};$$

luego

$$\text{dig.}\left(a\frac{p}{q}\right) = \left(\text{dig.}\ a\right)^{\frac{p}{q}}.$$

4.°—Si n es un número irracional, sustituyámoslo por un quebrado variable $\frac{p}{q}$, cuyo límite sea n; y entonces se verificará la igualdad últimamente escrita, y también la que resulta de sustituir cada miembro por su límite, que es dig. $(an) = (\text{dig.}\ a)^n$, la que se quería demostrar.

216. — *Designando por* α *y* 6 *los respectivos dignandos de las longitudes* a *y* b, *se cumple la relación*

$$\alpha = 6^{\frac{a}{b}},$$

que resulta de sustituir en la identidad $a = b\frac{a}{b}$ cada miembro por su dignando (215).

217. — Puesto que (213) cuando una distancia crece continuamente desde 0 hasta ∞, su dignando crece también continuamente desde 1 hasta ∞, existirá

una longitud, y solamente una, cuyo dignando sea el número $e = 2,71828...$, base de los logaritmos neperianos. Dicha longitud, á la cual llamaremos *metro natural*, será en lo sucesivo la que adoptaremos para unidad lineal. Así, *en todas las fórmulas en que intervengan segmentos rectilíneos* a, b, c,..... *debe sobreentenderse que* a, b, c,..... *son los números abstractos que resultan de dividir dichos segmentos por el metro natural.*

218 — *El dignando de la distancia* a *vale* e^a.

Observemos en primer lugar que, según el convenio anterior, este enunciado, incorrecto por brevedad, equivale al siguiente: *si se toma por unidad de longitud el metro natural, el dignando de una distancia que valga* a *unidades lineales, es* e^a.

Efectivamente, si en la fórmula $\alpha = 6^{\frac{a}{b}}$ es $6 = e$, será b el metro natural; y conviniendo en representar por a la razón $\frac{a}{b}$ de la cantidad a con la unidad b, resultará $\alpha = e^a$, de acuerdo con el enunciado.

VII.—Expresiones diversas del ángulo de paralelismo.

219.—(Fig. 165).—Sean AMCB un sector de horiciclo, y MN la ordenada del arco CM (215). Entre el ángulo de paralelismo z, que corresponde á la distancia MN, y la longitud CN, existe la relación

$$\frac{1}{\operatorname{sen} z} = e^{CN},$$

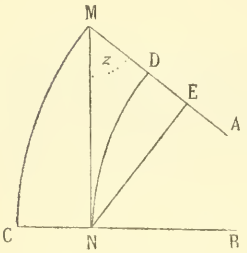


Fig. 165

Demostración—Trácese por N el arco de horiciclo ND, concéntrico con CM y terminado en MA, y la ordenada NE del arco ND. El triángulo rectángulo MNE proporciona (217) la relación

$$\frac{1}{\operatorname{sen} z} = \frac{\text{arc. MC}}{\text{arc. ND}};$$

pero (213 *Obs.*) el segundo miembro es el dignando de CN, é igual (218) á e^{CN}; luego $\frac{1}{\operatorname{sen} z} = e^{CN}$.

220.—(Fig. 166). *Entre la distancia* MN = a *de un punto* M *á una recta*

NB, *y el ángulo de paralelismo* NMA = z, *que corresponde á dicha distancia, existe la relación*

$$\cot \tfrac{1}{2} z = e^{a}.$$

Demostración.—Prolónguese NM, según MD; constrúyase la faja CPNB simétrica de AMNB, respecto de NB; trácese dentro del ángulo AMD la recta

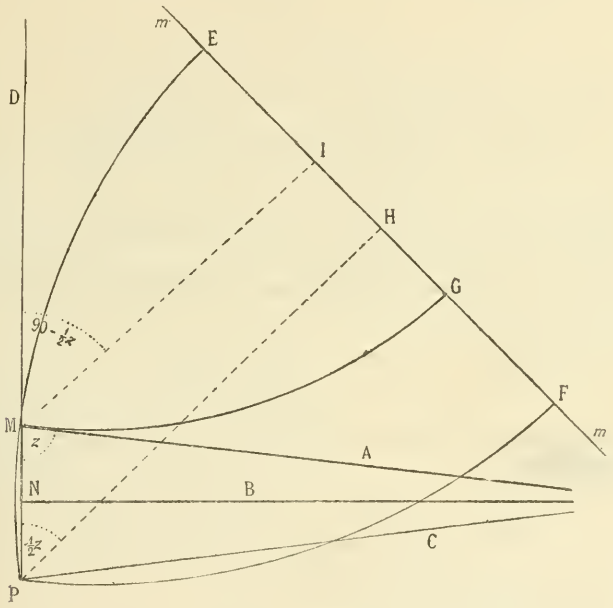


Fig. 166

m paralela á sus dos lados (123-I), la cual resultará paralela á NB y á PC (109); trácense los tres arcos de horiciclo PF de radio PD, MG de radio MD, y PE de radio PC, que pasará por M; (los puntos de intersección de estos arcos con la recta *m*, están designados en la figura por F, G, E); finalmente, dibújense las ordenadas PH, MI de estos arcos, las cuales serán bisectrices respectivas de los ángulos CPN = *z* y AMD = 180° — *z*, de manera que tendremos HPM = $\frac{1}{2} z$, IMD = 90° — $\frac{1}{2} z$.

Por ser PD y MD paralelos á m, entre los ángulos de paralelismo HPM $=\frac{1}{2}z$ é IMD $=90^\circ-\frac{1}{2}z$, se verifican (219), las relaciones

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}z}=e^{\mathrm{FH}}, \qquad \frac{1}{\cos\frac{1}{2}z}=e^{\mathrm{GI}},$$

que divididas ordenadamente, originan esta otra:

$$\cot\tfrac{1}{2}z=e^{\mathrm{FH}-\mathrm{GI}}.$$

Por otra parte, $\mathrm{FH}=\frac{1}{2}\mathrm{FE}$, $\mathrm{GI}=\frac{1}{2}\mathrm{GE}$; y por lo tanto,

$$\mathrm{FH}-\mathrm{GI}=\tfrac{1}{2}(\mathrm{FE}-\mathrm{GE})=\tfrac{1}{2}\mathrm{FG}=\tfrac{1}{2}\mathrm{PM}=\mathrm{NM}=a.$$

Tenemos, pues, $\cot\frac{1}{2}z=e^{\mathrm{FH}-\mathrm{GI}}$, $\mathrm{FH}-\mathrm{GI}=a$; luego $\cot\frac{1}{2}z=e^{a}$.

221.—*Entre el ángulo* z *de paralelismo y la distancia correspondiente* a, *existen las relaciones*

$$\operatorname{sen} z=\frac{1}{\operatorname{ch} a}, \qquad \cos z=\operatorname{th} a, \qquad \operatorname{tang} z=\frac{1}{\operatorname{sh} a}, \qquad \cot z=\operatorname{sh} a.$$

Demostración.—Acabamos de ver que $\cot\frac{1}{2}z=e^{a}$; luego $\operatorname{tang}\frac{1}{2}z=e^{-a}$ Por consiguiente,

$$\operatorname{sen} z=\frac{2}{\cot\frac{1}{2}z+\operatorname{tang}\frac{1}{2}z}=\frac{2}{e^{a}+e^{-a}}=\frac{1}{\operatorname{ch} a},$$

$$\cos z=\frac{\cot^2\frac{1}{2}z-1}{\cot^2\frac{1}{2}z+1}=\frac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1}=\operatorname{th} a,$$

$$\operatorname{tang} z=\frac{2}{\cot\frac{1}{2}z-\operatorname{tang}\frac{1}{2}z}=\frac{2}{e^{a}-e^{-a}}=\frac{1}{\operatorname{sh} a},$$

$$\cot z=\frac{1}{\operatorname{tang} z}=\operatorname{sh} a.$$

OBSERVACIÓN.—(Fig. 167). Sean MC un arco de horiciclo, MA y CB los dos radios que parten de sus extremos, N la proyección normal de M sobre CB, y z el ángulo NMA de paralelismo, correspondiente á la distancia MN. Entonces, se verificarán (219 y 221) las relaciones $1 : \operatorname{sen} z = e^{CN}$, $1 : \operatorname{sen} z = \operatorname{ch} MN$; luego

$$\operatorname{ch} MN = e^{CN}.$$

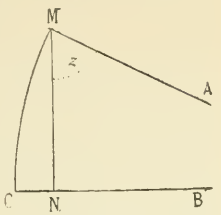


Fig. 167

VIII.—Distancias y ángulos imaginarios.

222.—En la superficie esférica, todo punto de una circunferencia máxima dista esfericamente de cualquiera de sus polos un cuadrante, el cual vale $\frac{1}{2}\pi$, si el radio de la esfera se toma por unidad, y es verdadera la hipótesis euclídea. Análogamente, para el plano de la Geometría hiperbólica, diremos que *todos los puntos de una recta, situada en él, distan del polo de aquella recta* (155 I.) *la longitud constante igual á* $\frac{1}{2}\pi i$. De modo que, por definición, *la distancia entre un punto ideal y su recta polar es* $\frac{1}{2}\pi i$.

(Fig. 168).—Sean A un punto geométrico situado en el plano de la figura, B un punto ideal, cuya polar es la recta b, y N la proyección normal de A sobre b. La recta AN pasa por el punto B; de manera que, si B fuera realmente un punto, y además estuviera en la prolongación de AN, sería $AB = AN + NB$, ó $AB = AN + \frac{1}{2}\pi i$ (puesto que, por definición, es $NB = \frac{1}{2}\pi i$). Por este motivo, diremos que *la distancia* AB, *entre el punto geométrico* A *y el imaginario* B, *es* $AN + \frac{1}{2}\pi i$.

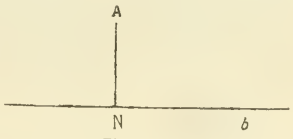


Fig. 168

Análogamente (fig. 169), si las rectas b y c, de un mismo plano, están cortadas normalmente en N y P por otra recta, y admitimos que para los puntos ideales B y C, polos de b y c, se cumple la relación $AB = AN + NP + PB$, deduciremos (por ser $AN = \frac{1}{2}\pi i$, y $PB = \frac{1}{2}\pi i$) $AB = NP + \pi i$. Convendremos, pues, en que *la distancia entre los dos puntos ideales* A y B *es* $NP + \pi i$.

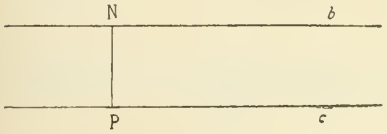


Fig. 169

Consideraciones análogas cabe hacer respecto de los planos y sus polos. Así, *todos los puntos de un plano geométrico distan de su polo la longitud constante* $\frac{1}{2}\pi i$. *La distancia de un punto geométrico* A *al punto ideal* B *es* $a+\frac{1}{2}\pi i$, *designando por* a *la distancia de* A *al plano polar de* B. *Si los dos planos* α *y* β *tienen una normal común, y es* a *su distancia, la de sus polos será* $a+\pi i$.

Sea M un punto geométrico. Los puntos de todo plano α, que pase por M, distan de su polo A la longitud $\frac{1}{2}\pi i$; y como M es uno de dichos puntos, la distancia MA de M al polo A de α vale $\frac{1}{2}\pi i$. Como esta conclusión es aplicable á los polos de todos los planos imaginables que pasan por M, y el conjunto de estos polos es un plano ideal (155-III), podemos afirmar que *un punto geométrico* M *dista de todos los puntos de su plano polar la longitud* $\frac{1}{2}\pi i$. Análogamente, en un plano dado, *un punto geométrico* M *dista de todos los puntos de su recta polar la longitud constante* $\frac{1}{2}\pi i$.

223.—Se llaman *radios* de un ciclo ó de una esfera (de centro propio ó impropio) á los segmentos de recta que empiezan en el centro y terminan en aquella línea ó en la superficie de aquella esfera. Según esto, en el hiperciclo y en la hiperesfera, la longitud del radio es igual á la altura, aumentada en $\frac{1}{2}\pi i$. Todos los radios de un mismo ciclo ó de una misma esfera son iguales. Su longitud es real y finita, cuando el centro es geométrico; real é infinita, cuando el centro está infinitamente lejano; é imaginaria, pero finita, cuando dicho centro es ideal. En el plano (que es una variedad de la esfera) y en la recta (que es una variedad de la circunferencia) el radio vale $\frac{1}{2}\pi i$.

224.—(Fig. 170).—La porción de plano, comprendida entre dos rectas *a* y *b* que no se cortan ni son paralelas, se llama *ángulo ideal*, y tiene por *lados* estas rectas, y por *vértice* el punto ideal en que concurren. Á estas definiciones, que ya expusimos en el párrafo 159, añadiremos ahora, que á dicho ángulo se le atribuye el valor imaginario $-ci$, siendo *c* la distancia entre las dos rectas *a* y *b*.

Fig. 170

Si las tres rectas *a*, *m* y *b*, situadas en un mismo plano (fig. 171) están cortadas normalmente por otra recta, en los puntos A, M y B, y *m* es interior á la faja *ab*, se verificará la relación $ab = am + mb$ entre ángulos ideales, puesto que entre sus valores se cumple la relación

$$-\mathrm{AB}\,i = -\mathrm{AM}\,i + (-\mathrm{MB})\,i.$$

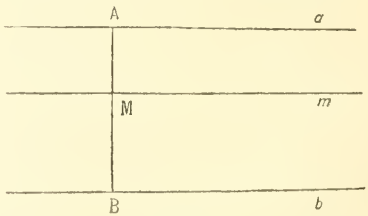


Fig. 171

IX.—De los triángulos ideales

225.—Con los convenios relativos á los elementos límites y á los ideales (154 y 155), podemos afirmar que tres rectas, situadas en un mismo plano, y que no pasan las tres por un mismo punto (geométrico, límite ó ideal) determinan, sin excepción, un triángulo cuyos vértices son los tres puntos (geométricos, límites ó ideales) en que se cortan dichas rectas. Si alguno de estos vértices es ideal, se dirá que también lo es el triángulo. Los dos lados que concurren en un vértice ideal son imaginarios; y también lo es el ángulo que forman. En todos los casos, los lados son las distancias (reales ó imaginarias) entre cada dos vértices.

En la Trigonometría rectilínea, de igual modo que en la esférica, los ángulos del triángulo ABC, aunque tenga 1, 2 ó los 3 vértices ideales, los designaremos por A, B y C; y los lados respectivamente opuestos por a, b y c. Cuando el triángulo sea rectángulo, A designará el ángulo recto, y a por consiguiente, la hipotenusa. Esto advertido, aclaremos con algunas explanaciones. las ideas que acabamos de exponer.

(Fig. 172). El cuadrilátero convexo BCDE, rectángulo en D y E, puede considerarse como un triángulo que tiene dos vértices geométricos B y C, y un vértice ideal (el de intersección de los lados BE y CD). Si $BC = a$, $CD = b_1$, $BE = c_1$ y $DE = \alpha$, dicho triángulo tendrá por lados a, $b_1 + \frac{1}{2}\pi i$ y $c_1 + \frac{1}{2}\pi i$; y por ángulos, $-\alpha i$, B y C.

El pentágono convexo de la figura 173, con los lados a_1 y c_1 normales al $\mathcal{C}$, y los b_1 y c_1 normales al α, puede considerarse como un triángulo que tiene un vértice geométrico C, y otros dos ideales. Este triángulo tiene un ángulo real C, y

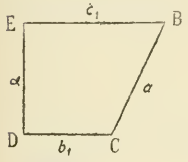


Fig. 172

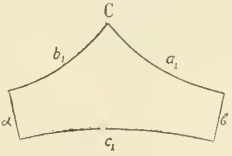


Fig. 173

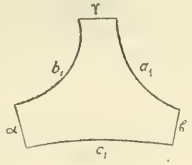


Fig. 174

dos ángulos imaginarios A y B, cuyos respectivos valores son $-\alpha i$ y $-\mathcal{C} i$. Los lados a, b, c, opuestos á estos ángulos, valen respectivamente

$$a_1 + \tfrac{1}{2}\pi i, \qquad b_1 + \tfrac{1}{2}\pi i, \qquad c_1 + \pi i.$$

(Fig. 174).—En el exágono convexo $a_1\gamma b_1\alpha c_1\mathcal{C}$, cuyos seis ángulos son rectos, podemos ver un triángulo con tres vértices ideales; y esto de dos modos diferen-

tes, puesto que pueden considerarse como vértices ideales las intersecciones de los tres lados alternos a_1, b_1, c_1 ó las de los otros tres lados α, 6, γ. En el primer caso, el triángulo tiene por lados $a_1+\pi i$, $b_1+\pi i$ y $c_1+\pi i$; y por ángulos $-\alpha i$, $-6i$ y $-\gamma i$. En el segundo caso, $\alpha+\pi i$, $6+\pi i$, $\gamma+\pi i$ serían los lados, y $-a_1 i$, $-b_1 i$, $-c_1 i$ los ángulos.

El cuadrilátero convexo trirrectángulo $a_1 c b_1 \gamma$ de la fig. 175, cuyo único ángulo oblícuo es el B, puede considerarse como un triángulo rectángulo, que tiene

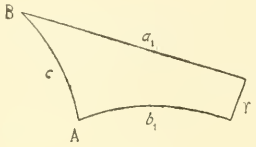


Fig. 175

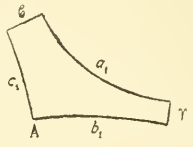


Fig. 176

por hipotenusa $a_1+\frac{1}{2}\pi i$, por catetos c y $b_1+\frac{1}{2}\pi i$, y por ángulos oblicuos $-\gamma i$ y B. También puede tomarse $c+\frac{1}{2}\pi i$, por hipotenusa, en cuyo caso los catetos valdrían a_1 y $\gamma+\frac{1}{2}\pi i$, y el ángulo imaginario sería $-b_1 i$.

El pentágono convexo $a_1\, 6\, c_1\, b_1\, \gamma$ de la figura 176, cuyos cinco ángulos son rectos, no es otra cosa que un triángulo ideal, cuyos elementos a, b, c, B, C, tienen los valores siguientes:

$$a=a_1+\pi i. \qquad b=b_1+\tfrac{1}{2}\pi i, \qquad c=c_1+\tfrac{1}{2}\pi i, \qquad \mathrm{B}=-6i, \qquad \mathrm{C}=-\gamma i.$$

Obsérvese que este pentágono puede considerarse como triángulo rectángulo de cinco modos diferentes, puesto que uno cualquiera de sus cinco lados (aumentado en πi) puede elegirse para hipotenusa.

X.—Relaciones trigonométricas en el triángulo rectilíneo y rectángulo.

226. Designemos, como de costumbre, por A, B, C los ángulos de un triángulo ABC; por a, b, c los lados respectivamente opuestos, y por A′, B′, C′ los ángulos de paralelismo correspondientes á las longitudes a, b, c. Con estos supuestos, podremos establecer la siguiente ley.

Á todo triángulo rectilíneo ABC, *rectángulo en* A (fig. 177), *corresponde otro triángulo esférico rectángulo* (fig. 178), *cuyos ángulos oblicuos son* C′ *y*

$90° - B$, *y que tiene* B′ *por hipotenusa, y* A′ *y* C *por catetos respectivamente opuestos á dichos ángulos oblicuos.*

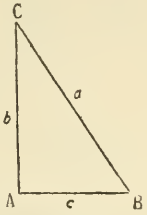


Fig. 177

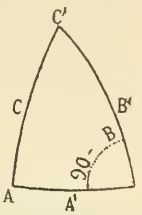


Fig. 178

Demostración.—(Fig. 179). Trácese BN normal al plano del triángulo; y por C diríjase el rayo CP paralelo al BN: vamos á demostrar que el triedro CBAP, y por consiguiente su triángulo esférico, cumple las condiciones del enunciado.

Trácese el rayo AM paralelo al BN, y resultará (como se vió en el párrafo 199, en el cual se hizo esta misma construcción) que son rectos los diedros BN, CB, BA y AM y el ángulo MAC. Los elementos del triedro CBAP cumplen, pues, con las condiciones siguiente: 1.ª El diedro CB es recto, y su cara opuesta ACP vale B′, puesto que es ángulo de paralelismo de la distancia $CA = b$; 2.ª La cara BCP vale A′, porque es el ángulo de paralelismo de la distancia $CB = a$; y el diedro opuesto CA vale C′, puesto que su sección recta BAM es el ángulo de paralelismo correspondiente á la distancia $AB = c$; 3.ª La cara ACB es el mismo ángulo C del triángulo propuesto ABC, y su diedro opuesto CP vale $90° - B$, como vamos á ver: por ser paralelos los tres rayos AM, BN, CP, estos tres diedros suman dos rectos (114); pero el diedro AM es recto, y el BM es igual á su sección recta B; luego el diedro CP es el complemento de B.

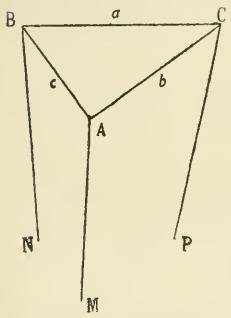


Fig. 179

El teorema queda demostrado.

227. *Entre los elementos del triángulo rectilíneo* ABC, *real ó ideal, rectángulo en* A, *existen las mismas relaciones que si el triángulo fuera esférico, pero con la diferencia de que, para los lados, las funciones circulares están sustituidas por funciones hiperbólicas. Dichas relaciones son, pues, las siguientes:*

I. $$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c,$$

II. $$\operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} a}, \qquad \operatorname{sen} C = \frac{\operatorname{sh} c}{\operatorname{sh} a},$$

III. $$\cos B = \frac{\operatorname{th} c}{\operatorname{th} a}, \qquad \cos C = \frac{\operatorname{th} b}{\operatorname{th} a},$$

IV. $$\text{tang B} = \frac{\text{th } b}{\text{sh } c}, \qquad \text{tang C} = \frac{\text{th } c}{\text{sh } b},$$

V. $$\text{ch } a = \cot \text{B} \cot \text{C},$$

VI. $$\text{ch } b = \frac{\cos \text{B}}{\text{sen C}}, \qquad \text{ch } c = \frac{\cos \text{C}}{\text{sen B}},$$

DEMOSTRACIÓN.—El triángulo ABC, rectángulo en A, puede ser real ó deal; y, en este último caso, uno de los dos vértices B y C, ó los dos, pueden ser ideales. De aquí los tres casos siguientes:

1.° Si el triángulo ABC es real, aplíquense al triángulo esférico rectángulo, de que habla el teorema precedente, las fórmulas de la Trigonometría esférica (199); y en las relaciones que se obtengan, háganse (221) las sustituciones

$$\text{sen A}' = \frac{1}{\text{ch } a}, \quad \cos \text{A}' = \text{th } a, \quad \text{tang A}' = \frac{1}{\text{sh } a}, \quad \cot \text{A}' = \text{sh } a,$$

$$\text{sen B}' = \frac{1}{\text{ch } b}, \quad \cos \text{B}' = \text{th } b, \quad \text{tang B}' = \frac{1}{\text{sh } b}, \quad \cot \text{B}' = \text{sh } b,$$

$$\text{sen C}' = \frac{1}{\text{ch } c}, \quad \cos \text{C}' = \text{th } c, \quad \text{tang C}' = \frac{1}{\text{sh } c}, \quad \cot \text{C}' = \text{sh } c;$$

y resultarán inmediatamente todas las relaciones que nos proponíamos demostrar.

2.° Si uno de los dos vértices B y C, el C por ejemplo, es ideal, tendremos que considerar (fig. 180) un cuadrilátero convexo, trirrectángulo, ABDE, cuyo único ángulo oblicuo es B; y, si $\text{BD} = a_1$, $\text{AE} = b_1$, $\text{AB} = c$, $\text{DE} = \gamma$, los elementos a, b, c, B, C, de este triángulo ideal tendrán los valores siguientes:

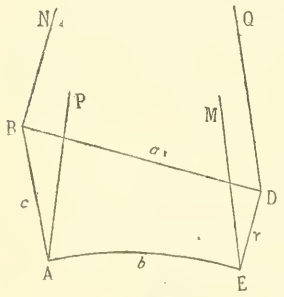


Fig. 180

$$a = a_1 + \tfrac{1}{2}\pi i, \qquad b = b_1 + \tfrac{1}{2}\pi i,$$

$$c = c. \qquad \text{B} = \text{B}, \qquad \text{C} = -\gamma i.$$

Se trata de probar que, para estos valores de a, b, c, B y C, se cumplen las relaciones del enunciado.

Trácese EM normal al plano del cuadrilátero, y por los vértices B, A y D diríjanse los rayos BN, AP, DQ paralelos al EM. Los diedros EM, EA y ED son rectos, porque el triedro EADM tiene sus tres aristas normales dos á dos. La recta BA, por estar situada en una cara del diedro recto AE, y ser normal á su arista EA, será normal á la otra cara EAP; luego este plano es normal al BAP, por serlo á una recta AB del BAP; y así, el diedro AP es recto; y de igual modo se probaría que también lo es el DQ. Además, como en el prisma ilimitado, cuyos diedros son BN, EM, AP, DQ, la suma de éstos vale 4 rectos (194-II), y los tres últimos son rectos, también lo será el primero, ó sea BN. Obsérvese que BA es normal á AP, porque lo es al plano EAP; y que, por análogo motivo, es BD normal á DQ.

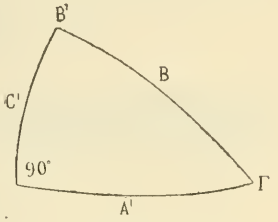


Fig. 181

Resulta de estos antecedentes, que el triedro BNAD reune las condiciones siguientes: su cara ABD es el mismo ángulo B del cuadrilátero propuesto; las otras dos caras ABN y DBN son los respectivos ángulos de paralelismo de las distancias c y a_1; el diedro BN es recto; y los BD y BA valen respectivamente los ángulos de paralelismo de las distancias γ y b_1, porque dichos ángulos QDE y EAP son las secciones rectas de aquellos diedros. Si designamos, pues, por A′, B′, C′ y Γ′ los ángulos de paralelismo correspondientes á las distancias a_1, b_1, c y γ, podremos afirmar que existe un triedro rectángulo BNAD, y por consiguiente, un triángulo esférico rectángulo (fig. 181) que tiene B por hipotenusa, A′ y C′ por catetos, y B′ y Γ′ por ángulos respectivamente opuestos á dichos catetos. Pues bien, apliquense á este triángulo las fórmulas ya establecidas de la Trigonometría esférica (199); y en las ecuaciones que se obtengan, háganse (221) las sustituciones

$$\text{sh } A' = \frac{1}{\text{ch } a_1}, \quad \text{ch } A' = \text{th } a_1, \quad \text{tang } A' = \frac{1}{\text{sh } a_1}, \quad \text{cot } A' = \text{sh } a_1 \quad \&;$$

y resultarán las relaciones

$$\text{sh } a_1 = \text{sh } b_1 \text{ ch } c,$$

$$\text{sen } B = \frac{\text{ch } b_1}{\text{ch } a_1}, \qquad \text{sh } \gamma = \frac{\text{sh } c}{\text{ch } a_1},$$

$$\cos B = \frac{\text{th } c}{\text{cot h } a_1}, \qquad \text{ch } \gamma = \frac{\text{cot h } b_1}{\text{cot h } a_1},$$

$$\text{tang B} = \frac{\cot \text{h}\, b_1}{\text{sh}\, c}, \qquad \text{th}\, \gamma = \frac{\text{th}\, c}{\text{ch}\, b_1},$$

$$\text{sh}\, a_1 = \cot \text{B} \cot \text{h}\, \gamma,$$

$$\text{sh}\, b_1 = \frac{\cos \text{B}}{\text{sh}\, \gamma}, \qquad \text{ch}\, c = \frac{\text{ch}\, \gamma}{\text{sen B}},$$

que se transforman fácilmente en las del enunciado, teniendo presente que $a_1 = a - \frac{1}{2}\pi i$, $b_1 = b - \frac{1}{2}\pi i$, $\gamma = Ci$; y que, por consiguiente (203-V. y 212),

$$\text{sh}\, \gamma = i \text{ sen C}, \quad \text{ch}\, \gamma = \cos \text{C}, \quad \text{th}\, \gamma = i \text{ tang C}, \quad \cot \text{h}\, \gamma = -i \cot \text{C},$$

$$\text{sh}\, a_1 = -i \text{ ch}\, a, \quad \text{ch}\, a_1 = -i \text{ sh}\, a, \quad \cot \text{h}\, a_1 = \text{th}\, a,$$

$$\text{sh}\, b_1 = -i \text{ ch}\, b, \quad \text{ch}\, b_1 = -i \text{ sh}\, b, \quad \cot \text{h}\, b_1 = \text{th}\, b.$$

3.° Supongamos, finalmente, que los dos vértices B y C del triángulo ABC son ideales. Para hacer extensivas á este caso las fórmulas del enunciado, debemos considerar (fig. 182) un pentágono convexo $a_1 6 c_1 b_1 \gamma$ con sus cinco ángulos rectos, y hallar las relaciones que existen entre sus lados a_1, 6, c_1, b_1, γ. Trazando la normal al lado a_1 desde el vértice opuesto A, se forman dos cuadriláteros trirrectángulos, cuyos ángulos en A son (131-*Cor.*) agudos y complementarios. Designando, pues, por d la distancia de a_1 al vértice opuesto, y por φ el ángulo agudo db_1, dichos cuadriláteros trirrectángulos proporcionan (en virtud del 1.er caso) las relaciones

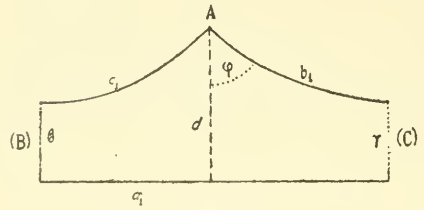


Fig. 182

$$\cos \varphi = \text{th}\, d \text{ th}\, b_1, \qquad \text{sen}\, \varphi = \text{th}\, d \text{ th}\, c_1,$$

de las cuales se deduce

$$\cot \varphi = \text{th}\, b_1 \cot \text{h}\, c_1.$$

Uno de dichos cuadriláteros (el que tiene φ por ángulo oblicuo) proporciona también la ecuación

$$\operatorname{sh} b_1 = \operatorname{cot\,h}\,\gamma \cot \varphi,$$

que, multiplicada ordenadamente por la anterior, da (tras sencillísima transformación)

$$\operatorname{ch} b_1 = \operatorname{cot\,h}\, c_1 \operatorname{cot\,h}\,\gamma.$$

Esta igualdad enseña que, *en el pentágono convexo con 5 ángulos rectos, el coseno hiperbólico de un lado cualquiera es igual al producto de las contangentes hiperbólicas de los dos lados contiguos.* Por consiguiente, tendremos:

$$\operatorname{ch} a_1 = \operatorname{cot\,h}\,\mathcal{C}\operatorname{cot\,h}\,\gamma,$$

$$\operatorname{cot\,h}\,\gamma \operatorname{cot\,h}\, c_1 = \operatorname{ch} b_1,$$

$$\operatorname{cot\,h}\,\mathcal{C}\operatorname{cot\,h}\, b_1 = \operatorname{ch} c_1.$$

Multiplicando ordenadamente estas tres igualdades, se obtiene, tras fáciles reducciones,

$$\operatorname{ch} a_1 = \operatorname{sh} b_1 \operatorname{sh} c_1.$$

Así, *en el pentágono convexo con 5 ángulos rectos, el coseno hiperbólico de un lado cualquiera es igual al producto de los senos hiperbólicos de los lados opuestos.*

Aplicando estos dos principios á los 5 lados del pentágono, que estamos considerando, tendremos las 10 relaciones

$$\operatorname{ch} a_1 = \operatorname{sh} b_1 \operatorname{sh} c_1,$$

$$\operatorname{sh}\mathcal{C} = \frac{\operatorname{ch} b_1}{\operatorname{sh} a_1}, \qquad \operatorname{sh}\gamma = \frac{\operatorname{ch} c_1}{\operatorname{sh} a_1},$$

$$\operatorname{ch}\mathcal{C} = \frac{\operatorname{cot\,h}\, c_1}{\operatorname{th} a_1}, \qquad \operatorname{ch}\gamma = \frac{\operatorname{cot\,h}\, b_1}{\operatorname{th} a_1},$$

$$\operatorname{th}\mathcal{C} = \frac{\operatorname{cot\,h}\, b_1}{\operatorname{ch} c_1}, \qquad \operatorname{th}\gamma = \frac{\operatorname{cot\,h}\, c_1}{\operatorname{ch} b_1},$$

$$\operatorname{ch} a_1 = \operatorname{cot h}\, \mathcal{6} \operatorname{cot h}\, \gamma,$$

$$\operatorname{sh} b_1 = \frac{\operatorname{ch} \mathcal{6}}{\operatorname{sh} \gamma}, \qquad \operatorname{sh} c_1 = \frac{\operatorname{ch} \gamma}{\operatorname{sh} \mathcal{6}};$$

y de ellas se deducen fácilmente las que se querían demostrar, teniendo presente que dicho pentágono puede ser mirado como un triángulo ABC rectángulo en A, cuyos elementos a, b, c, B, C tienen los valores siguientes:

$$a = a_1 + \pi i, \quad b = b_1 + \tfrac{1}{2}\pi i, \quad c = c_1 + \tfrac{1}{2}\pi i, \quad \mathrm{B} = -\mathcal{6} i, \quad \mathrm{C} = -\gamma i;$$

y que, por lo tanto,

$$a_1 = a - \pi i, \quad b_1 = b - \tfrac{1}{2}\pi i, \quad c_1 = c - \tfrac{1}{2}\pi i, \quad \mathcal{6} = \mathrm{B} i, \quad \gamma = \mathrm{C} i,$$

$$\operatorname{sh} \mathcal{6} = i \operatorname{sen} \mathrm{B}, \quad \operatorname{ch} \mathcal{6} = \cos \mathrm{B}, \quad \operatorname{th} \mathcal{6} = i \operatorname{tang} \mathrm{B}, \quad \operatorname{cot h}\, \mathcal{6} = -i \operatorname{cot} \mathrm{B},$$

$$\operatorname{sh} \gamma = i \operatorname{sen} \mathrm{C}, \quad \operatorname{ch} \gamma = \cos \mathrm{C}, \quad \operatorname{th} \gamma = i \operatorname{tang} \mathrm{C}, \quad \operatorname{cot h}\, \gamma = -i \operatorname{cot} \mathrm{C},$$

$$\operatorname{sh} a_1 = -\operatorname{sh} a, \qquad \operatorname{ch} a_1 = -\operatorname{ch} a, \qquad \operatorname{th} a_1 = \operatorname{th} a,$$

$$\operatorname{sh} b_1 = -i \operatorname{ch} b, \qquad \operatorname{ch} b_1 = -i \operatorname{sh} b, \qquad \operatorname{cot h}\, b_1 = \operatorname{th} b,$$

$$\operatorname{sh} c_1 = -i \operatorname{ch} c, \qquad \operatorname{ch} c_1 = -i \operatorname{sh} c, \qquad \operatorname{cot h}\, c_1 = \operatorname{th} c.$$

XI.—Relaciones trigonométricas en un triángulo rectilíneo cualquiera.

228. I. *Relaciones entre dos lados y los dos ángulos opuestos:*

$$\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sen} \mathrm{A}} = \frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sen} \mathrm{B}}, \qquad \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sen} \mathrm{A}} = \frac{\operatorname{sh} c}{\operatorname{sen} \mathrm{C}}, \qquad \frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sen} \mathrm{B}} = \frac{\operatorname{sh} c}{\operatorname{sen} \mathrm{C}}.$$

II. *Relaciones entre dos lados, el ángulo comprendido y el opuesto á uno de aquellos:*

$$\operatorname{cot h}\, a \operatorname{sh} b = \operatorname{ch} b \cos \mathrm{C} + \operatorname{sen} \mathrm{C} \operatorname{cot} \mathrm{A},$$

$$\operatorname{cot h}\, b \operatorname{sh} c = \operatorname{ch} c \cos \mathrm{A} + \operatorname{sen} \mathrm{A} \operatorname{cot} \mathrm{B},$$

$$\cot h\ c\ \mathrm{sh}\ a = \mathrm{ch}\ a \cos B + \mathrm{sen}\ B \cot C,$$

$$\cot h\ a\ \mathrm{sh}\ c = \mathrm{ch}\ c \cos B + \mathrm{sen}\ B \cot A,$$

$$\cot h\ b\ \mathrm{sh}\ a = \mathrm{ch}\ a \cos C + \mathrm{sen}\ C \cot B,$$

$$\cot h\ c\ \mathrm{sh}\ b = \mathrm{ch}\ b \cos A + \mathrm{sen}\ A \cot C.$$

III. *Relaciones entre un ángulo y los tres lados:*

$$\mathrm{ch}\ a = \mathrm{ch}\ b\ \mathrm{ch}\ c - \mathrm{sh}\ b\ \mathrm{sh}\ c \cos A,$$

$$\mathrm{ch}\ b = \mathrm{ch}\ a\ \mathrm{ch}\ c - \mathrm{sh}\ a\ \mathrm{sh}\ c \cos B,$$

$$\mathrm{ch}\ c = \mathrm{ch}\ a\ \mathrm{ch}\ b - \mathrm{sh}\ a\ \mathrm{sh}\ b \cos C.$$

IV. *Relaciones entre un lado y los tres ángulos:*

$$\cos A = -\cos B \cos C + \mathrm{sen}\ B\ \mathrm{sen}\ C\ \mathrm{ch}\ a,$$

$$\cos B = -\cos A \cos C + \mathrm{sen}\ A\ \mathrm{sen}\ C\ \mathrm{ch}\ b,$$

$$\cos C = -\cos A \cos B + \mathrm{sen}\ A\ \mathrm{sen}\ B\ \mathrm{ch}\ c.$$

Demostración. — Vamos á ver que estas fórmulas son verdaderas, no sólo para los triángulos propiamente dichos, sino también para los que tienen 1, 2 ó los 3 vértices ideales.

Claro está que, instituyendo la primera fórmula de cada grupo, quedarán instituídas todas las otras, puesto que éstas se deducirán de aquellas por la simple permutación de letras. Además, podemos suponer que el ángulo A es oblicuo ó imaginario; porque, si fuera recto, dichas primeras fórmulas se reducirían á las II.-1.ª, III.-2.ª, I. y V. del párrafo 227, que ya se establecieron para los triángulos rectángulos. En suma, sólo tendremos que demostrar las relaciones

$$\frac{\mathrm{sh}\ a}{\mathrm{sen}\ A} = \frac{\mathrm{sh}\ b}{\mathrm{sen}\ B},$$

$$\cot h\ a\ \mathrm{sh}\ b = \mathrm{ch}\ b \cos C + \mathrm{sen}\ C \cot A,$$

$$\mathrm{ch}\ a = \mathrm{ch}\ b\ \mathrm{ch}\ c - \mathrm{sh}\ b\ \mathrm{sh}\ c \cos A,$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \mathrm{sen}\ B\ \mathrm{sen}\ C\ \mathrm{ch}\ a;$$

y esto en la hipótesis de que el ángulo A no es recto.

Puede suceder que el vértice C sea un punto geométrico, (figs. 187, 188, 189 y 190) ó que sea un punto ideal; y en este último caso, la intersección de la recta c con la normal común γ á los lados a y b, puede ser ideal, geométrica ó límite: en otros términos, las rectas c y γ pueden tener una normal común d_1 (figs. 191, 192, 193 y 194), cortarse en un punto propio D (figs. 203, 204, 205 y 206) ó ser paralelas. Se originan pues cuatro casos.

Primero y segundo casos. — (Figs. desde la 183 hasta la 202). Si el vértice C es un punto geométrico, ó, si siendo ideal, la recta c y la normal común γ á los lados a y b tienen una normal común d_1, considérese la altura CH del triángulo ABC, correspondiente al lado c. Esta altura es real en el primer caso; y en el segundo tiene el valor imaginario $d_1 + \frac{1}{2}\pi i$, si d_1 es la distancia entre las rectas c y γ; pero, en ambos casos, la recta ilimitada CH es geométrica.

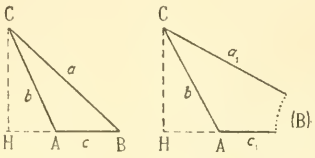


Fig. 183

Fig. 184

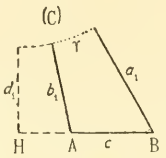


Fig. 185

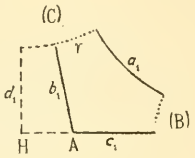


Fig. 186

La consideración de la áltura CH origina dos triángulos rectángulos HCA, HCB (geométricos ó ideales) pues aunque el ángulo B sea recto (figs. 195, 196, 197 y 198) puede considerarse HCB como un triángulo rectángulo, en el cual son nulos el cateto HB y su ángulo opuesto. Con esta construcción, he aquí como se demuestran (para el 1.° y 2.° casos) las cuatro fórmulas últimamente enunciadas.

1.° Los triángulos rectángulos HCB, HCA proporcionan las relaciones

$$\text{sh CH} = \text{sh } a \text{ sen B}, \qquad \text{sh CH} = \text{sh } b \text{ sen A},$$

de las cuales se deduce sucesivamente

$$\text{sh } a \text{ sen B} = \text{sh } b \text{ sen A}, \qquad \text{sh } a : \text{sen A} = \text{sh } b : \text{sen B}.$$

2.° De los mismos triángulos rectángulos HCB, HCA, se saca

$$\text{cot h } a = \text{cot h CH cos HCB}, \qquad \text{cot h CH} = \frac{\text{cot h } b}{\text{cos ACH}};$$

luego

$$\text{cot h } a = \text{cot h } b \frac{\text{cos HCB}}{\text{cos ACH}}, \qquad \text{cot h } a \text{ sh } b = \text{ch } b \frac{\text{cos HCB}}{\text{cos ACH}}.$$

Si A es obtuso (fig.s 183, 184, 185 y 186), será $HCB = C + HCA$, $\cos HCB = \cos (C + HCA)$, y

$$\cos HCB = \cos C \cos HCA - \operatorname{sen} C \operatorname{sen} HCA;$$

luego

$$\cot h\, a \operatorname{sh} b = \operatorname{ch} b \cos C - \operatorname{ch} b \operatorname{sen} C \operatorname{tang} HCA.$$

Y haciendo en esta igualdad la sustitución $\operatorname{tang} HCA = \frac{-\cot A}{\operatorname{ch} b}$, que se saca del triángulo rectángulo HCA, cuyo ángulo en A vale $180° - A$, resulta

$$\cot h\, a \operatorname{sh} b = \operatorname{ch} b \cos C + \operatorname{sen} C \cot A.$$

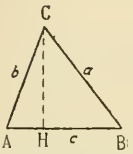


Fig. 187

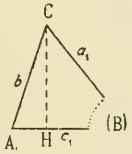


Fig. 188

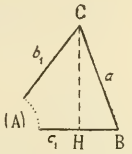


Fig. 189

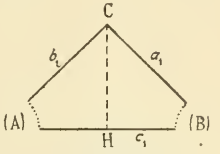


Fig. 190

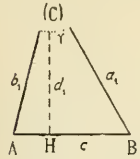


Fig. 191

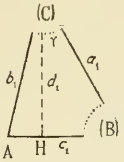


Fig. 192

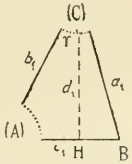


Fig. 193

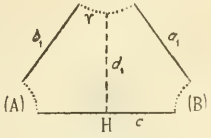


Fig. 194

Pero, si A no es obtuso, en cuyo caso puede ser agudo (fig.s 187, 188, 191, 192, 195, 197, 199 y 201), recto (caso que ya hemos dicho es innecesario considerar), ó imaginario (fig.s 189, 190, 193, 194, 196, 198, 200 y 202) será $HCB = C - HCA$ ó $HCB = HCA - C$; y, en ambos casos,

$$\cos HCB = \cos C \cos HCA + \operatorname{sen} C \operatorname{sen} HCA;$$

luego

$$\cot h\, a \operatorname{sh} b = \operatorname{ch} b \cos C + \operatorname{ch} b \operatorname{sen} C \operatorname{tang} HCA.$$

Sustituyendo en esta ecuación tang HCA por el segundo miembro de la

igualdad $\text{tang HCA} = \dfrac{\cot A}{\text{ch } b}$ que ofrece el triángulo rectángulo HCA (cuyo ángulo en A es el A del triángulo dado) se halla, como antes,

$$\cot a \text{ sh } b = \text{ch } b \cos C + \text{sen } C \cot A.$$

Luego esta fórmula es verdadera, para todos los valores reales ó imaginarios del ángulo A.

3.° Los consabidos triángulos rectángulos HCB, HCA dan

$$\text{ch } a = \text{ch CH ch BH}, \qquad \text{ch CH} = \frac{\text{ch } b}{\text{ch AH}};$$

luego

$$\text{ch } a = \text{ch } b \frac{\text{ch BH}}{\text{ch AH}}.$$

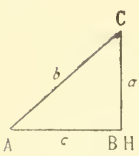


Fig. 195

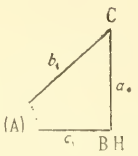


Fig. 196

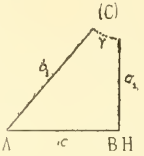


Fig. 197

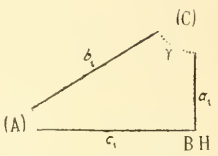


Fig. 198

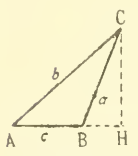


Fig. 199

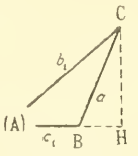


Fig. 200

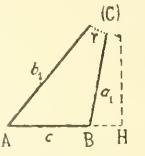


Fig. 201

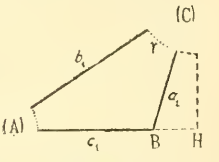


Fig. 202

Si A es obtuso (fig.s 183, 184, 185 y 186) será $\text{BH} = c + \text{AH}$, y $\text{ch BH} = \text{ch}(c + \text{AH})$. Pero, si A no es obtuso, en cuyo caso puede ser agudo, recto (caso que ya hemos dicho es innecesario considerar), ó imaginario, será $\text{BH} = c - \text{AH}$ (fig.s desde la 187 hasta la 194), ó $\text{BH} = \text{AH} - c$ (fig.s desde la 195 hasta la 202); y en ambos casos, tendremos $\text{ch BH} = \text{ch}(c - \text{AH})$. En definitiva, $\text{ch BH} = \text{ch}(c \pm \text{AH})$,

$$\text{ch BH} = \text{ch } c \text{ ch AH} \pm \text{sh } c \text{ sh AH};$$

y, sustituyendo este desarrollo de ch BH en la última expresión encontrada para ch a, se halla

$$\text{ch } a = \text{ch } b \text{ ch } c \pm \text{ch } b \text{ sh } c \text{ th AH}.$$

En esta fórmula debe tomarse el signo *más*, si el ángulo A es obtuso; y el signo *menos*, si no lo es. En el primer caso (fig.s 183, 184, 185 y 186), el triángulo rectángulo HAC, con el ángulo $\text{HAC} = 180^\circ - \text{A}$, proporciona la relación

$$\text{th AH} = -\text{th } b \cos \text{A}.$$

En el segúndo caso (fig.s desde la 187 hasta la 202), del mismo triángulo HAC (geométrico ó ideal) con el ángulo $\text{HAC} = \text{A}$, se saca

$$\text{th AH} = \text{th } b \cos \text{A}.$$

Luego, en ambos casos, es

$$\text{ch } a = \text{ch } b \text{ ch } c - \text{ch } b \text{ sh } c \text{ th } b \cos \text{A};$$

y reemplazando, en esta ecuación, el producto ch b th b por su igual sh b, resulta, finalmente, la fórmula

$$\text{ch } a = \text{ch } b \text{ ch } c - \text{sh } b \text{ sh } c \cos \text{A}.$$

4.° El ángulo HCA equivale á HCB — C (fig.s 183, 184, 185 y 186), ó á C — HCB (fig.s desde la 187 hasta la 194), ó á C + HCB (fig.s desde la 195 hasta la 202).

Si $\text{HCA} = \text{HCB} - \text{C}$, (figs. 183, 184, 185 y 186) los triángulos rectángulos HCA, HCB, cuyos ángulos en A y B valen respectivamente $180^\circ - \text{A}$ y B, ofrecen las relaciones

$$-\cos \text{A} = \text{ch CH sen HCA}, \quad \text{ch CH} = \frac{\cos \text{B}}{\text{sen HCB}};$$

de las cuales, y de ser $\text{HCA} = \text{HCB} - \text{C}$, se deduce

$$\cos \text{A} = -\cos \text{B} \frac{\text{sen HCA}}{\text{sen HCB}}, \quad \cos \text{A} = -\cos \text{B} \frac{\text{sen (HCB} - \text{C)}}{\text{sen HCB}}.$$

Pero. si $\text{HCA} = \text{C} - \text{HCB}$ (figs. desde la 187 hasta la 194) los mismos triángulos

rectángulos HCA, HCB, cuyos ángulos en A y B valen respectivamente A y B, darán

$$\cos A = \operatorname{ch} CH \operatorname{sen} HCA, \qquad \operatorname{ch} CH = \frac{\cos B}{\operatorname{sen} HCB};$$

luego

$$\cos A = \cos B \frac{\operatorname{sen} HCA}{\operatorname{sen} HCB};$$

y, como ahora es sen HCA = sen (C — HCB) = — sen (HCB — C), resulta, como antes,

$$\cos A = -\cos B \frac{\operatorname{sen}(HCB - C)}{\operatorname{sen} HCB}.$$

Sustituyendo, en esta ecuación, sen (HCB — C) por su igual sen HCB cos C — cos HCB sen C, se halla

$$\cos A = -\cos B \cos C + \cos B \operatorname{sen} C \cot HCB.$$

Finalmente, poniendo en vez de cot HCB el segundo miembro de la igualdad

$$\cot HCB = \operatorname{tang} B \operatorname{ch} a,$$

que se saca del triángulo rectángulo HBC, y teniendo presente que tang B = sen B : cos B, se obtiene

$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \operatorname{ch} a.$$

Falta examinar el caso en que HCA = C + HCB (figs. desde la 195 hasta la 202). En este caso, los triángulos rectángulos HAC, HBC, cuyos ángulos en A y B valen respectivamente A y 180° — B, nos proporcionan las ecuaciones

$$\cos A = \operatorname{ch} CH \operatorname{sen} HCA, \qquad \operatorname{ch} CH = \frac{-\cos B}{\operatorname{sen} HCB},$$

que conducen, sucesivamente, á estas otras:

$$\cos A = -\cos B \frac{\operatorname{sen} HCA}{\operatorname{sen} HCB}, \qquad \cos A = -\cos B \frac{\operatorname{sen}(C + HCB)}{\operatorname{sen} HCB},$$

$$\cos A = -\cos B \cos C - \cos B \operatorname{sen} C \cot HCB.$$

En fin, en el triángulo rectángulo HCB, cuyo ángulo en B vale $180^\circ - B$, es

$$\cot HCB = -\operatorname{tang} B \operatorname{ch} a;$$

y, sustituyendo este valor de tang B en la última expresión hallada para cos A, se recae sobre la fórmula $\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \operatorname{ch} a$, que se deseaba demostrar.

Tercer caso. (Figs. 203, 204, 205 y 206). Suponemos, ahora, que el vértice C es ideal, y que la normal comun γ á los lados a y b corta á la recta c en un punto propio D. Designemos por E y F las respectivas intersecciones de la recta γ con los lados a y b, por γ la distancia EF, y por D el ángulo FDA. Con estos supuestos, he aquí como se demuestran, para el caso actual, las cuatro fórmulas consabidas.

1.° Los triángulos rectángulos (reales ó ideales) DEB, DFA proporcionan las relaciones

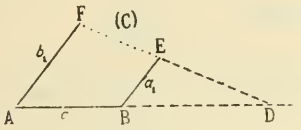


Fig. 203

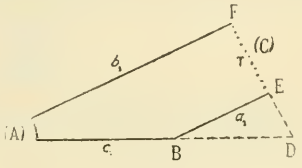


Fig. 204

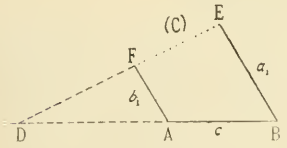


Fig. 205

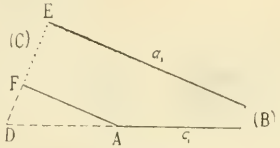


Fig. 206

$$\cos D = \operatorname{sen} B \operatorname{ch} BE, \qquad \cos D = \operatorname{sen} A \operatorname{ch} AF,$$

de las cuales se deduce, sucesivamente,

$$\operatorname{sen} B \operatorname{ch} BE = \operatorname{sen} A \operatorname{ch} AF, \qquad \frac{\operatorname{ch} BE}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{ch} AF}{\operatorname{sen} B};$$

pero, siendo $BE = a - \frac{1}{2}\pi i$ y $AF = b - \frac{1}{2}\pi i$, será

$$\operatorname{ch} BE = -i \operatorname{sh} a, \qquad \operatorname{ch} AF = -i \operatorname{sh} b.$$

Sustituyendo estos valores de ch BE y ch AF, se halla sh a : sen A = sh b : sen B, que es la primera de las fórmulas que deseábamos demostrar.

2.º Los mismos triángulos rectángulos DBE, DAF ofrecen las relaciones

$$\text{th BE} = \text{tang D sh DE}, \qquad \text{tang D} = \frac{\text{th AF}}{\text{sh DF}},$$

que conducen á esta otra:

$$\text{th BE} = \text{th AF}\,\frac{\text{sh DE}}{\text{sh DF}},$$

la cual se transforma sucesivamente (por ser $\text{BE} = a - \frac{1}{2}\pi i$, $\text{AF} = b - \frac{1}{2}\pi i$ y cot h b = ch b : sh b) en las ecuaciones

$$\text{cot h } a = \text{cot h } b\,\frac{\text{sh DE}}{\text{sh DF}}, \qquad \text{cot h } a \text{ sh } b = \text{ch } b\,\frac{\text{sh DE}}{\text{sh DF}}.$$

Por otra parte, tenemos $\text{DE} = \text{DF} + \gamma$ (figs. 205 y 206) ó $\text{DE} = \text{DF} - \gamma$ (figs. 203 y 204); luego

$$\text{sh DE} = \text{sh DF ch } \gamma \pm \text{ch DF sh } \gamma.$$

Sustituyendo este desarrollo de sh DE en la última expresión encontrada para cot h a sh b, y teniendo presente que (por ser $\gamma = \text{C}i$) ch γ = cos C y sh $\gamma = i$ sen C, se obtiene

$$\text{cot h } a \text{ sh } b = \text{ch } b \cos \text{C} \pm i \text{ ch } b \text{ sen C cot h DF}.$$

En esta fórmula se debe tomar el signo *más*, si $\text{DE} = \text{DF} + \gamma$ y el signo *menos*, si $\text{DE} = \text{DF} - \gamma$. En el primer caso, (figs. 205 y 206) el triángulo rectángulo DAF, cuyo ángulo en A vale 180° — A, y cuyo cateto AF es igual á $b - \frac{1}{2}\pi i$, da

$$\text{cot h DF} = \frac{-\cot \text{A}}{\text{sh AF}}, \quad \text{ó} \quad \text{cot h DF} = \frac{\cot \text{A}}{i \text{ ch } b}.$$

En el segundo caso, es decir, cuando $\text{DE} = \text{DF} - \gamma$ (figs. 203 y 204) del

mismo triángulo rectángulo DAF, cuyo ángulo DAF es el A del triángulo dado, se saca

$$\cot \text{h DF} = \frac{\cot \text{A}}{\text{sh AF}}. \quad \text{ó} \quad \cot \text{h DF} = \frac{\cot \text{A}}{-i \text{ ch } b}.$$

Luego en ambos casos, al sustituir cot h DF por su igual $\frac{\cot \text{A}}{\pm i \text{ ch } b}$, en la ecuación cot h a sh $b = \&$, resultará

$$\cot \text{h } a \text{ sh } b = \text{ch } b \cos \text{C} + \text{sen C} \cot \text{A}$$

3.° Los consabidos triángulos rectángulos DEB, DFA, dan

$$\text{sh BE} = \text{sh DB sen D}, \qquad \text{sen D} = \frac{\text{sh AF}}{\text{sh DA}};$$

luego

$$\text{sh BE} = \text{sh AF} \frac{\text{sh DB}}{\text{sh DA}}$$

Esta última ecuación, teniendo presente que DB = DA − c ó DB = DA + c, y que (por ser $\text{BE} = a - \frac{1}{2}\pi i$ y $\text{AF} = b - \frac{1}{2}\pi i$) sh BE = $-i$ ch a, sh AF = $-i$ ch b, se transforma sucesivamente de esta manera:

$$\text{ch } a = \text{ch } b \frac{\text{sh (DA} \pm c)}{\text{sh DA}},$$

$$\text{ch } a = \text{ch } b \text{ ch } c \pm \text{ch } b \text{ sh } c \cot \text{h DA}.$$

En esta ecuación debe tomarse el signo *más*, si DB = DA + c; y el signo *menos*, si DB = DA − c. En el primer caso (figs. 205 y 206), el triángulo rectángulo DFA, con el ángulo DAF = 180° − A, da

$$\cot \text{h DA} = -\cot \text{h AF} \cos \text{A}.$$

En el segundo caso, ó sea cuando DB = DA − c (figs. 202 y 203) el mismo triángulo rectángulo DFA = A, ofrece la relación

$$\cot \text{h DA} = \cot \text{h AF} \cos \text{A}.$$

Luego, en ambos casos, es

$$\text{ch } a = \text{ch } b \text{ ch } c - \text{ch } b \text{ sh } c \cot \text{h AF} \cos \text{A}.$$

Finalmente, haciendo la sustitución $\cot AF = \text{th}\, b$, que resulta de ser $AF = b - \frac{1}{2}\pi i$, y recordando que $\text{th}\, b = \text{sh}\, b : \text{ch}\, b$, se halla

$$\text{ch}\, a = \text{ch}\, b\, \text{ch}\, c - \text{sh}\, b\, \text{sh}\, c \cos A.$$

4.º En los referidos triángulos rectángulos DEB, DFA, tenemos:

para las figuras 203 y 204,

$$DAF = A, \quad DBE = 180° - B,$$

$$\cos A = \text{ch}\, DF \operatorname{sen} D,$$

$$\operatorname{sen} D = \frac{-\cos B}{\text{ch}\, DE};$$

para las figuras 205 y 206,

$$DAF = 180° - A, \quad DBE = B,$$

$$\cos A = -\text{ch}\, DF \operatorname{sen} D,$$

$$\operatorname{sen} D = \frac{\cos B}{\text{ch}\, DE};$$

luego, en todos los casos, es

$$\cos A = -\cos B \frac{\text{ch}\, DF}{\text{ch}\, DE};$$

y como $DF = DE \pm \gamma$, será

$$\cos A = -\cos B \frac{\text{ch}\,(DE \pm \gamma)}{\text{ch}\, DE},$$

$$\cos A = -\cos B\, \text{ch}\, \gamma \mp \cos B\, \text{sh}\, \gamma\, \text{th}\, DE.$$

Además, por ser $C = -\gamma i$, igualdad que equivale á la $\gamma = Ci$, se tiene $\text{ch}\, \gamma = \cos C$, $\text{sh}\, \gamma = i \operatorname{sen} C$; luego

$$\cos A = -\cos B \cos C \mp i \cos B \operatorname{sen} C\, \text{th}\, DE.$$

En esta fórmula, debe tomarse el signo *menos* cuando $DBE = 180° - B$ (figuras 203 y 204), y el signo *más*, si $DBE = B$ (figs. 205 y 206); y como el triángulo rectángulo DBE, proporciona, para estos dos casos, las respectivas igualdades

$$\text{th}\, DE = -\text{tang}\, B\, \text{sh}\, BE, \qquad \text{th}\, DE = \text{tang}\, B\, \text{sh}\, BE,$$

poniendo, en la última expresión de cos A, en vez de th DE el valor que acaba-

mos de hallar, y notando que cos B tang B = sen B, se obtiene, en ambos casos,

$$\cos A = -\cos B \cos C + i \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \operatorname{sh} BE.$$

Finalmente, como (por ser $BE = a - \frac{1}{2}\pi i$) es $\operatorname{sh} BE = -i \operatorname{ch} a$, resultará

$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \operatorname{ch} a.$$

CUARTO CASO. (Figs. 207, 208, 209 y 210). Suponemos, ahora, que el vértice C es ideal, y que la normal común γ á a y b es paralela á la recta c.

Designemos, como antes, por E y F las respectivas intersecciones de la recta γ con las a y b.

Márquese un punto D en la prolongación del segmento EF, pero situado de tal modo, que FD sea la dirección del paralelismo. Si E cae entre F y D (figuras 207 y 208), trácese la recta DA, que cortará al segmento BE en un pun-

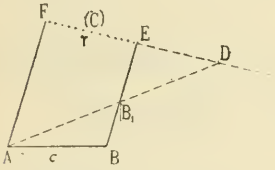


Fig. 207

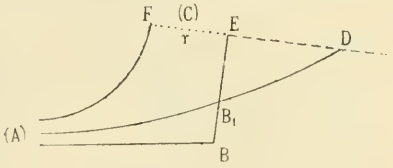


Fig. 208

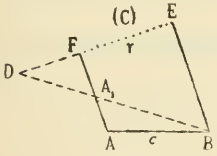


Fig. 209

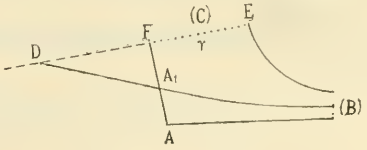


Fig. 210

to B_1; pero si F cae entre E y D (Figs. 209 y 210), trácese la recta DB, que cortará el segmento AF en un punto A_1. Cuando el punto D se aleje á una distancia arbitrariamente grande sobre la recta EF, hacia el lado del paralelismo, las respectivas posiciones de los puntos variables B_1 y A_1 tendrán por límites B y A; y por consiguiente, los triángulos variables AB_1C y A_1BC tendrán por límites el triángulo dado ABC. Pero todos los elementos (reales ó imaginarios) de estos triángulos permanecen siempre finitos; y como, además, en dichos triángulos variables (por tener ideal el vértice C, y cortarse γ y AB_1 ó A_1B en un punto propio)

se cumplen constantemente las cuatro fórmulas que estamos instituyendo, también se cumplirán en el límite, ó sea cuando dichos triángulos variables se reemplacen por el triángulo fijo ABC.

229. I. En el triángulo, cada ángulo puede expresarse mediante los tres ángulos. Por ejemplo, para A y a, se obtienen las fórmulas

$$\cos A = \frac{\operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} a}{\operatorname{sh} b \operatorname{sh} c}, \qquad \operatorname{ch} a = \frac{\cos B \cos C + \cos A}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C},$$

que resultan de despejar respectivamente cos A y ch a en las ecuaciones

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} a \cos A,$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \operatorname{ch} a.$$

II. También existen las notables relaciones

$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\operatorname{sh}(p-b)\operatorname{sh}(p-c)}{\operatorname{sh} b \operatorname{sh} c}, \qquad \operatorname{ch}^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\operatorname{sen}(D+B)\operatorname{sen}(D+C)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C},$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\operatorname{sh} p \operatorname{sh}(p-a)}{\operatorname{sh} b \operatorname{sh} c}, \qquad \operatorname{sh}^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\operatorname{sen} D \operatorname{sen}(D+A)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C},$$

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\operatorname{sh}(p-b)\operatorname{sh}(p-c)}{\operatorname{sh} p \operatorname{sh}(p-a)}, \qquad \operatorname{coth}^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\operatorname{sen}(D+B)\operatorname{sen}(D+C)}{\operatorname{sen} D \operatorname{sen}(D+A)},$$

en las cuales representa p el semiperimetro, y D el semi-defecto angular; es decir que

$$p = \tfrac{1}{2}(a+b+c), \qquad D = \tfrac{1}{2}\left[180^\circ - (A+B+C)\right].$$

Demostración. — Sustituyendo los valores hallados últimamente para cos A y ch a en las fórmulas

$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2}(1-\cos A), \qquad \operatorname{ch}^2 \tfrac{1}{2} a = \tfrac{1}{2}(\operatorname{ch} a + 1),$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2}(1+\cos A), \qquad \operatorname{sh}^2 \tfrac{1}{2} a = \tfrac{1}{2}(\operatorname{ch} a - 1),$$

resultan, por transformaciones trigonométricas, las 4 primeras ecuaciones del

enunciado; y de ellas se deducen las dos últimas, dividiendo $\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}A$ por $\cos^2\frac{1}{2}A$, y $\operatorname{ch}^2\frac{1}{2}a$ por $\operatorname{sh}^2\frac{1}{2}a$.

230. La gran analogía que, para los triángulos rectilíneos y esféricos, existe entre sus ecuaciones fundamentales, subsiste en toda la Trigonometría. Sirvan de ejemplo, además de las relaciones anteriores, todas las siguientes, que se demuestran por transformaciones trigonométricas, siguiendo el mismo procedimiento que se emplea para establecer las fórmulas correspondientes de los triángulos esféricos en los tratados de Trigonometría enclídea. En estas fórmulas, p y D tienen la misma significación que en el párrafo precedente, R es el radio del círculo circunscrito, y r el del inscrito.

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\operatorname{ch}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}c}, \qquad \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\operatorname{sh}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sh}\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}C}=\frac{\operatorname{ch}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}c}, \qquad \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}C}=\frac{\operatorname{sh}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{sh}\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)}{\cot\frac{1}{2}C}=\frac{\operatorname{ch}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}(a+b)}, \qquad \frac{\operatorname{th}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{th}\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)},$$

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B)}{\cot\frac{1}{2}C}=\frac{\operatorname{sh}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sh}\frac{1}{2}(a+b)}, \qquad \frac{\operatorname{th}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{th}\frac{1}{2}c}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)},$$

$$\cot^2\frac{1}{2}R=\frac{\operatorname{sen}(D+A)\operatorname{sen}(D+B)\operatorname{sen}(D+C)}{\operatorname{sen}D}$$

$$\operatorname{th}^2\frac{1}{2}r=\frac{\operatorname{sh}(p-a)\operatorname{sh}(p-b)\operatorname{sh}(p-c)}{\operatorname{sh}p}$$

$$\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}D=\operatorname{th}\frac{p}{2}\operatorname{th}\frac{p-a}{2}\operatorname{th}\frac{p-b}{2}\operatorname{th}\frac{p-c}{2}.$$

XII.—Longitud de un arco de ciclo.

231. Dijimos (217) que, en todas las fórmulas de la Trigonometría plana, la unidad de longitud es el metro natural; y en cuanto á la unidad angular es el

ángulo céntrico de un arco que, en la hipótesis enclideana, sea equivalente á su radio. Téngase, pues, en cuenta que á este sistema de unidades se refieren, no sólo las fórmulas que llevamos expuestas, relativas á los triángulos rectilíneos, sino también las que vamos á exponer, referentes á longitudes, áreas y volúmenes.

232. *La longitud* l *de un arco de círculo ó de hiperciclo, es igual al producto de su ángulo céntrico* α *por el seno hiperbólico de su radio* r. *Es lo que expresa la fórmula*

$$l = \alpha \operatorname{sh} r.$$

Demostración.—Para el arco AB del círculo, cuyo centro es O (fig. 211) son reales el ángulo céntrico $\alpha = AOB$ y el radio $r = OB$. Para el arco hiperciclar AB (fig. 212), cuyas alturas correspondientes á A y B son AE y BF, el centro O es ideal, el ángulo céntrico $\alpha = AOB$ tiene el valor imaginario $-FEi$, y el radio $r = OB$, imaginario también, vale $BF + \frac{1}{2}\pi i$ (223). Se trata de probar que para ambos ciclos, se cumple la fórmula del enunciado.

Márquese en el arco AB un punto C, y trácese BD normal á OC. Como

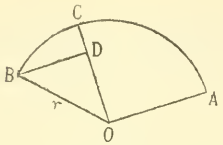


Fig. 211

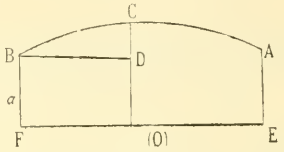


Fig. 212

los arcos de un mismo círculo, ó de un mismo hipercido, son proporcionales á sus ángulos céntricos, tendremos:

$$l : \alpha = \text{arc. CB} : \text{COB}, \qquad l = \alpha \frac{\text{arc. CB}}{\text{COB}}.$$

Además, como del triángulo (real ó ideal) DOB, rectángulo en D, se saca

$$\frac{\operatorname{sh} \text{BD}}{\operatorname{sen} \text{COB}} = \operatorname{sh} \text{OB} = \operatorname{sh} r,$$

la identidad

$$\frac{\text{arc. CB}}{\text{COB}} = \frac{2 \text{ arc. CB}}{2 \text{ BD}} \times \frac{\text{BD}}{\operatorname{sh} \text{BD}} \times \frac{\operatorname{sh} \text{BD}}{\operatorname{sen} \text{COB}} \times \frac{\operatorname{sen} \text{COB}}{\text{COB}},$$

se convierte en

$$\frac{\text{arc. CB}}{\text{COB}} = \frac{2 \text{ arc. CB}}{2 \text{ BD}} \times \frac{\text{BD}}{\operatorname{sh} \text{BD}} \times \operatorname{sh} r \times \frac{\operatorname{sen} \text{COB}}{\text{COB}}.$$

Si el arco CB tiende hacia cero, las tres últimas razones tienden hacia la unidad (pues, en la primera de estas tres, el antecedente es un arco, y el consecuente su cuerda; y las dos últimas razones son las que existen entre un arco y su seno hiperbólico, y entre un seno circular y su ángulo); luego, en el límite, el valor del segundo miembro es sh r, y como el primer miembro es constante, será

$$\frac{\text{arc. CB}}{\text{COB}} = \text{sh } r.$$

Sustituyendo el valor de esta razón en la igualdad $l = \alpha \dfrac{\text{arc CB}}{\text{COB}}$, encontrada antes, resulta $l = \alpha \text{ sh } r$.

Corolarios. 1.° *La longitud* c *de la circunferencia, cuyo radio es* r, *tiene por expresión* $c = 2\pi \text{ sh } r$.

Porque la circunferencia es un arco que tiene 2π por ángulo céntrico.

2.° *La longitud de un arco de hiperciclo vale el producto de su proyección normal sobre la base por el coseno hiperbólico de su altura.*

Designando, pues, (fig. 212) por b la distancia EF entre las dos alturas extremas del arco hiperciclar AB, por l la longitud de este arco, y por a su altura, tendremos

$$l = b \text{ ch } a.$$

Efectivamente, resulta esta fórmula de hacer en la igualdad $l = \alpha \text{ sh } r$, demostrada para el hiperciclo, las sustituciones $\alpha = -bi$ y $r = a + \frac{1}{2}\pi i$.

233. Conservando las notaciones precedentes, y designando además (figuras 213, 214 y 215) por d la distancia BD entre un extremo del arco AB y el radio que pasa por el otro extremo, se cumplirán las fórmulas siguientes:

Para el círculo ó hiperciclo, $\quad l = \dfrac{\alpha}{\text{sen } \alpha} \text{ sh } d;$

Para el horiciclo, $\quad l = \text{sh } d;$

Y para el hiperciclo, $\quad l = \dfrac{b}{\text{sh } b} \text{ sh } d.$

Demostración.—1.° Si se trata de un arco circular (fig. 213) ó de un arco hiperciclar (fig. 215), del triángulo DBO (real ó ideal) rectángulo en D, se saca $\text{sh } r = \dfrac{\text{sh } d}{\text{sen } \alpha}$; y sustituyendo este valor de sh r en la ecuación $l = \alpha \text{ sh } r$ (232), obtendremos la primera fórmula del enunciado.

2.° (Fig. 214). El arco de horiciclo AB es, en posición y longitud, el límite de cierto arco circular BX, que pasa constantemente por B, y cuyo centro O se

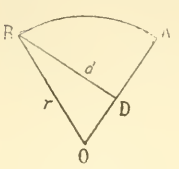


Fig. 213

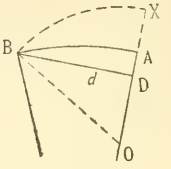


Fig. 214

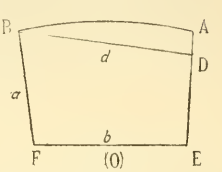


Fig. 215

aleja indefinidamente sobre AD, en la dirección AD. Mas, para este arco circular variable, el ángulo céntrico α es infinitamente pequeño; y, por lo tanto, la razón $\alpha : \operatorname{sen}\alpha$ tiende hacia 1; luego, en el límite, ó sea para el horiciclo, la longitud $(\alpha : \operatorname{sen}\alpha)\ \operatorname{sh} d$ del arco circular se convierte en $\operatorname{sh} d$.

3.° (Fig. 215). En el hiperciclo, es $\alpha = -bi$, $\operatorname{sen}\alpha = -i \operatorname{sh} b$; y sustituyendo estos valores de α y sen α en la primera fórmula del enunciado (que ya está demostrada) resulta la tercera.

XIII.—Áreas.

234. Sabemos (137-III.) que todos los triángulos de igual defecto angular son equivalentes. Por tanto, para medir las superficies, puede tomarse por unidad la superficie de un triángulo cuyo defecto sea igual á un ángulo determinado. Este ángulo no debe satisfacer á otra condición que la de no exceder á 180°, porque (138-*Obs.* 5.ª) el defecto de un triángulo puede variar desde 0 hasta 180°.

El área de una superficie, ó sea su tamaño, se determina mediante un número concreto, expresado en unidades superficiales. En este tratado de GEOMETRÍA HIPERBÓLICA, *siempre que se habla de áreas, debe sobreentenderse que se toma por unidad de longitud el metro natural; por unidad angular el ángulo céntrico del arco circular que, en la Hipótesis euclideana, sería equivalente á su radio; y por unidad de superficie la de un triángulo, cuyo defecto sea la unidad angular. Además, por brevedad, suele decirse «área de una superficie», «línea» ó «longitud de una línea» y «ángulo» á las respectivas razones de estas cantidades con su unidad.*

235. *El área de un polígono es igual á su defecto.*

Observemos, en primer lugar, que la traducción de este enunciado, incorrecto por brevedad, es la siguiente: *si se toma por unidad superficial el triángulo cuyo defecto es la unidad angular, el área de un polígono tiene por medida el valor numérico de su defecto.*

Demostración. —Entre la superficie del polígono P, la del triángulo unidad U y sus respectivos defectos p y u, se verifica (138) la proporción $P : U = p : u$; y como, según lo convenido, u es la unidad angular, las razones $P : U$ y $p : u$ son los respectivos valores numéricos del área del polígono y de su defecto angular. Luego estas dos razones son iguales.

236. 1. *El área* s *de un sector circular, que tenga* r *por radio,* α *por ángulo céntrico, y* l *por longitud de su arco, se expresa por cualquiera de las dos fórmulas*

$$s = 2\alpha \operatorname{sh}^2 \tfrac{1}{2} r , \qquad s = l \operatorname{th} \tfrac{1}{2} r .$$

Demostración. — (Fig. 216). Dividiendo el arco ADB del sector circular OADB en n partes iguales, y trazando las cuerdas correspondientes, se forma la línea quebrada regular ACDEB, en la cual se podrá inscribir una circunferencia HFG concéntrica con la ADB. El sector circular dado OADB es mayor que el polígono inscrito OACDEB; y la diferencia entre ambas superficies es menor que la porción del plano comprendida entre los radios OA, OB, el arco ADB y la circunferencia HFG, inscrita en aquella línea quebrada. Si el número n es variable y arbitrariamente grande, la diferencia FI entre el radio OI y la apotema OF, y por consiguiente la referida porción, serán arbitrariamente pequeñas; y lo mismo acontecerá, á forciori, á la diferencia entre el sector circular y el polígono inscrito OACDEB; luego, en el límite, estas dos figuras tienen igual área. Calculemos, pues, el área de dicho polígono, y el límite que adquiera, cuando el número variable n sea arbitrariamente grande, será el área del sector circular.

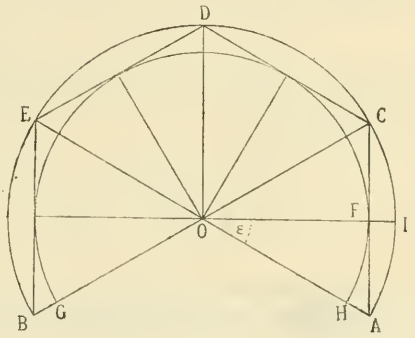


Fig. 216

Trazando los radios y las apotemas de la línea quebrada ACDEB, el polígono OACDEB queda descompuesto en $2n$ triángulos rectángulos iguales. Si OAF es uno de ellos, y designamos recpectivamente por ε y A las medidas de sus dos ángulos agudos AOF y FAO, el área del triángulo OAF será $\frac{1}{2}\pi - A - \varepsilon$; luego el área de todo el polígono OACDEB tendrá por expresión $2n\left(\frac{1}{2}\pi - A - \varepsilon\right)$, ó sea $2n\varepsilon\left(\frac{\frac{1}{2}\pi - A}{\varepsilon} - 1\right)$; y como $2n\varepsilon$ equivale á la

medida α del ángulo AOB, tendremos que el área x del referido polígono es

$$x = \alpha \left(\frac{\frac{1}{2}\pi - A}{\varepsilon} - 1 \right),$$

expresión idéntica á esta otra:

$$x = \alpha \left(\frac{\frac{1}{2}\pi - A}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi - A\right)} \times \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi - A\right)}{\operatorname{sen}\varepsilon} \times \frac{\operatorname{sen}\varepsilon}{\varepsilon} - 1 \right).$$

Además, la penúltima de estas razones vale ch OF, puesto que del triángulo rectángulo OAF se saca

$$\frac{\cos A}{\operatorname{sen}\varepsilon} = \operatorname{ch} OF, \quad \text{ó sea} \quad \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi - A\right)}{\operatorname{sen}\varepsilon} = \operatorname{ch} OF.$$

Por lo tanto,

$$x = \alpha \left(\frac{\frac{1}{2}\pi - A}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi - A\right)} \times \operatorname{ch} OF \times \frac{\operatorname{sen}\varepsilon}{\varepsilon} - 1 \right).$$

Si n es arbitrariamente grande, $\frac{1}{2}\pi - A$ y ε serán arbitrariamente pequeños; luego las dos razones de la última igualdad tendrán 1 por límite. En cuanto á OF tenderá hacia r. Tenemos, pues,

$$\lim. x = \alpha (\operatorname{ch} r - 1);$$

y como $\lim. x$ es igual al área s del sector circular, y además es $\operatorname{ch} r - 1 = 2 \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} r$, resulta $s = 2\alpha \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} r$, que es la primera de las dos fórmulas que nos proponíamos demostrar.

La segunda se deduce de la primera, mediante las siguientes transformaciones, que se fundan (232 y 208 I) en las relaciones $\alpha = \frac{l}{\operatorname{sh} r}$, $\operatorname{sh} r = 2 \operatorname{sh} \frac{1}{2} r \operatorname{ch} \frac{1}{2} r$:

$$s = 2\alpha \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} r = \frac{2l \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} r}{\operatorname{sh} r} = \frac{2l \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} r}{2 \operatorname{sh} \frac{1}{2} r \operatorname{ch} \frac{1}{2} r} = l \frac{\operatorname{sh} \frac{1}{2} r}{\operatorname{ch} \frac{1}{2} r} = l \operatorname{th} \frac{1}{2} r.$$

II. *El área del círculo se calcula por cualquiera de estas dos expresiones:*

$$s = 4\pi \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} r, \qquad s = c \operatorname{th} \frac{1}{2} r ,$$

en las cuales es r *el radio, y* c *la longitud de la circunferencia.*

Porque las fórmulas I son aplicables al círculo, pues este se convierte, cuando se traza uno de sus radios, en un sector circular, cuyo ángulo céntrico es 2π, y cuyo arco vale toda la circunferencia.

237. *El área de un sector de círculo límite es una cantidad finita, que tiene por medida la longitud del arco.*

Porque este sector es el límite de un sector circular, cuyo radio r crece arbitrariamente, tendiendo hacia ∞. Pero, en tal caso, es $\lim . \operatorname{th} \frac{1}{2} r = 1$; y en el límite, la fórmula $s = l \operatorname{th} \frac{1}{2} r$, se convierte en $s = l$.

238. (Fig. 217). *El área de un sector hiperciclar, es decir, de la superficie plana* ABQP, *limitada por un arco* AB *de hiperciclo, su base* PQ *y sus alturas extremas* AP *y* BQ, *está dada por las expresiones*

$$s = b \operatorname{sh} a , \qquad s = l \operatorname{th} a ,$$

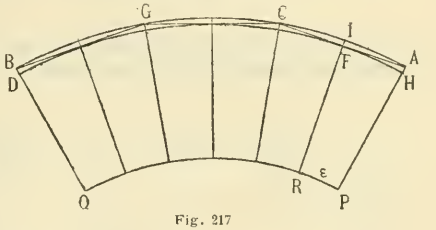


Fig. 217

en las que s *es el área,* l *la longitud del arco* AB, b *la de su proyección* PQ *sobre la base, y* a *la altura.*

Demostración. — Dividiendo el arco AB en partes iguales, y trazando las cuerdas correspondientes, se forma la línea quebrada regular ACGB, en la cual se podrá inscribir un hiperciclo HFD con la misma base PQ, y con su altura FR igual á la distancia FR entre esta base y el punto medio F de la cuerda AC. La superficie cuya área hemos designado por s, es mayor que el polígono inscrito PACGBQ; y la diferencia entre ambas superficies es menor que la porción del plano limitada por las dos alturas extremas AP y BQ, y los dos hiperciclos ACB y HFG. Si el número n es variable y arbitrariamente grande, la diferencia FI entre las alturas RI, RF, de estos dos hiperciclos, y por consiguiente la referida porción de plano, serán arbitrariamente pequeñas; y lo mismo acontecerá, á forciori, á la diferencia entre la superfiicie del enunciado y la del polígono inscrito PACGBQ; luego el área de la primera es el límite que adquiere el área de la segunda. Calculemos, pues, este límite.

Si por los vértices de la línea quebrada ACGB y por los puntos medios de sus lados se trazan normales á la base PQ del hiperciclo AB, el polígono

PACGBQ queda descompuesto en $2n$ cuadriláteros trirrectángulos iguales. Si AFRP es uno de ellos, y designamos por A la medida de su ángulo oblicuo FAP, y por ε la medida de la longitud PR, el área de dicho cuadrilátero será $\frac{1}{2}\pi - A$; luego el área de todo el polígono PACGBQ tendrá por expresión $2n\left(\frac{1}{2}\pi - A\right)$, ó sea $2n\varepsilon\dfrac{\frac{1}{2}\pi - A}{\varepsilon}$; y como $2n\varepsilon$ es el valos numérico b de la distancia PQ, tendremos que el área x del referido polígono es

$$x = b\,\frac{\frac{1}{2}\pi - A}{\varepsilon},$$

expresión idéntica á esta otra:

$$x = b\,\frac{\frac{1}{2}\pi - A}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi - A\right)} \times \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi - A\right)}{\operatorname{sh}\varepsilon} \times \frac{\operatorname{sh}\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Además, la penúltima de estas razones vale sh RF, puesto que del cuadrilátero trirrectángulo AFRP se saca (226·VI)

$$\frac{\cos A}{\operatorname{sh}\varepsilon} = \operatorname{sh} RF, \quad \text{ó sea} \quad \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi - A\right)}{\operatorname{sh}\varepsilon} = \operatorname{sh} RF.$$

Por lo tanto,

$$x = b\,\frac{\frac{1}{2}\pi - A}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi - A\right)} \times \operatorname{sh} RF \times \frac{\operatorname{sh}\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Si n es arbitrariamente grande, $\frac{1}{2}\pi - A$ y ε serán arbitrariamente pequeños; luego las dos razones de la última igualdad tendrán 1 por límite. En cuanto á RF tenderá hacia a. Tenemos, pues,

$$\lim. x = b \operatorname{sh} a;$$

y como $\lim. x$ es igual al área s del enunciado, resulta $s = b \operatorname{sh} a$, que es la primera de las dos fórmulas que nos proponíamos demostrar.

La segunda se obtiene eliminando b entre la primera y la ecuación $l = b \operatorname{ch} a$ (231·*Cor.* 2.°).

239. I. (Fig.s 218 á 221). Llamaré *trapecio ciclar* á la porción de plano limitada por un arco de ciclo AB, los dos radios que (prolongados, si es necesario)

pasan por sus extremos, y otro ciclo CD concéntrico con el primero. El contorno de esta figura se compone de dos arcos ciclares y concéntricos AB y CD (á los cuales llamaré *bases* del trapecio) y de dos segmentos rectilíneos AD, BC, cuya longitud común será la *altura* del mismo. El arco ciclar EF interior al trapecio, concéntrico con sus bases, y que biseca al segmento BC, biseca también al AD, y lo designaré con el nombre de *arco medio*.

II. *El área de un trapecio horiciclar tiene por medida la diferencia de sus bases.*

Porque este trapecio es la diferencia de dos sectores de círculo límite, que tienen por respectivos arcos las bases b y b_1 de aquel trapecio; y como (237) las áreas de estos sectores son b y b_1, la del trapecio será $b - b_1$.

III. (Fig.s 218, 219, 220 y 221). *El área* T *de un trapecio ciclar* ABCD *se expresa por la fórmula*

$$T = 2\, m\, \mathrm{sh}\, \tfrac{1}{2} a,$$

en la cual a *es la altura* BC, *y* m *la longitud del arco medio.*

Demostración.—Los arcos concéntricos AB y CD pueden ser de círculo

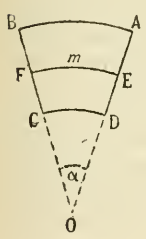


Fig. 218

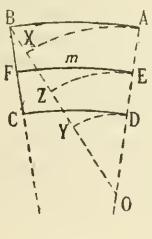


Fig. 219

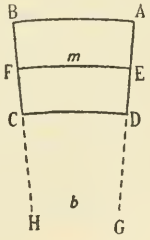


Fig. 220

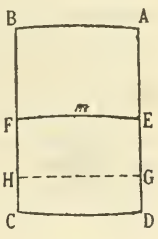


Fig. 221

(fig. 218), de horiciclo (fig. 219), ó de hiperciclo (fig.s 220 y 221). Examinemos separadamente estos tres casos.

1.° (Fig. 217). Si los arcos AB y CD son de círculo, el trapecio ciclar ABCD es la diferencia entre los dos sectores circulares OAB y ODC, cuyas respectivas áreas (si α designa su ángulo céntrico) son (236-I) $2\,\alpha\,\mathrm{sh}^2\,\frac{1}{2}\mathrm{OB}$ y $2\,\alpha\,\mathrm{sh}^2\,\frac{1}{2}\,\mathrm{OC}$. Por consiguiente, el área T del trapecio es

$$T = 2\,\alpha\left(\mathrm{sh}^2\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{OB} - \mathrm{sh}^2\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{OC}\right),$$

de cuya expresión, mediante las fórmulas 207 y las relaciones

$$\operatorname{sh}^2 \tfrac{1}{2} OB = \tfrac{1}{2} (\operatorname{ch} OB - 1), \qquad \operatorname{sh}^2 \tfrac{1}{2} OC = \tfrac{1}{2} \left(\operatorname{ch} \tfrac{1}{2} OC - 1\right)$$

$$\tfrac{1}{2} (OB + OC) = OF, \qquad \tfrac{1}{2} (OB - OC) = CF = \tfrac{1}{2} a,$$

se deduce sucesivamente:

$$T = \alpha (\operatorname{ch} OB - \operatorname{ch} OC) = 2 \alpha \operatorname{sh} \tfrac{1}{2} (OB + OC) \operatorname{sh} \tfrac{1}{2} (OB - OC),$$

$$T = 2 \alpha \operatorname{sh} OF \operatorname{sh} \tfrac{1}{2} a;$$

y de esta igualdad, teniendo presente (232) que $\alpha \operatorname{sh} OF$ es la longitud m del arco EF, resulta $T = 2 m \operatorname{sh} \frac{1}{2} a$.

2.° (Fig. 219). Si los arcos AB y CD son de horiciclo, márquese un punto O sobre el rayo AD, en la prolongación del segmento AD; trácese la recta OB y descríbase con centro O y radios OA, OD, OE, los arcos AX, DY, EZ del ángulo AOB. Se habrá formado, de este modo, un trapecio ciclar AXYD, cuyas bases AX y DY son arcos de círculo, y cuya área, según acabamos de probar, vale $2 EZ \operatorname{sh} \frac{1}{2} a$. Si la distancia AO se hace arbitrariamente grande, la posición límite del trapecio ciclar variable AXYD es el trapecio ciclar ABCD; y la del arco circular EZ, el arco horiciclar EF, de longitud m; luego este último trapecio tiene por área el límite de $2 EZ \operatorname{sh} \frac{1}{2} a$, ó sea $2 m \operatorname{sh} \frac{1}{2} a$.

3.° (Figs. 220 y 221). Supongamos, finalmente, que los arcos AB y CD son de hiperciclo, y designemos por b la longitud de su proyección normal HG sobre su base común. El trapecio ciclar ABCD es la diferencia (fig. 220) ó la suma (fig. 221) de las dos superficies ABHG y DCHG, cuyas respectivas áreas (238) son: $b \operatorname{sh} HB$ y $b \operatorname{sh} HC$. Por consiguiente, el área T de dicho trapecio es,

para la figura 220:	para la figura 221:
$T = b (\operatorname{sh} HB - \operatorname{sh} HC) =$	$T = b (\operatorname{sh} HB + \operatorname{sh} HC) =$
$2 b \operatorname{ch} \frac{1}{2} (HB + HC) \operatorname{sh} \frac{1}{2} (HB - HC);$	$2 b \operatorname{ch} \frac{1}{2} (HB - HC) \operatorname{sh} \frac{1}{2} (HB + HC);$
pero	pero
$\frac{1}{2} (HB + HC) = HF,$	$\frac{1}{2} (HB - HC) = HF,$
$\frac{1}{2} (HB - HC) = \frac{1}{2} a;$	$\frac{1}{2} (HB + HC) = \frac{1}{2} a;$

luego, en ambos casos,

$$T = 2\,b\,\text{ch HF}\,\text{sh}\tfrac{1}{2}a;$$

y de esta igualdad, teniendo presente (232-*Cor.* 2.°) que $b\,\text{ch HF} = m$, resulta $T = 2\,m\,\text{sh}\,\frac{1}{2}a$.

240. *En el cono de revolución, el área* s *de la superficie lateral es*

$$s = c\,\text{th}\tfrac{1}{2}l, \qquad \text{y también} \qquad s = 2\pi\,\text{sh}\,r\,\text{th}\tfrac{1}{2}l,$$

siendo l *el lado*, r *el radio de la base, y* c *la longitud de su circunferencia.*

Porque dicha superficie, después de cortarla á lo largo de uno de sus lados, y de extenderla sobre un plano, se convierte en un sector circular que tiene l por radio, y c por arco; luego (230-I) su área será $s = c\,\text{th}\frac{1}{2}l$; y como (232 *Cor.* 1.°) $c = 2\,\pi\,\text{sh}\,r$, también será $s = 2\,\pi\,\text{sh}\,r\,\text{th}\frac{1}{2}l$.

Corolario.—*En el cono de revolución, cuyo vértice está infinitamente lejano, el área de la superficie lateral tiene por medida la circunferencia de la base.*

Porque, en este caso, el lado l del cono es infinito, $\text{th}\frac{1}{2}l = 1$; y la fórmula $s = c\,\text{th}\frac{1}{2}l$, que acabamos de instituir, se convierte en $s = c$.

241. Si las rectas a y b están en un mismo plano, y permaneciendo invariablemente unidas, la recta a da una vuelta completa alrededor de la b, describe una superficie cónica de revolución, cuyo vértice es el punto en que se cortan aquellas rectas; y por consiguiente, puede ser geométrico, límite ó ideal. Esta superficie cónica tiene un paralelo nulo, si el vértice es geométrico; y si es ideal, un paralelo mínimo (ó circunferencia de garganta) que es el descrito por el pie móvil de la normal común á dichas rectas. Pero si el vértice está infinitamente distante, la superficie cónica no tiene ningún paralelo mínimo, si bien es cierto que la longitud de un paralelo decrece y tiende hacia cero, cuando su centro se aleja á una distancia arbitrariamente grande sobre el eje b, en la dirección del paralelismo. Desarrollando estas tres superficies cónicas, después de cortarlas á lo largo de uno de sus lados, se obtienen los desarrollos siguientes.

Si el vértice es un punto geométrico, la superficie cónica consta de dos hojas: cada una de ellas se desarrolla según un ángulo; y sus diversos paralelos, según arcos circulares de este ángulo.

Si el vértice está infinitamente lejano, el desarrollo es una faja de plano, comprendida entre dos rectas paralelas; y los diversos paralelos se convierten en arcos de horiciclo, cuyo centro común es el punto límite de dichas paralelas.

En fin, si el vértice es ideal, el desarrollo será una faja de plano, limitada por dos rectas que tienen una normal común; y los diversos paralelos de la superficie cónica se transforman en arcos de hiperciclo, cuya base común es dicha

normal. En particular, la porción de ésta, comprendida dentro de la faja, es el desarrollo de la circunferencia de garganta.

(Fig. 222). Si el segmento de recta AB, situado con el eje *y* en un mismo plano, gira alrededor de este eje, describe una *zona cónica de revolución,* cuyas orillas son las circunferencias AEH, BGJ descritas por los extremos A y B; y que tiene por *altura* la distancia A′B′ entre los centros de sus orillas, por *lados* los meridianos, ó sean las diversas posiciones del segmento generador AB, y por *circunferencia media* la CFI que describe el punto medio C de AB, en su revolución alrededor del eje. De lo dicho antes sobre la superficie cónica total, se infiere que la zona cónica de revolución (de una sola hoja) después de cortarla á lo largo de uno de sus lados, se desarrolla según un trapecio ciclar, cuyas bases y arco medio son respectivamente las lineas en que se transforman las orillas y la circunferencia media de la zona.

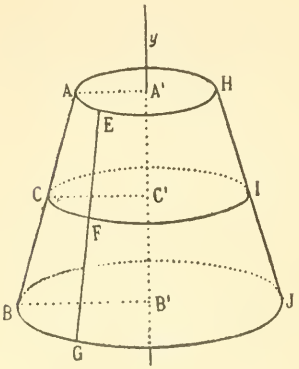


Fig. 222

242. I. *El área de una zona cónica de revolución, cuyo vértice sea un punto límite, tiene por medida la diferencia de sus orillas.*

Porque esta zona es la diferencia entre las superficies laterales de dos conos de revolución cuyas circunferencias de la base son las orillas de la zona, y con el mismo vértice que ella; pero (240-*Cor.*) estas orillas expresan las medidas de aquellas superficies laterales; luego etc.

II. *El área* s *de una zona cónica de revolución (de una sola hoja) puede expresarse, mediante su lado* l *y la longitud* m *de su circunferencia media, ó en función de su lado, y el radio* r *de esta circunferencia, por las fórmulas*

$$s = 2\,m\,\mathrm{sh}\,\tfrac{1}{2}\,l, \qquad s = 4\,\pi\,\mathrm{sh}\,r\,\mathrm{sh}\,\tfrac{1}{2}\,l.$$

Demostración — Cortando dicha zona á lo largo de uno de sus lados, y desarrollándola, se convierte en un trapecio ciclar, cuyo arco medio tiene la longitud *m*, y cuya altura es *l*. Luego el área de la zona será la de este trapecio ciclar, y eso es lo que (239 - III) expresa la primera fórmula. La segunda se obtiene sustituyendo, en la primera, *m* por su igual $2\pi\,\mathrm{sh}\,r$ (232 - *Cor. 1.°*).

243. (Fig. 223). *Cuando un ciclo* CP *gira alrededor de uno de sus ejes* PD, *todo segmento* AB *de recta, tocado en su punto medio* C *por el ciclo, y to-*

talmente situado á un mismo lado de dicho eje, describe una zona cónica, cuya área s *es*

$$s = 4\,\pi\,\mathrm{sh}^2\tfrac{1}{2}\,a - 4\,\pi\,\mathrm{sh}^2\tfrac{1}{2}\,b,$$

si a *y* b *designan las respectivas distancias* AP *y* BP *de los extremos del segmento* AB *á la intersección* P *del ciclo con el eje de revolución* PD.

Demostración — Sea E la proyección normal de C sobre el eje PD. Trácese la cuerda PC, cuya longitud designaremos por x, y la tangente PF en P al ciclo. La cuerda PC forma con las tangentes, en sus extremos, dos ángulos agudos iguales PCB y FPC, (designados en la figura por α) que son complementos del CPE. La zona cónica, descrita por AB, tiene CE por radio de su circunferencia media; y así, entre su área s, su semilado BC = CA (al cual llamaré d) y CE, existe (242-I.), la relación

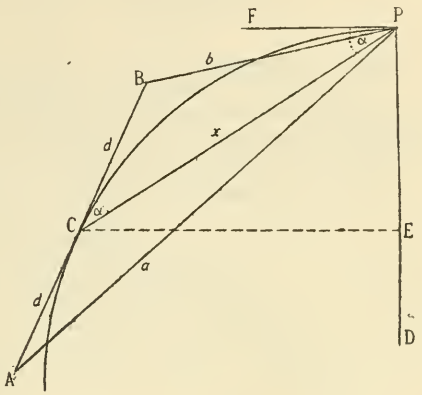


Fig. 223

$$s = 4\,\pi\,\mathrm{sh}\,d\,\mathrm{sh}\,\mathrm{CE}\,.$$

Por otra parte, del triángulo rectángulo CPE (cuyo ángulo CPE es complemento de α) se saca

$$\mathrm{sh}\,\mathrm{CE} = x\,\mathrm{sen}\,\mathrm{CPE}, \qquad \text{ó} \qquad \mathrm{sh}\,\mathrm{CE} = \mathrm{sh}\,x\,\cos\alpha;$$

luego

$$s = 4\,\pi\,\mathrm{sh}\,d\,\mathrm{sh}\,x\,\cos\alpha.$$

Además, los triángulos PAC, PBC proporcionan las ecuaciones

$$\mathrm{ch}\,d\,\mathrm{ch}\,x + \mathrm{sh}\,d\,\mathrm{sh}\,x\,\cos\alpha = \mathrm{ch}\,a,$$

$$\mathrm{ch}\,d\,\mathrm{ch}\,x - \mathrm{sh}\,d\,\mathrm{sh}\,x\,\cos\alpha = \mathrm{ch}\,b,$$

que, restadas ordenadamente, dan

$$2\,\mathrm{sh}\,d\,\mathrm{sh}\,x\,\cos\alpha = \mathrm{ch}\,a - \mathrm{ch}\,b\,.$$

Sustituyendo este valor de $2 \operatorname{sh} d \operatorname{sh} x \cos \alpha$ en la última expresión de s, resulta

$$s = 2\pi (\operatorname{ch} a - \operatorname{ch} b);$$

y finalmente, haciendo en esta ecuación las sustituciones

$$\operatorname{ch} a = 2 \operatorname{sh}^2 \tfrac{1}{2} a + 1, \qquad \operatorname{ch} b = 2 \operatorname{sh}^2 \tfrac{1}{2} b + 1,$$

se halla, tras fáciles reducciones, la fórmula del enunciado.

244. I. (Fig. 224). Cuando un arco de ciclo PM gira alrededor del radio PO, que pasa por uno de sus extremos, describe un trozo de superficie esférica, horisférica ó hiperesférica, al cual llamaremos *casquete* de dicha superficie; y en él consideraremos como *base* la circunferencia descrita por el extremo móvil M, y como *altura* la distancia PQ del punto P al plano de la base.

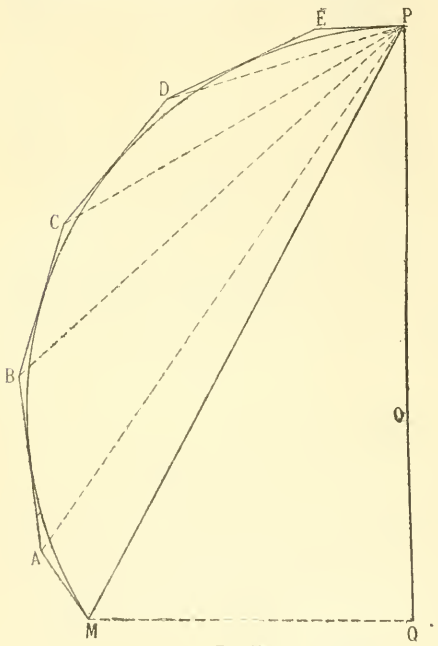


Fig. 224

II. *Todo casquete de esfera, horisfera ó hiperesfera equivale á un círculo, cuyo radio es la cuerda* PM *de su arco meridiano* PCM.

Demostración. — Dividiendo este arco en un número de partes iguales, suficientemente grande, las tangentes en los extremos y en los puntos de división, al limitarse mutuamente, forman una línea quebrada regular ABCDE circunscrita al ciclo, y terminada en las tangentes PE, MA de los extremos del arco. Si esta línea quebrada da una vuelta completa alrededor del eje PO, engendra una superficie compuesta de las zonas que describen sus diferentes lados. Las áreas de las superficies que describen la línea quebrada ABCDE y sus lados AB, BC,..... las designaremos respectivamen-

te por (ABCDE), (AB), (BC), ...; y con estas notaciones podremos escribir (243) las siguientes igualdades:

$$(AB) = 4\pi \operatorname{sh}^2 \tfrac{1}{2} PA - 4\pi \operatorname{sh}^2 \tfrac{1}{2} PB,$$

$$(BC) = 4\pi \operatorname{sh} \tfrac{1}{2} PB - 4\pi \operatorname{sh}^2 \tfrac{1}{2} PC,$$

$$(CD) = 4\pi \operatorname{sh} \tfrac{1}{2} PC - 4\pi \operatorname{sh}^2 \tfrac{1}{2} PD,$$

$$(DE) = 4\pi \operatorname{sh} \tfrac{1}{2} PD - 4\pi \operatorname{sh}^2 \tfrac{1}{2} PE.$$

Sumándolas ordenadamente, se obtiene

$$(ABCDE) = 4\pi \operatorname{sh}^2 \tfrac{1}{2} PA - 4\pi \operatorname{sh}^2 \tfrac{1}{2} PE.$$

Esta fórmula subsiste, por grande que sea el número de partes iguales en que se haya dividido el arco PM; luego también subsistirá en el límite, es decir, cuando ese número sea arbitrariamente grande; pero, en tal caso, para los elementos variables de la figura, se tienen los límites siguientes: para la línea quebrada ABCDE, el arco PM; para PA, la distancia PM; para PE, cero; y para la zona que describe la línea quebrada, el casquete que describe el arco PM. Tomando, pues, los límites de ambos miembros en la última igualdad, y designando por s el área de dicho casquete, tendremos:

$$s = 4\pi \operatorname{sh}^2 \tfrac{1}{2} PM,$$

igualdad cuyo segundo miembro es (236 II.) el área de un círculo, que tenga por radio PM, ó sea la cuerda que, en el casquete, tiene el arco meridiano.

III. *La superficie esférica, de radio* r, *tiene por área* $4\pi \operatorname{sh}^2 r$; *y equivale á un círculo que tenga por radio el diámetro de la esfera.*

Porque la superficie esférica total puede considerarse como un casquete cuyo arco meridiano es media circunferencia.

IV. *Dos superficies esféricas son entre sí como los cuadrados de sus circunferencias máximas.*

Efectivamente, entre las áreas s y s_1 de dos superficies esféricas, sus radios r y r_1 y sus circunferencias máximas c y c_1 existen (244—III. y 232—*Cor.* 1.°) las relaciones

$$s = 4\pi \operatorname{sh}^2 r, \qquad c = 2\pi \operatorname{sh} r,$$

$$s_1 = 4\pi \operatorname{sh}^2 r_1, \qquad c_1 = 2\pi \operatorname{sh} r_1,$$

de las cuales, se deduce, sucesivamente,

$$\frac{s}{s_1} = \frac{\operatorname{sh}^2 r}{\operatorname{sh}^2 r_1}, \qquad \frac{c^2}{c_1^2} = \frac{\operatorname{sh}^2 r}{\operatorname{sh}^2 r_1}, \qquad \frac{s}{s_1} = \frac{c^2}{c_1^2}.$$

245. (Fig. 225). Sean AB un arco de horiciclo, AM y BN los radios terminados en A y B, y C la proyección normal de A sobre BN. Si el arco AB gira alrededor de BN, describe un casque horisférico, que tiene (arco BA) $= l$ por meridiano, BA $= c$ por cuerda de este arco, AC $= b$ por radio de la base, y BC $= a$ por altura.

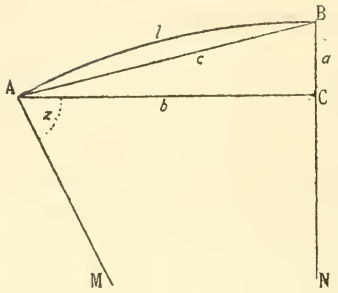


Fig. 225

El área s *de un casquete horisférico puede expresarse mediante la cuerda* c *de su arco meridiano, ó la longitud* l *de este arco, ó el radio* b *de la base, ó la altura* a, *valiéndose de las fórmulas*

$$s = 4\pi \operatorname{sh}^2 \tfrac{1}{2} c, \qquad s = \pi l^2, \qquad s = \pi \operatorname{sh}^2 b, \qquad s = \pi \left(e^{2a} - 1\right).$$

Demostración.—La primera fórmula ya fué instituída; y haciendo en ella (233) la sustitución $\operatorname{sh} \frac{1}{2} c = \frac{1}{2} l$, resulta $s = \pi l^2$. poniendo en esta ecuación, en vez de l su igual sh b, se obtiene inmediatamente $s = \pi \operatorname{sh}^2 b$. Y, finalmente, por ser (221-*Obs.*) ch $b = e^a$, deduciremos

$$\operatorname{ch}^2 b = e^{2a}, \qquad \operatorname{sh}^2 b = e^{2a} - 1;$$

y sustituyendo este valor de $\operatorname{sh}^2 b$ en la expresión $s = \pi \operatorname{sh}^2 b$, resulta $s = \pi \left(e^{2a} - 1\right)$.

246. I. (Figs. 226 y 227). *El área* s *del casquete esférico ó hiperesférico* (AB), *puede expresarse mediante su radio (real ó imaginario)* r *y la distancia* OC *de su base* (AC) *al centro* O, *valiéndose de la fórmula*

$$s = 2\pi \operatorname{sh} r \,(\operatorname{sh} r - \operatorname{ch} r \operatorname{th} \mathrm{OC}).$$

Demostración.—Si D es el punto medio de la cuerda AB, tenemos (244 y 227-II y III)

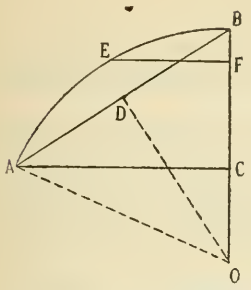


Fig. 226

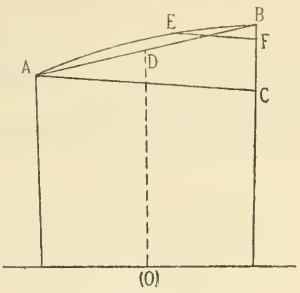


Fig. 227

$$s = 4\,\pi\,\mathrm{sh}^2\,\mathrm{BD} = 4\,\pi\,\mathrm{sh}^2\,r\,\mathrm{sen}^2\,\mathrm{BOD} = 2\,\pi\,\mathrm{sh}^2\,r\,(1 - \cos\,\mathrm{BOA})$$

$$= 2\,\pi\,\mathrm{sh}^2\,r\,(1 - \mathrm{th\,OC\,coth}\,r) = 2\,\pi\,\mathrm{sh}\,r\,(\mathrm{sh}\,r - \mathrm{ch}\,r\,\mathrm{th\,OC});$$

luego &.

II. (Fig.s 226 y 227). *El área* s *de una zona esférica ó hiperesférica de revolución* (AE), *puede expresarse mediante su radio* (*real ó imaginario*) r, *la altura* CF *y las distancias* (*reales ó imaginarias*) OC, OF *de sus bases* (AC) *y* (EF) *al centro* O, *empleando la fórmula,*

$$s = \pi\,\mathrm{sh}\,2\,r\,\frac{\mathrm{sh\,CF}}{\mathrm{ch\,OF\,ch\,OC}}.$$

Demostración. — La zona (AE) es la diferencia de los casquetes (AB) y (AE); y por esto, y por la fórmula I, podremos afirmar la relación

$$s = 2\,\pi\,\mathrm{sh}\,r\,(\mathrm{sh}\,r - \mathrm{ch}\,r\,\mathrm{th\,OC}) - 2\,\pi\,\mathrm{sh}\,r\,(\mathrm{sh}\,r - \mathrm{ch}\,r\,\mathrm{th\,OF}),$$

ó

$$s = 2\,\pi\,\mathrm{sh}\,r\,\mathrm{ch}\,r\,(\mathrm{th\,OF} - \mathrm{th\,OC});$$

y haciendo las sustituciones

$$2\,\mathrm{sh}\,r\,\mathrm{ch}\,r = \mathrm{sh}\,2\,r, \quad \mathrm{th\,OF} - \mathrm{th\,OC} = \frac{\mathrm{sh\,(OF - OC)}}{\mathrm{ch\,OF\,ch\,OC}},$$

resulta la fórmula del enunciado.

III. (Fig. 228). *El área* s *de la zona esférica ó hiperesférica de revolución* (AA_1) *se expresa también por la fórmula*

$$s = 4\,\pi\,\mathrm{sh\,MN\,sh}\,\tfrac{1}{2}\,AA_1$$

en la cual AA_1 *es la cuerda del arco meridiano, y* MN *la distancia del punto medio de este arco al eje.*

Demostración. — Sean C y C_1 los respectivos puntos medios de las cuerdas BA y BA_1. Expresando que el área s de la zona (AA_1) es la diferencia entre las áreas de los casquetes (AB) y (A_1B), tenemos

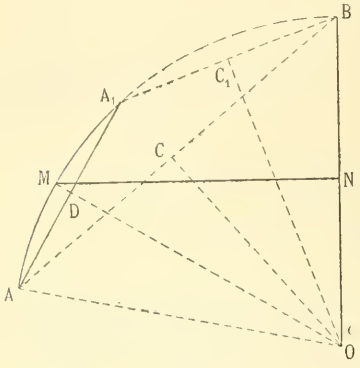


Fig. 228

$$s = 4\,\pi\,\mathrm{sh^2\,BC} - 4\,\pi\,\mathrm{sh^2\,BC_1},$$

$$s = 4\,\pi\,(\mathrm{sh^2\,BC} - \mathrm{sh^2\,BC_1});$$

y haciendo en esta última igualdad las sustituciones

$$\mathrm{sh\,BC} = \mathrm{sh}\,r\,\mathrm{sen\,BOC},$$

$$\mathrm{sh\,BC_1} = \mathrm{sh}\,r\,\mathrm{sen\,BOC_1},$$

que proporcionan los triángulos rectángulos BOC, BOC_1 (cuya hipotenusa OB, real ó imaginaria, es el radio r de la esfera ó hiperesfera), se obtiene

$$s = 4\,\pi\,\mathrm{sh^2}\,r\,(\mathrm{sen^2\,BOC} - \mathrm{sen^2\,BOC_1}),$$

igualdad que, por ser

$$\mathrm{sen^2\,BOC} = \tfrac{1}{2}\,(1 - \cos\mathrm{BOA}), \qquad \mathrm{sen^2\,BOC_1} = \tfrac{1}{2}\,(1 - \cos\mathrm{BOA_1}),$$

se convierte en

$$s = 2\,\pi\,\mathrm{sh^2}\,r\,(\cos\mathrm{BOA_1} - \cos\mathrm{BOA});$$

pero

$$\cos\mathrm{BOA_1} - \cos\mathrm{BOA} = 2\,\mathrm{sen}\,\tfrac{1}{2}\,(\mathrm{BOA} + \mathrm{BOA_1})\,\mathrm{sen}\,\tfrac{1}{2}\,(\mathrm{BOA} - \mathrm{BOA_1})$$

$$= 2\,\mathrm{sen\,BOM\,sen\,MOA};$$

luego

$$s = 4\,\pi\,(\text{sh}\ r\ \text{sen BOM})\ (\text{sh}\ r\ \text{sen MOA}).$$

En fin, sustituyendo en esta ecuación los productos incluidos en los paréntesis por los valores que expresan las igualdades

$$\text{sh}\ r\ \text{sen BOM} = \text{sh MN}, \qquad \text{sh}\ r\ \text{sen MOA} = \text{sh}\ \tfrac{1}{2}\ \text{AA}_1,$$

que se sacan de los triángulos rectángulos (geométricos ó ideales) OMN y OAD (D es el medio de la cuerda AA_1), resulta la fórmula que nos proponíamos demostrar.

247. *El cuadrado horisférico, cuyo lado tenga la longitud del metro natural, tiene su superficie equivalente á la del triángulo cuyo defecto es la unidad angular* (234). (*)

Demostración — Sabemos (194-II) que las leyes de la Geometría euclídea, relativas á las figuras planas, se cumplen para las correspondientes figuras trazadas sobre la horisfera. Por consiguiente, si tomamos por unidad de superficies el cuadrado horisférico que tenga su lado equivalente al metro natural, el casquete horiférico, cuyo arco meridiano valga l unidades de longitud, tendrá por área $\pi\, l^2$. Pero (245) este mismo valor tiene dicha área, cuando la unidad de superficie es el triángulo plano, cuyo defecto es la unidad angular (234); luego este triángulo y aquel cuadrado horisférico tienen igual extensión superficial.

248. (Fig. 229). Sean AB un arco de hiperciclo, CD su base, y AD y BC sus alturas extremas. Si el cuadrilátero mixtilíneo ABCD da una vuelta completa alrededor de CD, describe un cuerpo de revolución, al cual daremos el nombre de *pseudo-cilindro*. Su radio será la altura AD del hiperciclo; sus *bases* los círculos descritos por AD y BC; su *attura* la distancia CD; su *superficie lateral* la descrita por el arco AB; y sus *lados* las diversas posiciones que adquiere aste arco, en su revolución alrededor del eje CD.

La superficie lateral de un psendo-cilindro tiene por medida el producto de multiplicar por su lado l *la circunferencia de la base, ó por su altura* a *la semicircunferencia cuyo radio es el diámetro* 2r *de dicha base. Es decir, que, designando por* s *el área de aquella superficie, será*

$$s = 2\,\pi\ \text{sh}\ r \times l, \qquad s = \pi\ \text{sh}\ 2\,r \times a.$$

Demostración. — Dividiendo el arco de hiperciclo AB en n partes iguales, y trazando las cuerdas correspondientes, se forma una línea quebrada regular

(*) Este principio da un medio facilísimo para expresar las áreas de las figuras horisféricas.

AEFGHB, que, si da una vuelta completa alrededor del eje CD (base de aquel hiperciclo) describe una superficie, compuesta de las zonas que describen sus diferentes lados. Sean I el punto medio de la cuerda AE, é IJ la distancia de I á la base del hiperciclo. La zona descrita por la cuerda AE (242-II) tiene por área $4\,\pi$ sh IJ sh $\frac{1}{2}$ AE; y, por consiguiente, la que describe la línea quebrada regular AEFGHB, compuesta de n lados, será

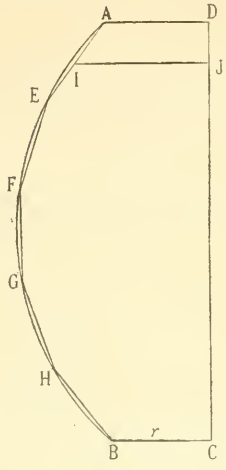


Fig. 229

$$4\,\pi \text{ sh IJ sh } \tfrac{1}{2}\text{ AE} \times n =$$

$$2\,\pi \text{ sh IJ } \frac{\text{sh } \frac{1}{2}\text{ AE}}{\frac{1}{2}\text{ AE}} (\text{AE} \times n)$$

Si el número n de partes iguales en que se ha dividido el arco, es arbitrariamente grande, $\frac{1}{2}$ AE será arbitrariamente pequeño; y para los elementos variables de la figura, se tendrán los siguientes límites: para IJ el radio AD $= r$ del pseudo-cilindro; para la razón sh $\frac{1}{2}$ AE : $\frac{1}{2}$ AE, la unidad; para el perímetro AE $\times n$ de la línea quebrada inscrita en el arco AB de hiperciclo, la longitud l de este arco; y para la superficie que describe la línea quebrada, la que describe el arco. El área s de esta superficie es, pues, el límite de la última expresión; luego $s = 2\pi$ sh $r \times l$, que es la primera fórmula del enunciado. La segunda se obtiene, tras fáciles transformaciones, sustituyendo, en la primera, l por su igual a ch r (232-*Cor.* 2.°) (a es la altura DC del pseudo-cilindro).

249. I. (Fig 230). Al cuerpo limitado por dos trozos de superficies horisféricas, ABCD y EFGH, del mismo centro, y una zona prismática ó cilíndrica, cuyas aristas ó lados se dirijan hacia dicho centro, le llamaremos *prisma horisférico* ó *cilindro horisférico*, según que el contorno ABCD esté constituído por arcos de horiciclo ó por otra curva cualquiera. En este cuerpo, consideraremos como *aristas laterales* ó *lados* los segmentos AE, BF, CG, DH que reciben estas mismas denominaciones en aquella zona prismática ó cilíndrica; como *superficie lateral* la de esta zona; como *bases* las dos fa-

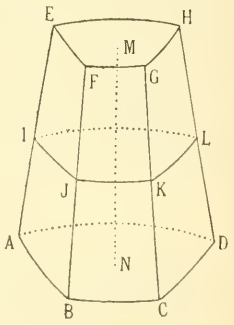


Fig. 230

cetas horisféricas ABCD y EFGH; como *altura* la longitud común de las porciones AE, BF y NM,..... de los ejes, limitadas por las bases; y como *sección media* la IJKL producida en el prisma ó cilindro por la superficie horisférica que biseca una arista ó lado AE, y es concéntrica con las bases.

II. *En todo prisma ó cilindro horisféricos, cuya altura sea* a, *la razón de la base mayor á la menor vale* e^{2a}, *ó sea el dignando del duplo de la altura.*

Demostración. —(Fig. 230). Si AE es la dirección del paralelismo de las aristas laterales ó lados, en las bases ABCD, EFGH, las razones AB : EF, BC : FG, AN : EM,..... entre cada dos arcos de horiciclo correspondientes son iguales al dignando de la altura $AE = a$ (214) el cual (218) vale e^{a}. Por consiguiente, como las leyes de la Geometría enclídea, relativas á las figuras planas, son aplicables á las figuras horisféricas (194-II) las bases ABCD, EFGH pueden ser consideradas como superficies semejantes, cuya razón de semejanza sea e^{a}; y afirmar, por lo tanto, que la razón de sus áreas es igual al cuadrado de la razón de semejanza, es decir, á e^{2a}. Tenemos, pues, $ABCD : EFGH = e^{2a}$; y esto es lo que se quería demostrar, puesto que (218) e^{2a} (que vale más de 1) es el dignando de $2a$; y además es $ABCD > EFGH$, por ser $ABCD : EFGH > 1$.

III. (Fig. 230). *En todo prisma ó cilindro horisféricos, la diferencia* ABCD — EFGH *de las bases es igual al duplo producto de la sección media* IJKL *por el seno hiperbólico de su altura* AE.

Demostración.—La sección media IJKL divide al prisma dado AH en otros dos, de alturas iguales á la mitad de la altura AE; y entre las bases de estos prismas parciales, se verifican (II) las relaciones

$$ABCD : IJKL = e^{AE}, \qquad IJKL : EFGH = e^{AE},$$

de las cuales se deduce

$$ABCD = IJKL \times e^{AE}, \qquad EFGH = IJKL \times e^{-AE}.$$

Restando ordenadamente estas dos últimas igualdades, se halla sucesivamente

$$ABCD - EFGH = IJKL\left(e^{AE} - e^{-AE}\right) = 2\,IJKL\,\frac{e^{AE} - e^{-AE}}{2};$$

luego

$$ABCD - EFGH = 2\,IJKL\ \mathrm{sh}\,AE,$$

que es lo que se afirma en el enunciado.

IV. *Dos prismas, ó dos cilindros, ó un prisma y un cilindro (todos ellos*

horisféricos) que tengan igual altura y equivalentes sus bases mayores, tendrán equivalentes sus bases menores, y también sus secciones medias.

Efectivamente, en estos prismas ó cilindros de altura a, los cociente de dividir cada base mayor por la menor son iguales, pues todos valen (249, II) e^{2a}; y como, por hipótesis, los dividendos son cantidades iguales, lo mismo ocurrirá á los divisores, ó sea á las bases menores. Además, las secciones medias serán equivalentes, porque (249 - III) su extensión depende tan sólo de lo que valgan las dos bases y la altura; y estas tres cantidades son las mismas en los dos prismas ó cilindros de que se trata.

XIII.—Volúmenes.

250. *Dos prismas, ó dos cilindros, ó un prisma y un cilindro (todos ellos horisféricos) de igual altura, y cuyas bases mayores sean equivalentes, tienen igual volumen.*

Se demuestra de igual modo que, en la Geometría euclídea, la misma proposición referente á los prismas y cilindros propiamente dichos.

251. I. *Dos prismas, ó dos cilindros, ó un prisma y un cilindro (todos ellos horisféricos) de igual altura, son entre sí como sus bases mayores.*

Demostración.—Sean p y q los dos prismas ó cilindros horisféricos, y b y b_1 sus respectivas bases mayores. Imagínense (figs. 231 y 232) dos prismas horisféricos ABCDEFGH é IJKLMNOP, de la misma altura que los prismas ó cilindros propuestos, y cuyas bases mayores ABCD é IJKL sean rectángulos horisféricos respectivamente equivalentes á b y b_1. y tengan iguales las dimensiones BC y JK. De estos supuestos, y del principio 250, se infiere que el prisma AG equivale á p, y el prisma IO á q. Bastará, por consiguiente, establecer que la razón de los dos prismas cuadrangulares AG é IO es igual á la razón de sus bases

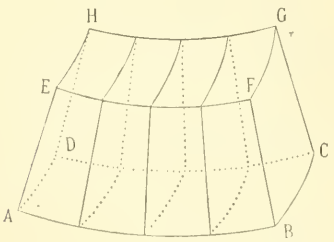


Fig. 231

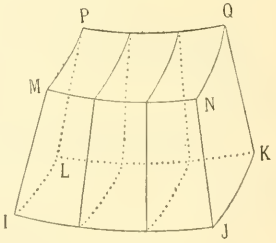


Fig. 232

mayores ABCD é IJKL. Esto advertido, pueden ocurrir dos casos: que los arcos AB é IJ sean comensurables, ó que no lo sean.

1.° Si los arcos AB é IJ son comensurables, (fig.s 231 y 232), dividámoslos en partes iguales á su medida común; y, por los puntos de división, tracemos, en cada una de las bases ABCD é IJKL, arcos de horiciclo respectivamente paralelos á los lados BC y JK, con lo cual dichas bases quedarán divididas en rectángulos iguales. Si la medida común de los arcos AB é IJ está contenida m veces en AB, y n veces en IJ, cualquiera de aquellos rectángulos parciales estará contenido m veces en la base ABCD, y n veces en la IJKL; por cuyo motivo, será

$$\text{ABCD} : \text{IJKL} = m : n .$$

Los planos de los horiciclos auxiliares dividen al prisma AG en m prismas horisféricos, y al IO en n; y todos estos prismas parciales son superponibles; luego

$$(\text{prisma AG}) : (\text{prisma IQ}) = m : n.$$

Y de las dos igualdades anteriores, se deduce la proporción

$$(\text{prisma AG}) : (\text{prisma IQ}) = \text{ABCD} : \text{IJKL},$$

que se quería demostrar

2.° (Figs, 232 y 233). Si los dos arcos AB é IJ son incomensurables, designemos por α la n-ava parte del IJ. El otro arco AB no será un múltiplo de α; pero se compondrá de un arco BV múltiplo de α, y de un resto $\text{VA} < \alpha$. El arco de horiciclo VX, paralelo al BC, divide al rectángulo horisférico ABCD en otros dos BVXC y AVXD; y el plano del arco VX divide al prisma horisférico AG en otros dos prismas VBCXZFGY y AVXDEZYH. Si n es un número variable arbitrariamente grande, el arco α (n-ava parte del IJ) será arbitrariamente pequeño, y lo mismo acontecerá, á forciori, al arco VA, al rectángulo horisférico AVXD y al prisma horisférico AVXDEZYH; luego, para (lím. de n) $= \infty$, se tendrá:

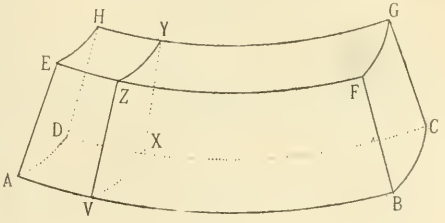


Fig. 233

$$\text{lím. VBCX} = \text{ABCD}, \qquad \text{lím. VBCXZFGY} = \text{prisma AG}.$$

Mas, por ser comensurables entre sí, los arcos IJ y VB, se verifica, según el primer caso, la proporción

$$(\text{prisma VG}) : (\text{prisma IQ}) = \text{VBCX} : \text{IJKL};$$

y tomando los límites de ambos miembros, resulta

$$(\text{prisma AG}) : (\text{prisma IQ}) = \text{ABCD} : \text{IJKL},$$

lo que se quería demostrar

II. *La razón de dos prismas, ó de dos cilindros, ó de un prisma y un cilindro, todos ellos horisféricos, que tengan por alturas* a *y* a_1, *y equivalentes sus bases mayores, es* $\dfrac{1-e^{-2a}}{1-e^{-2a_1}}$.

Demostración.—1.° (Figs. 234 y 235). Sean, por ejemplo p y p_1 los dos prismas horisféricos ABCDEF y GHIJKLMN, cuyas bases mayores BAC y GHIJ suponemos equivalentes. Si sus alturas $AD = a$ y $GK = a_1$ son comensurables, dividámoslas en partes iguales á su medida común, y por los puntos de división A_1, A_2,.... G_1, G_2,... dirijamos, en cada prisma, superficies horisféricas

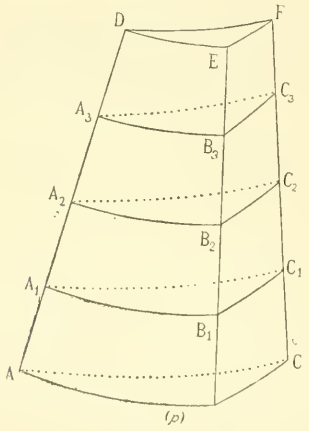


Fig. 234

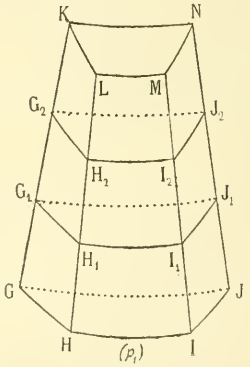


Fig. 235

concéntricas con las bases; y quedará descompuesto cada uno de los dos prismas dados en otros más pequeños, los cuales forman una progresión geométrica, por-

que dos consecutivos cualesquiera por tener iguales alturas, son entre sí como sus bases mayores, y la razón de éstas es constantemente igual á $e^{2\alpha}$, si α es el valor común de aquellas alturas (249-II). Por consiguiente, si α está contenida m veces en a, y designamos por v el prisma parcial $ABCA_1B_1C_1$, la suma de los m prismas que componen el p, será la suma de la progresión

$$v + ve^{-2\alpha} + ve^{-4\alpha} + ve^{-6\alpha} + \cdots\cdots + ve^{-2(m-1)\alpha},$$

ó sea

$$v\frac{1-e^{-2m\alpha}}{1-e^{-2\alpha}}; \qquad \text{ó} \qquad v\frac{1-e^{-2a}}{1-e^{-2\alpha}},$$

porque $m\alpha = AD = a$.

De igual modo se vería que, si α está contenida n veces en a_1, y designamos por v_1 el prisma parcial $GHIJG_1H_1I_1J_1$, la suma de los n prismas parciales, que componen el p_1, será

$$v_1\frac{1-e^{-2a_1}}{1-e^{-2\alpha}}.$$

En resumen, tenemos las igualdades

$$p = v\frac{1-e^{-2a}}{1-e^{-2\alpha}}, \qquad p_1 = v_1\frac{1-e^{-2a_1}}{1-e^{-2\alpha}}.$$

Dividiéndolas ordenadamente, y observando que los prismas v y v_1 son equivalentes, por serlo sus bases ABC, GHIJ, y tener iguales sus alturas AA_1, GG_1, resulta

$$\frac{p}{p_1} = \frac{1-e^{-2a}}{1-e^{-2a_1}},$$

de acuerdo con el enunciado.

2.° (Figs. 235 y 236) Si las alturas $AD = a$ y $GK = a_1$ son incomensurables, designemos por α la n-ava parte de GK. La otra altura AD no será un múltiplo de α, pero se compondrá de un múltiplo AX de α y de un resto $XD < \alpha$. La superficie horisférica, que pasando por X es concéntrica con las bases ABC, DEF del prisma p, divide á éste en otros dos ABCXYZ y XYZDEF. Si n es un número variable arbitrariamente grande, la longitud α (n-ava parte de AD)

será arbitrariamente pequeña; y lo mismo acontecerá, á forciori, al resto XD y al prisma XYZDEF; luego, para (lím. de n) $= \infty$, es

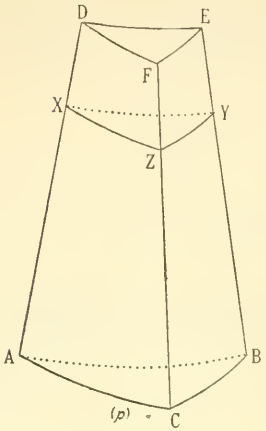


Fig. 236

$$\text{lím. de AX} = \text{AD} = a$$

$$\text{lím. de ABCXYZ} = p.$$

Mas, por ser comensurables entre sí a_1 y AX, se verifica, según el primer caso, la proporción

$$\frac{\text{ABCXYZ}}{p_1} = \frac{1 - e^{-2\,\text{AX}}}{1 - e^{-2\,a_1}};$$

y tomando los límites de ambos miembros, resulta la igualdad que se quería demostrar.

III. *La razón de dos prismas,* p *y* p_1, *ó de dos cilindros, ó de un prisma y un cilindro (todos ellos horisféricos) que tengan respectivamente* b *y* b_1 *por bases mayores, y* a *y* a_1 *por alturas, es la que expresa la fórmula*

$$\frac{p}{p_1} = \frac{b}{b_1} \cdot \frac{1 - e^{-2a}}{1 - e^{-2a_1}},$$

Demostración.—Considerando un tercer prisma horisférico q, de altura a y base b_1, tendremos

$$\frac{p}{q} = \frac{b}{b_1}, \qquad \text{porque } p \text{ y } q \text{ tienen igual altura } a \text{ (I)}$$

$$\frac{q}{p_1} = \frac{1 - e^{-2a}}{1 - e^{-2a_1}}, \qquad \text{porque } p_1 \text{ y } q \text{ tienen igual base mayor } b_1 \text{ (II)}$$

Multiplicando ordenadamente estas dos igualdades, resulta la que se quería demostrar.

252. I. Un cilindro ó prisma ilimitados, cuyos lados ó aristas se dirijan hacia el centro de una horisfera, queda dividido por la superficie de ésta en dos partes: á la que contiene los radios, la llamaremos *sector horisférico;* y en él tomaremos por *base* la sección producida por aquella superficie horisférica en el referido prisma ó cilindro. Este sector puede considerarse como un prisma ó cilindro horisféricos de altura infinita, en el cual la base menor es nula.

(Fig. 237). Llamaremos *volumen de un sector horisférico* ABCMNP al límite hacia que tiende el volumen del prisma ó cilindro ABCDEF (cuya base mayor ABC es la del sector) cuando la longitud de su altura AD se hace arbitrariamente grande. Por brevedad, suele decirse «Sector horisférico» en vez de «volumen de este sector». Que dicho volumen es finito, lo demostraremos inmediatamente.

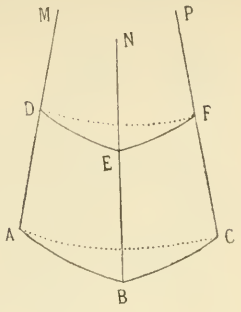


Fig. 237

II. *El volumen del sector horisférico es finito.*

Dos sectores horisféricos cualesquiera son entre sí como sus bases.

Dos sectores horisféricos de bases equivalentes tienen igual volumen.

Demostración. — 1.° La fórmula

$$\frac{p}{p_1} = \frac{b}{b_1}\,\frac{1-e^{-2a}}{1-e^{-2a_1}}$$

instituida antes (251-III), subsiste, por grandes que sean las alturas a y a_1. Si, permaneciendo invariable la base b_1, la altura a_1 se hace arbitrariamente grande, el volumen del prisma p_1 tiene por límite el de un sector horisférico s_1 de la misma base; y la fórmula anterior se convierte en

$$\frac{p}{s_1} = \frac{b}{b_1}(1-e^{-2a}).$$

Esta igualdad prueba que la razón $p : s_1$ entre el volumen de un prisma constante p y el del sector horisférico s_1 es un número finito, diferente de cero. Luego el volumen de este sector es finito.

2.° Si la altura a se hace también arbitrariamente grande, el volumen del prisma p tiene por límite el de un sector horisférico s; y tomando los límites de la última igualdad, resulta la proporción $s : s_1 = b : b_1$, que se afirma en el enunciado.

3.° En fin, de esta proporción se deduce que, si las áreas b y b_1 son iguales, será $s = s_1$.

253. *En este tratado de* Geometría hiperbólica, *al hablar de la medida de los cuerpos, si no se advierte qué relación existe entre las unidades angular, lineal, superficial y corpórea, debe sobreentenderse que la unidad angular es el ángulo del arco que, en el supuesto euclídeo, sería equivalente al radio; la de*

longitud el metro natural; la de superficie, el triángulo cuyo defecto es la unidad angular; y la de volumen el sector horisférico de base equivalente á la unidad superficial. Además, por brevedad, suele llamarse «ángulo», «línea», «superficie» y «cuerpo» á las respectivas razones de estas cantidades con su unidad.

254. *El volumen de un sector horisférico tiene por medida el área de su base.*

Observemos, en primer lugar, que la traducción de este enunciado, incorrecto por brevedad, es la siguiente: *si se toma por unidad de volumen el sector horisférico de base equivalente á la unidad superficial, la razón de un sector horisférico cualquiera á la unidad de volumen es igual á la razón de su base con la unidad de superficie.*

Demostración. Entre el volumen del sector horisférico s, la del sector unidad s_1 y sus respectivas bases b y b_1, se verifica (252-II) la proporción $s : s_1 = b : b_1$, la que se quería demostrar, puesto que, según lo convenido, b_1 es la unidad de superficie.

255. *El volumen* p *de un prisma ó de un cilindro horisférico puede calcularse mediante cualquiera de las fórmulas*

$$p = b - b_1, \qquad p = 2\,m\,\operatorname{sh} a, \qquad p = b\left(1 - e^{-2a}\right), \qquad p = b'\left(e^{2a} - 1\right),$$

en las cuales b *es la base mayor,* b′ *la base menor,* m *la sección media, y* a *la altura.*

Demostración. 1.° El prisma ó cilindro horisféricos es la diferencia de dos sectores horisféricos, cuyas respectivas bases son b y b'; luego (254) $p = b - b'$.

2.° Poniendo en esta igualdad en vez de $b - b'$ su igual $2m\,\operatorname{sh} a$ (249-III), resulta $p = 2m\,\operatorname{sh} a$.

3.° Eliminando b' entre la igualdad $p = b - b'$, ya demostrada, y la $b' = be^{-2a}$ (249-II.), se obtiene $p = b\left(1 - e^{-2a}\right)$.

4.° Análogamente, la eliminación de b entre las ecuaciones $p = b - b'$ y $b = b'e^{2a}$, da $p = b'\left(e^{2a} - 1\right)$.

256. 1. *El volumen de un pseudo-cilindro* (248) *de radio* r *y altura* a, *tiene por expresión* $2\,\pi\,a\,\operatorname{sh}^2 r$.

Demostración.—(Fig. 238) Sean AB un arco de hiperciclo, CD su base, AD y BC las dos alturas extremas, AE y BF los dos arcos de horiciclo que empiezan respectivamente en A y B, terminan en el eje CD y tienen su centro común en el punto infinitamente lejano del rayo rectilíneo CD. De estos supuestos, resulta FC = ED, FE = CD, é iguales también las superficies BFC, AED. Los cuerpos descritos por la revolución de las superficies ABCD, ABCE,

BFC,..... alrededor del eje CD, los designaremos respectivamente por [ABCD], [ABCE], [BFC],.....; y con estas notaciones, tendremos

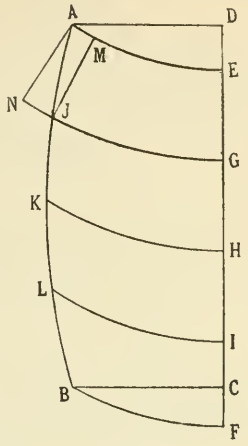


Fig. 238

$$[ABCD] = [ABCE] + [AED] =$$

$$[ABCE] + [BFC] = [ABFE];$$

luego

$$[ABCD] = [ABFE].$$

Por consiguiente, para calcular el volumen del pseudo-cilindro [ABCD] bastará calcular el del cuerpo [ABFE], y esto es lo que haremos.

Los horiciclos concéntricos con AE, que dividen en n partes iguales al segmento rectilíneo FE, dividen también al cuadrángulo mixtilíneo ABFE en n figuras iguales EGJA, GHKJ, HILK, IFBL; de manera que se tiene la siguiente relación entre volúmenes:

$$[ABFE] = [AEGJ] \times n.$$

Si JM es la distancia de J al horiciclo AE, y AN la distancia de A al horici- GJ, será el trapecio horiciclar MEGJ parte del cuadrángulo mixtilíneo AEGJ, y éste á su vez, parte del AEGN; de todo lo cual se infiere que

$$[MEGJ] <]AEGJ] < [AEGN],$$

$$[MEGJ] \times n < [AEGJ] \times n < [AEGN] \times n,$$

$$[MEGJ] \times n < [ABFE] < [AEGN] \times n.$$

Expresemos, en esta última limitación, los volúmenes de los prismas horisféricos [MEGJ] y [AEGN] en función de su altura GE y de sus secciones medias, que designaremos respectivamente por s y s_1, y tendremos (255).

$$2\, s \operatorname{sh} GE \times n < [ABFE] < 2\, s_1 \operatorname{sh} GE \times n,$$

expresión idéntica á esta otra:

$$2s\,\frac{\text{sh GE}}{\text{GE}}\times \text{GE}\times n<[\text{ABFE}]<2s_1\,\frac{\text{sh GE}}{\text{GE}}\times \text{GE}\times n.$$

la cual, por ser $\text{GE}\times n=\text{FE}=\text{CD}$, se transforma en

$$2s\,\frac{\text{sh GE}}{\text{GE}}\times \text{CD}<[\text{ABFE}]<2s_1\,\frac{\text{sh GE}}{\text{GE}}\times \text{CD}.$$

Si n es arbitrariamente grande, GE (n-ava parte de EF) será arbitrariamente pequeña, y la razón $\frac{\text{sh GE}}{\text{GE}}$ tenderá hacia 1. En cuanto á las secciones medias s y s_1 de los prismas horisféricos [MEGJ] y [AEGN] tienden hacia un mismo límite, que es el casquete horisférico que tiene por meridiano el arco AE, y cuya área (245) sabemos que es $\pi\,\text{sh}^2\text{AD}$. Así, los dos miembros extremos de la última limitación tienden hacia un mismo límite, que es $2\pi\,\text{CDsh}^2\text{AD}$; luego éste es también el valor del miembro intermedio [ABFE], y por lo tanto, de su igual [ABCD]. Designando, pues, por a la altura CD de este pseudo-cilindro, y por r su radio AD, resulta que el referido volumen es $2\pi\,a\,\text{sh}^2 r$.

11. (Fig. 238). Si el plano ABCD, girando en derredor de CD, describe un ángulo diedro α, el cuadrángulo mixtilíneo ABCD engendra un *sector del pseudo-cilindro* [ABCD].

Un sector de pseudo-cilindro, que tenga α *por ángulo,* a *por altura y* r *por radio, tiene por volumen* π a sh² r.

Efectivamente, los volúmenes p y s del sector y del pseudo-cilindro son entre sí como los ángulos 2π y α; es decir, $p:s=2\pi:\alpha$; luego $s=\alpha p:2\pi$; y como (I) $p=2\pi\,a\,\text{sh}^2\,\text{r}$, será $s=\alpha\,a\,\text{sh}^2 r$.

257. 1. *El volumen del segmento horisférico de una sola base, es igual al área de su casquete, disminuída en el duplo producto de* π *por su altura.*

Demostración.—(Fig. 239). Sean AB un arco de horiciclo, BC uno de sus ejes, y AC normal á BC. Si la superficie ABC da una vuelta completa alrededor de BC, describe un segmento horisférico que tiene BC por altura, y por única base el círculo descrito por AC. Conservemos para designar las figuras de revolución cuyo eje es BC, la misma notación que en el

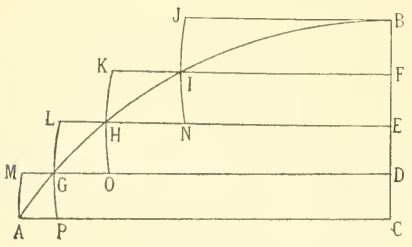


Fig. 239

párrafo precedente, con lo cual [ABC] designará el volumen del segmento horisférico descrito por ABC, y [AB] el área del casquete que describe el arco AB. Se trata de probar que $[ABC]=[AB]-2\pi BC$.

Los planos que dividen normalmente á la altura BC en n partes iguales (en los puntos D, E, F) dividen al segmento horisférico [ABC] en n rebanadas [ACDG], [GDEH], [HEFI], [IFB] cuya suma es, evidentemente, menor que la suma de los pseudo cilindros externos [ACDM], [GDEL], [HEFK], [IFBJ]; y mayor que la suma de los pseudo-cilindros internos [GDCP], [HEDO], [IFEN]. Mas, por ser [GDEL]=[GDCP], [HEFK]=[HEDO], [IFBJ]=[IFEN], la diferencia entre las dos últimas sumas es el pseudo-cilindro [ACDM], cuyo volumen se desvanece al mismo tiempo que su altura CD, ó sea cuando el número n sea arbitrariamente grande. Infiérese de esto, que la suma de los pseudo cilindros internos y la suma de los externos tienden hacia un mismo límite, que es el volumen del segmento horisférico [ABC]; y que, por lo tanto, para calcular este volumen, basta hallar el valor de aquel límite.

Designemos por α la n-ava parte de la altura BC, ó sea la longitud de los segmentos iguales CD, DE, EF, FB; y hallemos la suma de los n pseudo-cilindros externos [IFBJ], [HEFK], [GDEL], [ACDM]. El [GDEL] que en esta serie ocupa el lugar k-ésimo, tiene por altura α, y por radio DG; luego (256) su volumen es $2\pi\alpha\,\mathrm{sh}^2\,DG$; y como (221-*Obs.*) $\mathrm{sh}^2\,DG=e^{2BD}-1=e^{2k\alpha}-1$, el referido volumen es, en definitiva, $2\pi\alpha\left(e^{2k\alpha}-1\right)$. Dando á k, sucesivamente en esta expresión, los valores 1, 2, 3,.... n, se hallan los volúmenes de los n pseudo-cilindros externos que estábamos considerando; y resulta que la suma de todos ellos es

$$2\pi\alpha\left(e^{2\alpha}+e^{4\alpha}+e^{6\alpha}+\ldots.+e^{2n\alpha}-n\right).$$

los sumandos interiores al paréntesis son los n primeros términos de una progresión geométrica, cuya razón es $e^{2\alpha}$; y por esto, y por ser $n\alpha=BC$, la expresada suma adquiere sucesivamente las formas siguientes:

$$2\pi\alpha\left(e^{2\alpha}\,\frac{e^{2n\alpha}-1}{e^{2\alpha}-1}-n\right),$$

$$2\pi\alpha\,e^{2\alpha}\,\frac{1}{e^{2\alpha}-1}\left(e^{2n\alpha}-1\right)-2\pi n\alpha,$$

$$\pi\,\alpha\,e^{\alpha}\,\frac{2}{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}\left(e^{2\,BC}-1\right)-2\pi BC,$$

$$\pi\,e^{\alpha}\,\frac{\alpha}{\operatorname{sh}\alpha}\left(e^{2\,BC}-1\right)-2\pi BC.$$

Esta última, cuando n se hace arbitrariamente grande (en cuyo caso α se desvanece, y cada uno de los factores e^{α} y $\alpha : \operatorname{sh}\alpha$ tiende hacia la unidad) se convierte en

$$\pi\left(e^{2\,BC}-1\right)-2\pi BC\,.$$

Luego el valor de esta expresión es el volumen del segmento horisférico [ABC]; y como (245) $\pi\,(e^{2\,BC}-1)$ es el área del casquete [AB], resulta en definitiva $[ABC]=[AB]-2\pi BC$, de conformidad con el enunciado.

II. *El volumen del segmento horisférico de revolución, de dos bases, es igual al área de su zona horisférica, disminuída en el duplo producto de* π *por su altura.*

Demostración.—(Fig. 240). Sean AB un arco de horiciclo, situado todo él á un mismo lado del eje EC de dicha curva, AC, BD las distancias de A y B al eje EC. Si el cuadrángulo mixtilíneo ABCD da una vuelta completa alrededor de EC, describe un segmento horisférico [ABDC] de revolución, que tiene CD' por altura, y está limitado por los dos círculos [AC], [BD] y la zona horisférica [AB]. Dicho segmento [ABDC] es la diferencia entre los dos segmentos horisfericos [AEC] y [BED] de una sola base, cuyos volúmenes (I) ya sabemos expresar. Tendremos, pues,

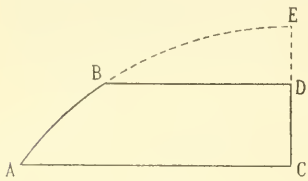


Fig. 240

$$[ABDC]=[AEC]-[BED]=\left([AE]-2\pi EC\right)-\left([BE]-2\pi ED\right)=$$

$$[AE]-[BE]-2\pi(EC-ED)=[AB]-2\pi CD\,;$$

luego $[ABDC]=[AB]-2\pi CD$. Esta última fórmula es la que se quería demostrar.

258. I. (Figs. 241 y 242). Sean AB un arco de círculo (fig. 241) ó de

hiperciclo (fig. 242), situado todo él á un mismo lado del eje CM de dicha curva, y AM y BN las distancias de A y B á CM. Si toda la figura da una vuelta completa alrededor de CM, el cuadrángulo mixtilíneo ABNM describe un *segmento de revolución esférico ó hiperesférico* que tiene por *altura* MN, y está limitado por sus dos *bases*, ó sean los dos círculos que describen AM y BN, y por la zona que describe el arco AB. En particular, si el extremo B está sobre el eje, una de las dos bases queda reducida á un punto, la zona [AB] á un casquete, y el segmento [ABNM] de dos bases á otro de una sola.

II. *Para calcular el volumen de un segmento esférico ó hiperesférico (que sea de revolución) multiplíquese la zona curva, que lo limita, por la cotangente hiperbólica de su radio, y réstese el duplo producto de* π *por la altura.*

Así, conservando la notación del párrafo 256, refiriéndonos á las figuras 241 y 242, y designando por r el radio real ó imaginario del ciclo AB, será

$$[ABNM] = [AB] \cot h\, r - 2\pi MN.$$

Demostración.—Sea O el centro real ó ideal. Los planos que dividen normalmente á la altura MN en n partes iguales, MD, DE, EF, FN, dividen al segmento esférico ó hiperesférico [ABNM] en n rebanadas [AMDI], [IDEH], ... respectivamente mayores que los pseudo-cilindros internos [IDMS], [HEDR], [GFEQ], [BNFP]; y se vería, razonando como en el

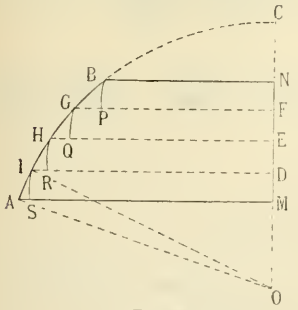


Fig. 241

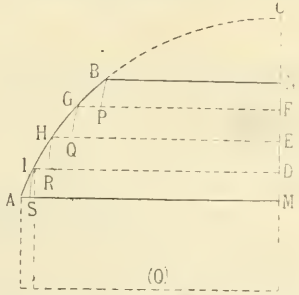


Fig. 242

párrafo anterior, que la suma de estos pseudo-cilindros tiene por límite el volumen del cuerpo, si, como supondremos, sus alturas son arbitrariamente pequeñas, y su número, por lo tanto, arbitrariamente grande. Calculemos, pues, dicho límite. Para el volumen del pseudo-cilindro [MDIS] tenemos (256-I)

$$[MDIS] = 2\pi MD\, sh^2 DI = 2\pi MD\, ch^2 DI - 2\pi MD;$$

y como del triángulo real ó ideal ODI, rectángulo en D, se saca $\operatorname{ch} DI = \frac{\operatorname{ch} r}{\operatorname{ch} OD}$,

será

$$[MDIS] = 2\pi\, MD \frac{\operatorname{ch}^2 r}{\operatorname{ch}^2 OD} - 2\pi\, MD, \quad [MDIS] + 2\pi\, MD = 2\pi\, MD \frac{\operatorname{ch}^2 r}{\operatorname{ch}^2 OD}.$$

Además, el área de la zona [AI] es (246-II)

$$[AI] = 2\pi \operatorname{sh} r \operatorname{ch} r \frac{\operatorname{sh} MD}{\operatorname{ch} OD \operatorname{ch} OM}.$$

Dividiendo ordenadamente por esta igualdad la

$$[MDIS] + 2\pi\, MD = 2\pi\, MD \frac{\operatorname{ch}^2 r}{\operatorname{ch}^2 OD},$$

encontrada antes, se halla

$$\frac{[MDIS] + 2\pi\, MD}{[AI]} = \operatorname{cot h} r \frac{MD}{\operatorname{sh} MD} \times \frac{\operatorname{ch} OM}{\operatorname{ch} OD}.$$

Si la altura MD tiende hacia cero, las razones $\frac{MD}{\operatorname{sh} MD}$, $\frac{\operatorname{ch} OM}{\operatorname{ch} OD}$ tienden hacia 1, y la última igualdad se convierte en

$$\lim. \frac{[MDIS] + 2\pi\, MD}{[AI]} = \operatorname{cot h} r.$$

Relaciones análogas se hallan para los otros pseudo-cilindros internos y las zonas curvas [IH], [HG], [GB] de las correspondientes rebanadas en que hemos dividido el segmento [ABNM]. Así, todas las razones

$$\frac{[MDIS] + 2\pi MD}{[AI]}, \quad \frac{[DEHR] + 2\pi DE}{[IH]}, \quad \frac{[EFGQ] + 2\pi EF}{[HG]}, \quad \frac{[FNBP] + 2\pi FN}{[GB]},$$

tienden hacia un mismo límite, que es cot h r. Luego la razón que se obtiene

dividiendo la suma de sus antecedentes por la suma de sus consecuentes, también tiene por límite cot h r. Por lo tanto,

$$\lim. \frac{[MDIS]+[DEHR]+[EFGQ]+[FNBP]+2\pi(MD+DE+EF+FN)}{[AI]+[IH]+[HG]+[GB]} = \cot h\, r.$$

Ahora bien, en esta igualdad, la suma de los pseudo-cilindros que figuran en el dividendo, tiene por límite el volumen del segmento [ABNM]; el divisor es la zona curva [AB]; y, además, es MD + DE + EF + FN = MN. Por lo tanto,

$$\frac{[ABNM]+2\pi MN}{[AB]} = \cot h\, r,$$

$$[ABNM] = [AB] \cot h\, r - 2\pi MN,$$

de acuerdo con el enunciado.

Observación. — Aplicando esta fórmula al caso de ser $r = \infty$, ó sea al segmento horisférico, se halla nuevamente, para el volumen de este cuerpo, la expresión encontrada en el párrafo 257.

III. *El volumen de una esfera, de radio* r, *es* 2π (sh 2 r − 2 r).

Efectivamente, considerando la esfera como un segmento cuya altura es el diámetro, y cuyas dos bases se reducen á puntos, la ley anterior enseña que

$$Esfera = (superficie\ esférica) \cot h\, r - 2\pi \times 2r;$$

y sustituyendo, en esta igualdad, en vez de la superficie esférica su valor $4\pi\, sh^2 r$, se halla, tras fáciles transformaciones, que el segundo miembro es 2π (sh 2 r − 2 r).

IV. *Para calcular el volumen de un segmento hiperesférico (que sea de revolución) multiplíquese la zona curva, que lo limita, por la tangente hiperbólica de su altura; y réstese el duplo producto de* π *por la altura.*

Efectivamente (fig. 242), hemos visto (I) que, designando por r el radio del hiperciclo AB, se cumple la ley

$$[ABNM] = [AB] \cot h\, r - 2\pi MN;$$

pero entre la altura a de dicho hiperciclo y su radio r existe la relación $r = a + \frac{1}{2}\pi i$; y por lo tanto, cot h r = th a; luego

$$[ABNM] = [AB]\ th\ a - 2\pi MN.$$

259. I. (Fig. 243). Si un cuadrilátero convexo ABNM, rectángulo en M y N, y que tiene el lado AB paralelo al MN, gira alrededor de MN, describe un *cilindro de revolución*. Su *altura* es MN, sus *lados* las diversas posiciones que, en aquel giro, adquiere el segmento rectilíneo AB, y sus *bases* los círculos [AM] y [BN]. Si el paralelismo de AB y MN se verifica en el sentido AB, la mayor de las dos bases será [AM].

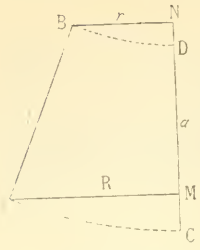


Fig. 243

El volumen de un cilindro de revolución puede expresarse por cualquiera de estas dos fórmulas:

$$v = 2\pi\,(l - a), \qquad v = 2\pi\,(\lg \operatorname{ch} R - \lg \operatorname{ch} r),$$

en las cuales l *designa el lado* AB, a *la altura* MN, R *el radio* AM *de la base mayor, y* r *el radio de la base menor.*

Demostración. — Sean AC y BD los arcos de horiciclo, que empiezan respectivamente en A y B, terminan en la recta MN, y tienen un mismo centro, situado en el radio rectilíneo MN. Entre el cilindro [ABNM] el prisma horisférico [ABDC] y los segmentos horisféricos [AMC], [BND], se verifica la relación

$$[ABNM] = [ABDC] - [AMC] + [BND];$$

y sustituyendo en ella los términos del segundo miembro por los valores que (255 y 257-I) expresan las igualdades

$$[ABDC] = [AC] - [BD],$$

$$[AMC] = [AC] - 2\pi\,CM, \qquad [BND] = [BD] - 2\pi\,DN,$$

resulta

$$[ABNM] = 2\pi\,(CM - DN);$$

pero $CM - DN = (CM + MD) - (MD + DN) = CD - MN = AB - MN = l - a$; luego $[ABNM] = 2\pi\,(l - a)$, que es la primera fórmula del enunciado. La segunda se obtiene del modo siguiente. Sabemos (221-*Obs.*) que, si $AM = R$ y $DN = r$, es

$$e^{CM} = \operatorname{ch} R, \qquad e^{DN} = \operatorname{ch} r;$$

luego

$$CM = \lg \operatorname{ch} R, \qquad DN = \lg \operatorname{ch} r.$$

Sustituyendo estos valores de CM y DN en la igualdad $[ABNM] = 2\pi\,(CM - DN)$, encontrada antes, resulta $v = 2\pi\,(\lg \operatorname{ch} R - \lg \operatorname{ch} r)$.

Observación. — Esta última fórmula enseña que, si r tiende hacia cero, el volumen del cilindro tiende hacia una cantidad finita, que es 2π lg ch R; y que, si permaneciendo r constante, R se hace arpitrariamente grande, el volumen del cilindro tiende hacia ∞.

II. *El volumen de un tronco cónico de revolución es* $2\pi(l \cos \Theta - a)$, *en cuya expresión* l *es el lado*, a *la altura*, *y* Θ *el ángulo (real ó imaginario) del eje con uno de los lados.*

Demostración. — (Fig. 244). Sea AMNB el cuadrilátero convexo, rectángulo en M y N, que, por su revolución en torno de MN, engendra el tronco cónico [ABNM]. Su altura será MN$=a$, y su lado AB$=l$. Divídase AB en n partes iguales, AC, CD, DE, EB; trácense por todos los puntos de división los segmentos rectilíneos CF, DG, EH normales al eje MN, y terminados en este eje; trácense también los arcos de ciclo BKE, EID, DLC, CQA (situados á distinto lado de AB que MN) que tienen por cuerdas las longitudes iguales BE, ED, DC, CA y sus respectivos centros sobre el eje MN (estos centros son, evidentemente, las intersecciones geométricas, límites ó ideales, del eje MN con las normales á BE, ED, DC y CA en sus puntos medios); en fin, tomando por altura BR, la mayor sagita de dichos arcos, trácese el arco hiperciclar RS, situado con estos arcos al mismo lado de la base AB, y terminado por las alturas SA. RB de los puntos A y B.

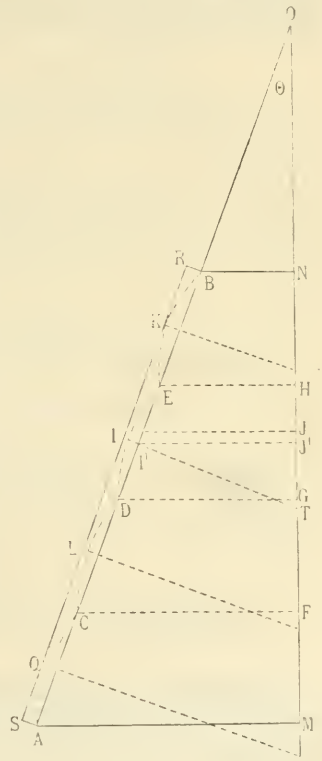


Fig. 244

El tronco de cono [ABNM] es menor que la suma de los segmentos esféricos (de radio real ó imaginario) [MFCQA], [FGDLC],.....; y la diferencia [CQA] + [DLC] + ... entre ambos volúmenes es, evidentemente, menor que el cuerpo [ABRS]. Si el número n es arbitrariamente grande, las sagitas de los arcos BE, ED, DC, CA, y por consiguiente la altura BR del hiperciclo SR, y el cuerpo [ABRS] serán arbitrariamente pequeñas, y lo mismo acontecerá, á forciori, á la diferencia entre el tronco de cono [ABNM] y la suma

de los segmentos [HNBKE], [GHEID], ... Luego esta suma tiene por límite el volumen de aquel tronco. Calculemos, pues, dicho límite.

Fijémonos en uno de los referidos segmentos, el [GHEID], por ejemplo; y hallemos la expresión de su volumen. Sean Θ el ángulo (real ó imaginario) de BA con MN, α la longitud de DE, ó sea la n-ava parte de AB, I é I' los respectivos puntos medios del arco DE y de su cuerda, J y J' las proyecciones de I é I' sobre NM, y T la intersección (propia ó impropia) de MN con la normal á la cuerda DE en su punto medio, con lo cual T será el centro del arco DIE. Con estos supuestos, la zona de revolución descrita por el arco EID alrededor de MN, tiene por área (246-III) $4\pi \operatorname{sh} \mathrm{IJ} \operatorname{sh} \frac{1}{2}\alpha$; luego (258--II)

$$[\mathrm{GHEID}] + 2\pi\,\mathrm{GH} = 4\pi \operatorname{sh} \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{sh} \mathrm{IJ} \operatorname{cot\,h} \mathrm{IT}.$$

Por otra parte, de los triángulos rectángulos (geométricos ó ideales) OI'J', TI'O, se saca

$$\operatorname{sh} \mathrm{I'J'} = \operatorname{sh} \mathrm{OI'} \operatorname{sen} \Theta, \qquad \operatorname{cot\,h} \mathrm{I'T} = \frac{\cot \Theta}{\operatorname{sh} \mathrm{OI'}};$$

luego

$$\operatorname{sh} \mathrm{I'J'} \operatorname{cot\,h} \mathrm{I'T} = \cos \Theta.$$

En resumen, tenemos las dos ecuaciones

$$[\mathrm{GHEID}] + 2\pi\,\mathrm{GH} = 4\pi \operatorname{sh} \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{sh} \mathrm{IJ} \operatorname{cot\,h} \mathrm{IT},$$

$$\cos \Theta = \operatorname{sh} \mathrm{I'J'} \operatorname{cot\,h} \mathrm{I'T}.$$

Dividiéndolas ordenadamente, después de multiplicar la segunda por α, se obtiene

$$\frac{[\mathrm{GHEID}] + 2\pi\,\mathrm{GH}}{\alpha \cos \Theta} = 2\pi \frac{\operatorname{sh} \frac{1}{2}\alpha}{\frac{1}{2}\alpha} \times \frac{\operatorname{sh} \mathrm{IJ}}{\operatorname{sh} \mathrm{I'J'}} \times \frac{\operatorname{cot\,h} \mathrm{IT}}{\operatorname{cot\,h} \mathrm{I'T}}.$$

Si el número n es arbitrariamente grande, las tres últimas razones tienden hacia 1; porque, en tal supuesto, α (n-ava parte de AB) se desvanece, I'J' tiende hacia IJ, é I'T hacia IT; luego, en el límite, la última igualdad se convierte en

$$\lim. \frac{[\mathrm{GHEID}] + 2\pi\,\mathrm{GH}}{\alpha \cos \Theta} = 2\pi.$$

Fórmulas análogas se obtienen para los otros segmentos [HNBKE], ... Así, las n razones

$$\frac{[HNBKE]+2\pi HN}{\alpha\cos\Theta},\ \frac{[GHEID]+2\pi GH}{\alpha\cos\Theta},\ \frac{[FGDLC]+2\pi FG}{\alpha\cos\Theta},\ \frac{[MFCQA]+2\pi MF}{\alpha\cos\Theta},$$

tienden hacia un mismo límite, que es 2π; luego hacia este valor tiende también el cociente de dividir la suma de sus antecedentes por la suma de sus consecuentes. Es decir, que

$$\lim.\frac{[HNBKE]+[GHEID]+[FGDLC]+[MFCQA]+2\pi(HN+GH+FG+MF)}{n\alpha\cos\Theta}=2\pi.$$

En esta igualdad, la suma de los segmentos esféricos (de radio real ó imaginario, finito ó infinito) que figuran en el numerador, tienen por límite (como ya hemos probado) el volumen del tronco cónico [ABNM]; y, además, es $n\alpha = AB = l$, $HN + GH + FG + MF = MN = a$. Por lo tanto,

$$\frac{[ABNM]+2\pi a}{l\cos\Theta}=2\pi \qquad [ABNM]=2\pi(l\cos\Theta-a).$$

Esta fórmula es la que se quería demostrar.

Observación.—Si el vértice O es ideal, y t designa la mínima distancia de las rectas AB y MN, será $\Theta = -ti$, $\cos\Theta = \operatorname{ch} t$ y

$$[ABNM]=2\pi(l\operatorname{ch}t-a).$$

III. *El volumen de un cono de revolución, de lado* l *y altura* a, *es* $2\pi(l\cot\mathrm{h}\,l\,\mathrm{th}\,a-a)$.

Efectivamente, designando como antes por Θ el ángulo del lado con la altura, el volumen del cono es $2\pi(l\cos\Theta-a)$; y como $\cos\Theta=\cot\mathrm{h}\,l\,\mathrm{th}\,a$, resulta que dicho volumen es el que se afirma en el enunciado.

Observación.—Si, permaneciendo constante el ángulo Θ, l se hace arbitrariamente grande, a tiende hacia un límite finito (146); y, por lo tanto, el volumen del cono se hace también arbitrariamente grande.

260. 1. (Fig. 245). *El volumen del sector hiperesférico, descrito por la re-*

volución de un sector hiperciclar ABNM *alrededor de su altura* BN, *tiene por medida*

$$2\pi \operatorname{sh}^2 \tfrac{1}{2} t\ (\operatorname{sh} 2a + 2a),$$

siendo a *la altura del hiperciclo* AB *y* t *la distancia* MN *entre las dos alturas extremas* AM *y* BN.

Demostracion.—Sean C la proyección normal de A sobre BM, D el punto medio de la cuerda AB, y E la proyección normal de D sobre MN. Expresando que el sector hiperesférico [ABNM] es la suma del segmento hiperesférico [ABC] con el tronco cónico [ACNM], tendremos

$$[\mathrm{ABNM}] = (4\pi \operatorname{sh}^2 \mathrm{BD}\ \operatorname{th} a - 2\pi\,\mathrm{BC}) + 2\pi(a \operatorname{ch} t - \mathrm{CN});$$

y por ser $\mathrm{BC} + \mathrm{CN} = \mathrm{BN} = a$ y $\operatorname{ch} t - 1 = 2 \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} t$, se deducirá sucesivamente

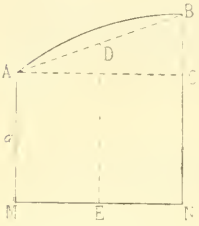


Fig. 245

$$[\mathrm{ABNM}] = 2\pi \left(2 \operatorname{sh}^2 \mathrm{BD}\ \operatorname{th} a + a\ (\operatorname{ch} t - 1)\right),$$

$$[\mathrm{ABNM}] = 2\pi \left(2 \operatorname{sh}^2 \mathrm{BD}\ \operatorname{th} a + 2a \operatorname{sh}^2 \tfrac{1}{2} t\right).$$

Además (227·I) el cuadrilátero trirrectángulo DBNE proporciona la relación

$$\operatorname{sh} \mathrm{BD} = \operatorname{sh} \mathrm{NE} \operatorname{ch} \mathrm{BN}, \quad \text{ó} \quad \operatorname{sh} \mathrm{BD} = \operatorname{sh} \tfrac{1}{2} t \operatorname{ch} a;$$

y sustituyendo este valor de sh BD en la última expresión del volumen, se halla, tras fáciles transformaciones,

$$[\mathrm{ABNM}] = 2\pi \operatorname{sh}^2 \tfrac{1}{2} t\ (\operatorname{sh} 2a + 2a).$$

II. (Fig. 246). *El volumen del sector esférico, descrito por la revolución del sector circular* ABO *alrededor de su radio* OB, *tiene por medida*

$$2\pi \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} \Theta\ (\operatorname{sh} 2r - 2r),$$

en cuya expresión r *es el radio, y* Θ *el ángulo céntrico* BOA *del arco* BA.

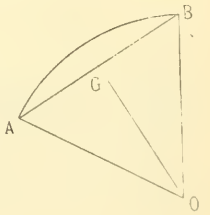


Fig. 246

Demostración.—Se podría seguir una marcha análoga á la del teorema anterior; pero es más breve este otro procedimiento. El sector esférico OAB y

la esfera total de que aquel forma parte, son entre sí como el casquete [AB] del sector y la superficie esférica total Es decir, que se verifica la proporción

$$\frac{\text{sector esférico [ABO]}}{\text{esfera}} = \frac{\text{casquete [AB]}}{\text{superficie esférica}}.$$

Sustituyendo, en ella, los tres últimos términos por los valores que expresan las relaciones

$$\text{esfera} = 2\pi(\text{sh } 2r - 2r), \qquad \text{casquete [AB]} = 4\pi \,\text{sh}^2 \tfrac{1}{2} \text{BA},$$

$$\text{superficie esférica} = 4\pi \,\text{sh}^2 r,$$

se halla

$$[\text{AOB}] = 2\pi \left(\frac{\text{sh} \frac{1}{2} \text{BA}}{\text{sh } r} \right)^2 (\text{sh } 2r - 2r);$$

y, como (si G es el medio de la cuerda BA), del triángulo rectángulo OBG se saca $(\text{sh } \frac{1}{2} \text{BA}) : \text{sh } r = \text{sen BOC} = \text{sen } \frac{1}{2} \Theta$, resulta en definitiva,

$$[\text{AOB}] = 2\pi \,\text{sen}^2 \tfrac{1}{2} \Theta (\text{sh } 2r - 2r).$$

PARTE SEGUNDA

GEOMETRÍA ELÍPTICA,

ESFÉRICA Ó DE RIEMANN.

GEOMETRÍA ELÍPTICA,

ESFÉRICA Ó DE RIEMANN.

CAPÍTULO I.

GEOMETRÍA PURA.

I.—Conceptos fundamentales.

261. Diremos que dos puntos de una línea cerrada son *opuestos*, cuando dividen á esta línea en dos partes de igual longitud.

En la Geometría elíptica, de igual modo que en la vulgar, se da el nombre de plano á la superficie cónica, cuya directriz es una recta que no pasa por el vértice; pero el concepto de recta, sin alterarlo en lo esencial, sufre una notable modificación que, á su vez, modifica los llamados Axiomas de la recta y del plano, según expresan los siguientes principios, que [además del Axioma de la traslación (2)], admitiremos como fundamentales.

I. *La línea recta es cerrada; y tiene, por consiguiente, longitud finita.*

II. *Por dos puntos dados, siempre puede pasar una recta; pero no puede pasar otra, si dichos puntos no son opuestos en aquella recta.*

III. *Si una recta tiene dos puntos no opuestos en un plano, estará totalmente situada en dicha superficie.*

Del segundo de estos principios, se infiere que *dos rectas que tengan dos puntos comunes, no opuestos, coinciden en toda su extensión*; y que, por consiguiente, *la recta es una línea uniforme*, es decir, que puede coincidir por resbalamiento consigo misma. También se deduce, del mismo principio, que *todo segmento rectilíneo puede coincidir consigo mismo por inversión.* Resulta, pues, que la recta riemana (la que ahora consideramos) conserva los caracteres esenciales de la recta euclídea, diferenciándose de ésta solamente en que la primera es cerrada, mientras que la segunda es abierta; y en que dos puntos determinan *en general* la recta riemana, y *sin excepción* la euclídea.

Por extraña que al pronto parezca la hipótesis de ser la recta una línea cerrada, obsérvese que no hay ningún motivo para rechazarla, pues si bien hasta hoy la experiencia no la ha confirmado, tampoco la ha desmentido; y lo único

que, acerca de esto nos enseña la experiencia, es que la longitud de la recta, si no es infinita, debe ser sumamente grande. Sin embargo, en los croquis ó dibujos que empleemos, la recta estará, á veces, representada por un contorno reentrante, cuyo tamaño será siempre muy pequeño con relación al de la recta; y podrá suceder que, por este motivo, el croquis empleado carezca visiblemente de ciertas propiedades que la teoría le asigne. En esto, sucede con la Geometría elíptica lo mismo que con la hiperbólica; y es que, en ninguna de las dos, existen más figuras semejantes que las iguales ó simétricas; y por consiguiente, no es posible atribuir á una figura pequeña propiedades exclusivas de otra inmensamente mayor. Así, las anomalías que, á veces, se observarán en algunos dibujos de que nos valdremos en nuestras explicaciones, no prueban que la Geometría elíptica esté en desacuerdo con el universo real; prueban tan sólo que el tamaño de aquellos dibujos es mucho menor que el de la figura que representan.

262. *La superficie del plano es finita y cerrada.*

Efectivamente, un plano queda dividido por una recta, trazada en él, en dos partes; y una cualquiera de ellas tiene extensión finita, por estar totalmente limitada por un contorno reentrante, que es el de aquella recta (261); luego la superficie del plano, por carecer de orillas, y componerse de dos partes finitas y completamente limitadas, tiene extensión finita, y es reentrante.

COROLARIO.—*El área de una figura plana no puede ser arbitrariamente grande.*

263. *El espacio, aunque ilimitado, es finito.*

En efecto, un plano divide al espacio en dos regiones; y cada una de ellas tiene volumen finito, porque está completamente envuelta por una superficie reentrante, que es la de aquel plano (262); luego el espacio total es finito, por serlo las dos partes de que se compone.

COROLARIO.—*El volumen de un cuerpo no puede ser arbitrariamente grande.*

264. *Por dos rectas, que se cortan, pasa un plano.*

Efectivamente, si las dos rectas a y b se cortan, la superficie cónica que tiene por directriz la recta b, y por vértice uu punto cualquiera de a, exterior á b, es (por definición) un plano, el cual contiene evidentemente á a y b. Luego por estas dos rectas pasa un plano. (Veremos en breve que no pasa otro).

265. *Dos rectas, que pasan por un mismo punto* N, *tienen otro punto común* N_1 *y nada más que otro, el cual es, en ambas rectas, opuesto al primero.*

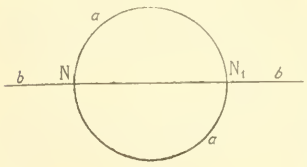


Fig. 247

DEMOSTRACIÓN. — (Fig. 247). Supongamos que las dos rectas a y b se cortan en el punto N, é imaginemos (264) un plano ab que pase por ambas. En el plano ab, la línea cerrada a (261-I) es el contorno de una celda ó porción finita de aquel plano. La recta b penetra en esa celda por el punto N; y como también b es una línea

cerrada, no puede salir de dicha celda, sin atravesar otra vez su contorno en un punto N_1, que debe ser diferente del N, porque si la recta *b* entrara y saliera en la referida celda por el mismo punto N, dicha recta *b* se cortaría á sí misma en N; y esto es imposible, puesto que la recta es una línea uniforme. Luego las dos rectas *a* y *b* que pasan por N, vuelven á cortarse en otro punto N_1. Además, estos dos puntos son opuestos en *a* y en *b*, porque, si por ejemplo, no lo fueran en *a*, por los dos puntos no opuestos N y N_1 de la recta *a*, pasarían dos rectas *a* y *b*, lo cual es imposible (261-II.). En fin, estas dos rectas no pueden tener ningún otro punto común P; porque, si lo tuvieran, coincidirían, en atención á que N y P no serían opuestos.

COROLARIOS.—1.° *Todas las rectas que pasan por un mismo punto, tienen otro punto común, y nada más que otro, el cual es, en todas ellas, opuesto al primero.*

Según esta proposición, á todo punto N corresponde otro N_1, en el cual concurren todas las rectas dirigidas por N. Estos dos puntos N y N_1 se denominan *opuestos*. Obsérvese que, *si dos puntos son opuestos en una recta, también lo son en el espacio.* En lo sucesivo, los puntos opuestos de que hablemos serán los del espacio en general; no los de una recta determinada.

2.° *Dos rectas no pueden cortarse en un solo punto.*

3.° *Por dos puntos opuestos pasan infinidad de rectas, que son todas las que pasan por uno de ellos.*

4.° *Por dos puntos no opuestos pasa una sola recta*; pues, si pasaran dos, aquellos dos puntos deberían ser opuestos.

5.° *Dos rectas, que tienen dos puntos comunes no opuestos, coinciden.*

6.° *Dos puntos opuestos* A *y* A_1 *y otro punto* B, *siempre están en línea recta.* Porque la recta AB pasa por A_1.

7.° *Si tres puntos no están en línea recta, dos cualesquiera de los tres no son opuestos.* Porque si lo fueran, los tres estarían en línea recta (6.°).

8.° *Una superficie cónica tiene dos vértices, que son puntos opuestos.*

266. *Todo plano que pasa por un punto* A, *pasa también por su opuesto* A_1.

Porque una recta cualquiera de dicho plano, dirigida por A, pasa por A_1 (265); luego este punto está en aquel plano.

COROLARIO.—*Todos los planos que pasan por un mismo punto, pasan también por su opuesto.*

267. *Si un plano* α *y una recta* b *se cortan en un punto* N, *vuelven á cortarse en otro punto* N_1 *opuesto al primero; y nada más que en otro.*

Efectivamente, toda recta del plano α, dirigida por N, está cortada por *b* en los dos puntos N y N_1, y en ninguno más; luego en estos dos puntos, y en ningún otro, se cortan la recta *b* y el plano α.

COROLARIO.—*Un plano y una recta no pueden cortarse en un solo punto.*

268. I. (Fig. 248). *Una recta* a *de un plano, corta en un punto, y nada*

más que en uno, á todo segmento rectilíneo BC, *trazado en dicha superficie, y que tenga sus extremos* B *y* C *á distinto lado de la recta* a.

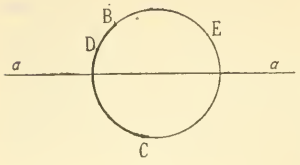


Fig. 248

Efectivamente, la recta *a* divide al plano de que se trata en dos regiones, por lo cual no es posible que un punto móvil, marchando sobre el plano, pase de una región á la otra, sin atravesar dicha recta. Luego, si B y C están á distinto lado de *a*, cada uno de los dos segmentos rectilíneos BDC y BEC, que juntos forman una sola recta trazada en aquel plano, corta á la recta *a*, y tiene con ella un solo punto de intersección, porque las rectas *a* y BC no pueden cortarse en más de dos puntos.

II. (Fig. 249). *Un plano* α *corta en un punto, y nada más que en uno, á todo segmento rectilíneo* BC, *cuyos extremos* B *y* C *estén á distinto lado de dicha superficie.*

En efecto, como el plano α divide al espacio en dos regiones, no es posible que un punto móvil pase de B á C, sin atravesar dicha superficie. Luego cada uno de los dos segmentos BDC y BEC que juntos forman una sola recta, corta al plano α; y tiene con él un solo punto de intersección, porque el plano α y la recta BC no pueden cortarse en más de dos puntos.

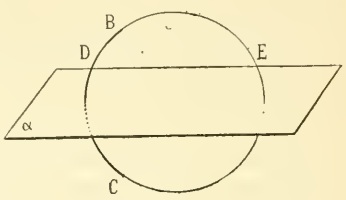


Fig. 249

269. *Si dos planos tienen tres puntos comunes, no situados en línea recta, coinciden.*

Demostración.—Es con ligeras modificaciones, impuestas por el nuevo concepto de recta, la misma que puede darse de este principio en las Geometrías vulgar é hiperbólica, como vamos á ver.

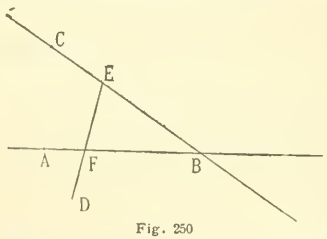


Fig. 250

Sean A, B y C (fig. 250) tres puntos, no situados en línea recta, y pertenecientes á dos planos que designaremos por α y 6. Para establecer que estas dos superficies son una misma, probaremos que todo punto de cualquiera de ellas, pertenece también á la otra. Dos cualesquiera de los tres puntos A, B, C no son opuestos, porque no están en línea recta (265 - *Cor.* 7.°); y de esto se infiere que los dos puntos A y B determinan una recta, y otra los B y C. (261-II). Cada

una de las dos rectas AB y BC está contenida en los dos planos α y β, porque tiene con ellos dos puntos comunes no opuestos (261 - III). Esto advertido, si D es un punto cualquiera de la superficie plana α, no perteneciente á las rectas AB y BC, escójase sobre la recta BC un punto E que se halle respecto de la recta AB á distinto lado que D en el plano α. Como suponemos que D no está sobre la recta CEB, los dos puntos D y E no son opuestos, (265), y determinan, por lo tanto, una recta, que está dividida por dichos puntos en dos segmentos; uno cualquiera de éstos se halla en el plano α (261 - III.), corta en un punto á la recta AB (268 - I.), porque tiene sus extremos D y E á uno y otro lado de ella; y el punto F de intersección no es opuesto al E, porque E, F y B no están en línea recta (265 - *Cor.* 7.°). La superficie plana β contiene á los puntos no opuestos E y F: al primero, porque está sobre la recta BC, y al segundo por estarlo sobre la AB; luego contiene también á la recta EF (261 - III); y, por consiguiente, al punto D. Así, queda establecido que todo punto del plano α pertenece también la β; y como de igual modo se probaría que todo punto del plano β pertenece también al α, se debe sacar en consecuencia que ambos α y β son uno mismo, que es lo que se afirmaba.

270. I. *Tres puntos que no están en línea recta, determinan la posición de un plano.* En otros términos: *por tres puntos, no situados en línea recta, siempre pasa un plano, y no pasa más que uno.*

Demostración.—Sean A, B y C los tres puntos, no situados en línea recta. La superficie cónica que tiene por vértice el punto A, y por directriz la recta BC, es (por definición) un plano: y contiene, evidentemente, á los tres puntos A, B y C. Luego existe un plano que pasa por estos tres puntos. Y no existe más que uno, porque otro cualquiera que reuna las mismas condiciones, coincidirá con el primero, por tener con él tres puntos comunes no situados en línea recta. (270).

II. *Dos rectas* AB *y* BC *que se córtan, determinan un plano. También lo determinan una recta* AB *y un punto* C *exterior á ella.*

Porque el único plano, que contiene dichos elementos, es el determinado por los tres puntos A, B y C. (II).

271. I. Todo plano queda dividido por una recta, situada en él, en dos regiones, á las cuales llamaremos *semiplanos*. La recta que limita un semiplano, será la *arista* del mismo. Un plano, á su vez, divide al espacio total en dos partes, que recibirán el nombre de *semiespacios*, y no son otra cosa que cuerpos totalmente limitados por un plano.

II. *Dos semiplanos cualesquiera son iguales.*

Porque se logrará su coincidencia, colocándolos de manera que coincidan sus aristas, y haciendo girar uno de ellos alrededor de la arista común, hasta que tropiece con un punto del otro, exterior á dicha arista. (270-II).

III. *Dos planos cualesquiera son iguales.*

Porque se confunden, cuando se les coloca de manera que un semiplano del uno coincida con un semiplano del otro.

IV. *Dos semiespacios cualesquiera son iguales.*

Porque coinciden, cuando se les coloca de modo que se adapten sus planos limitadores, y queden á un mismo lado de este plano común.

272. *Si dos planos diferentes tienen un punto común, se cortan según una recta que pasa por dicho punto; y no tiene fuera de esta recta ningún otro punto común.*

Demostración.—Es, con ligerísimas modificaciones, la misma que puede darse de este principio en la Geometría vulgar.

(Fig. 251). Sea A un punto común á los dos planos α y 6. Trácense por A, en el plano 6, dos rectas AB y CA. Si alguna de estas rectas pertenece al plano α, ella será la intersección de α y 6; pero si ninguna de las dos pertenece al plano α, márquese arbitrariamente un punto B sobre la recta BA, y otro C sobre la CA; pero elegidos de tal suerte que los dos puntos B y C queden á distinto lado del plano α. Los tres puntos B, C y A no están en línea recta, y de esto se infiere (265-*Cor.* 7.°) que B y C no son opuestos, y determinan una recta BC situada en el plano 6 (261-II y III.). Uno cualquiera de los dos segmentos rectilíneos BC, por tener sus extremos B y C á distinto lado del plano α, cortará á α en un punto D (268-II) común á los dos planos, y que no puede ser el mismo punto A, ni su opuesto, porque, si lo fuera, deberían estar en línea recta los cuatro puntos B, A, C, D, siendo así que los tres primeros no lo están. Luego la recta AD estará contenida en los dos planos, porque tiene en cada uno de ellos dos puntos no opuestos A y D. Así, podemos afirmar que ambos planos α y 6 se cortan según una recta AD que pasa por A. Además, α y 6 no tienen fuera de esta recta ningún punto común; porque, si lo tuvieran, coincidirían; y suponemos que son diferentes.

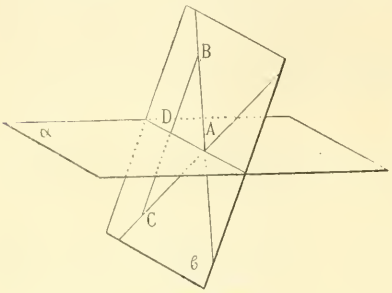


Fig. 251

273. *Dos rectas cualesquiera de un plano se cortan en dos puntos opuestos.*

Demostración.—Si las dos rectas a y b, situadas en un mismo plano, no se cortaran, uno de los dos semiplanos limitados por la recta a quedaría totalmente dentro de uno de los dos semiplanos limitados por la recta b; y resultaría que el primero era parte del segundo, lo cual es absurdo, porque las áreas de todos los semiplanos son finitas é iguales. (262 y 271-II).

OBSERVACIÓN.—Según este principio, en la Geometría elíptica no existen las rectas paralelas. Por consiguiente, *por un punto dado, no pasa ninguna paralela á una recta dada;* ó en otros términos: la recta no tiene ningún punto infinitamente lejano. Como (en la Geometría vulgar) esta última propiedad pertenece también á la elípse. se ha dado la denominación de *elíptica* á la geometría que ahora estudiamos (118-III).

274. *Un plano* α *y una recta cualquiera* b, *no situada en él, se cortan en dos puntos opuestos.*

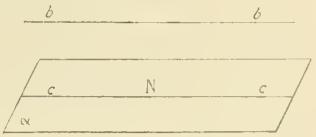


Fig. 252

DEMOSTRACIÓN. — (Fig. 252). La recta *b* y un punto N del plano α, exterior á *b*, determinan un plano (270-II.) que corta al α según una recta *c* que pasa por N (272). Las rectas *b* y *c*, por estar en un mismo plano, se cortan en dos puntos opuestos (265); luego en estos mismos puntos corta la recta *b* al plano α.

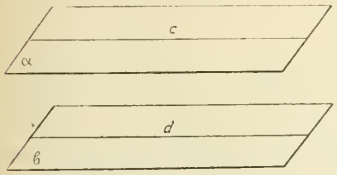


Fig. 253

275. *Dos planos cualesquiera se cortan.*

DEMOSTRACIÓN. — (Fig. 253). Sean α y 6 los dos planos. Trácese en α una recta *c*; y si casualmente está situada en 6, *c* será la intersección. Pero si *c* no está en 6, cortará á 6 en dos puntos opuestos N y N_1, que pertenecerán á los dos planos α y 6; luego éstos, por ser diferentes y tener un punto común N, se cortan (272) según una recta que pasa por N (y por su punto opuesto N_1).

II. — Distancia entre dos puntos, y ángulo de dos rectas.

276. La mitad de una recta se llama *semirrecta;* y la cuarta parte, *cuadrante* de aquella línea. De dos segmentos rectilíneos, se dirá que son *suplementarios ó complementarios*, según que su suma valga media recta ó un cuadrante.

Si A y B son puntos opuestos, existen infinidad de caminos rectilíneos, que van desde A hasta B; y todos ellos valen media recta, y miden la *distancia* entre aquellos dos puntos. Pero, si A y B no son opuestos, para ir desde A hasta B, sólo existen dos caminos rectilineos, los cuales componen juntos la recta AB, y tienen diferente longitud: el menor de ambos constituye la *distancia* entre A y B. Según esto, *la distancia entre dos puntos vale media recta, si los dos puntos son opuestos; pero vale menos en el caso contrario.*

277. (Fig. 254). *La distancia entre dos puntos* A *y* B *es igual á la distancia entre sus opuestos* A_1 *y* B_1.

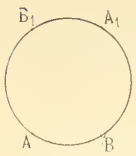


Fig. 254

Porque la recta AB pasa por A_1 y B_1; y como es una línea cerrada, á las dos distancias AB y A_1B_1 les falta un mismo segmento rectilíneo B_1A para valer media recta; luego ambas distancias son iguales.

278. (Fig. 255). Dos semirrectas ABA_1 y ACA_1, que tienen los mismos extremos, dividen al plano en que yacen en dos partes que se llaman *ángulos;* y tienen por *lados* aquellas dos semirrectas, y por *vértices* sus dos extremos A y A_1. Según esto, *el ángulo rectilíneo tiene dos vértices, que son puntos opuestos; y sus dos lados son iguales á media recta. La superficie del ángulo rectilíneo es finita.*

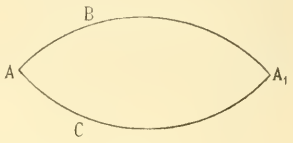


Fig. 255

279. *Todo ángulo puede coincidir por inversión consigo mismo; es decir, puede colocarse de manera que, permaneciendo inmóviles sus dos vértices, cada lado, en su nueva posición, coincida con la posición primitiva del otro.*

(Fig, 256). Efectivamente, si después de darle la vuelta, colocamos el ángulo ABC sobre el mismo plano, de manera que, recobrando cada vértice su primitiva situación, el lado ABA_1 coincida en su nueva posición con el ACA_1, este lado ACA_1 en su nueva posición, tendrá que coincidir con la primitiva del ABA_1; porque, si cayese totalmente dentro ó totalmente fuera, de la superficie del ángulo, el área de éste (que es finita) se excedería á sí misma, lo que es absurdo; y si una parte de dicho lado ACA_1 cayese dentro, y otra parte fuera, adquiriendo la posición $AC'A_1$ esta semirrecta cortaría al contorno del ángulo en un punto D diferente de A y de su opuesto A_1; y tendríamos dos rectas diferentes $AC'A_1$ y ABA_1 con tres puntos comunes, lo cual es imposible.

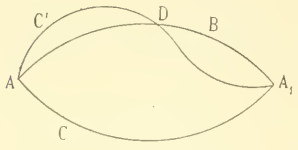


Fig. 256

280. *Los dos lados de un ángulo se cortan bajo igual inclinación en sus dos vértices.* Ó con más claridad· *todo ángulo puede coincidir consigo mismo, de manera que cada vértice, en su nueva posición, coincida con la posición primitiva del otro.*

Efectivamente (fig. 254), si hacemos resbalar este ángulo sobre su mismo plano, hasta que el vértice A_1 se situe en su opuesto A, y el lado ACA_1, en su nueva posición, coincida con la posición primitiva del A_1BA, se verá razonando

como en la proposición anterior, que también el lado ABA_1 en su nueva situación, se confunde con la primitiva del lado A_1CA.

COROLARIO.—*Si dos rectas* AB *y* AC (fig. 254) *son normales en un punto* A, *también lo son en el opuesto* A_1.

281. I. *Todos los ángulos llanos son iguales; todos los rectos también lo son. Dos ángulos opuestos por el vértice (ó mejor dicho, por sus vértices) son iguales.*

II. *Si un ángulo es recto, también lo son sus dos adyacentes y su opuesto por el vértice.*

III. *Por un punto de una recta, pasan infinidad de normales á ella; y entre todas, existe una, pero solamente una, situada en un plano dado, que contenga á dicha recta.*

IV. *Las bisectrices de dos ángulos adyacentes son normales; las de dos ángulos opuestos por el vértice, y también las de los dos ángulos* AOB *y* BOA, *que juntos componen todo el plano, forman una sola recta.*

V. *En el círculo, á iguales ángulos céntricos corresponden iguales arcos; al mayor de dos ángulos céntricos, corresponde mayor arco; y viceversa.*

VI. *Los arcos circulares de igual radio, son proporcionales á sus ángulos céntricos.*

Se demuestran todas estas proposiciones de igual modo que en la Geometría vulgar.

III.—Polígonos convexos. Igualdad de triángulos. Aplicaciones.

282. (Fig. 257). En la Geometría elíptica, de igual modo que en la vulgar y en la hiperbólica, se dirá que un polígono ABCDE es convexo, cuando la recta á que pertenece uno cualquiera de sus lados, deja todo el polígono en un mismo semiplano, y se consideran como *ángulos del polígono convexo* los ángulos, de los cuales es parte el polígono, que forman cada dos lados consecutivos. Así, EAB, y no BAE, es un ángulo del polígono sombreado ABCDE.

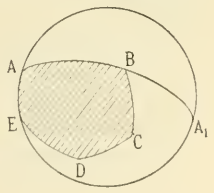


Fig. 257

En el polígono convexo, cada lado es menor que media recta, y cada ángulo es menor que uno llano.

Efectivamente, por hipótesis, la recta EA deja todo el polígono ABCDE en un mismo semiplano, en el cual, por consiguiente, se hallarán el ángulo EAB y el lado AB; luego EAB es menor que dicho semiplano, y AB es menor que la semirrecta ABA_1. De igual modo se probaría la exactitud de la proposición para los otros ángulos y lados.

OBSERVACIÓN.—Un triángulo puede ser convexo ó no serlo; sin embargo, nosotros entenderemos por triángulo el que es convexo, el que tiene cada ángulo menor que uno llano, y cada lado menor que media recta.

283. *Si un triángulo tiene dos lados ó dos ángulos iguales, puede coincidir por inversión consigo mismo.*

Se demuestra de igual modo que en la Geometría vulgar.

284. I. *Dos triángulos son iguales, si en uno de ellos, dos lados y el ángulo comprendido, ó dos ángulos y el lado común á ellos, son respectivamente iguales á los tres elementos que tienen el mismo nombre y situación en el otro triángulo.*

Se demuestran estas dos proposiciones de igual modo que en la Geometría vulgar.

II. *Dos triángulos son iguales, si tienen los tres ángulos ó los tres lados del uno, respectivamente iguales á los tres ángulos ó á los tres lados del otro.*

DEMOSTRACIÓN. — 1.° (Fig.s 258 y 259). Sean ABC y A′B′C′ dos triángulos, respecto de cuyos ángulos se supone que $A = A'$, $B = B'$ y $C = C'$.

Colóquense estos dos triángulos sobre un mismo plano, de manera que, estando sus elementos iguales dispuestos en sentidos contrarios, los ángulos iguales

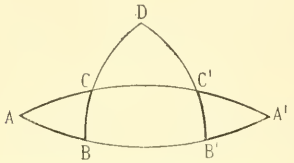


Fig. 258

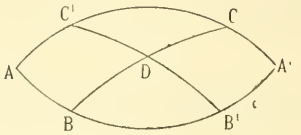


Fig. 259

A y A′ coincidan, y que los vértices A y A′ sean opuestos. En esta situación, las dos rectas BC y B′C′ se cortarán (273); sea D uno de los dos puntos de intersección. Á causa de la hipótesis, cada uno de los dos triángulos DBB′ y DCC′ tiene iguales los ángulos en su base BB′ ó CC′. Si se rebate toda la figura, de manera que el triángulo DBB′ coincida por inversión consigo mismo (283), el DCC′ también coincidirá consigo mismo por inversión; y otro tanto ocurrirá, por consiguiente, á la figura total; luego los dos triángulos ABC y A′B′C′ habrán coincidido; luego son iguales.

En el caso particular de que se confundan los vértices B y B′, ó los C y C′

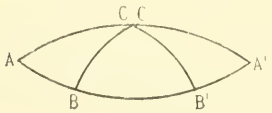


Fig. 260

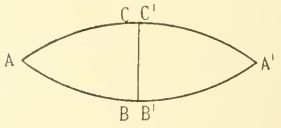


Fig. 261

(fig. 260), la demostración subsiste. En fin (fig. 261), si B coincide con B′, y C con C′, el rebatimiento de la figura alrededor de la recta BC, produce, evidentemente, la coincidencia de los dos triángulos ABC y A′B′C′.

2.° (Figs. 262 y 263). Supongamos que entre los lados de los dos triángulos ABC y A′B′C′ se cumplen las relaciones $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$.

Colóquense estos triángulos sobre un mismo plano, en la posición que indica la figura, es decir, de manera que, situándose B en B′, coincidan los lados iguales BC y B′C′, y dejen á los dos triángulos á una y otra parte del lado común BC. Trácese en el plano el segmento de recta AA′. Si ahora se coloca el cuadrilátero

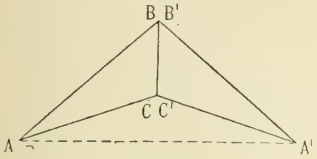


Fig. 262

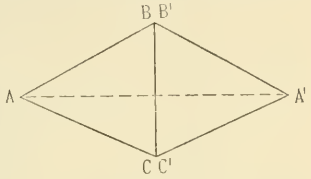


Fig. 263

ABA′C de manera que el triángulo isósceles ABA′ coincida por inversión consigo mismo, el otro triángulo isósceles ACA′ también coincidirá consigo mismo por inversión; y otro tanto ocurrirá, por consiguiente, á la figura total; luego los dos triángulos ABC y A′B′C′ habrán coincidido; luego son iguales.

Pudiera ocurrir (figs. 264 y 265) que uno ó los dos triángulos isósceles ABA′

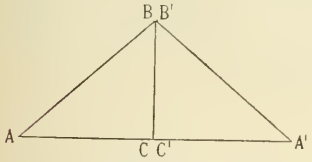


Fig. 264

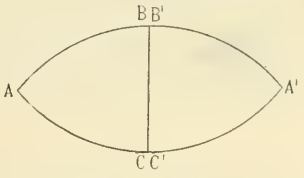


Fig. 265

y ACA′ se redujera á una recta; pero la demostración subsistiría.

Corolario.—*Dos triángulos opuestos, es decir, tales que los vértices del uno son los puntos opuestos á los vértices del otro, son iguales.*

Por serlo sus lados correspondientes (277).

285. I. *En el triángulo isósceles, la bisectriz del ángulo en el vértice, la mediana correspondiente á la base y la mediatriz de esta base (situada en el plano del triángulo) son una misma recta.*

II. *El lugar de los puntos de una superficie plana, tales que cada uno*

equidista de los extremos de un segmento rectilíneo trazado en ella, es una mediatriz de dicho segmento.

III. *Si, en un plano dado, una recta tiene dos puntos no opuestos, tales que cada uno equidista de los extremos de un segmento rectilíneo, aquella recta es mediatriz de dicho segmento.*

Se demuestran estas tres proposiciones, fundándose en los caracteres de igualdad de triángulos, por igual procedimiento que en la Geometría vulgar.

286. I. (Fig. 266). *Si dos lados* AB *y* AC *de un triángulo* ABC *son cuadrantes, sus ángulos opuestos* C *y* B *son rectos.*

Efectivamente, los lados AB y AC, prolongados, vuelven á cortarse en otro punto A_1 opuesto al A (265), por cuyo motivo también serán cuadrantes las distancias A_1B y A_1C. Como las rectas AB y AC se cortan en A y A_1 bajo igual inclinación (280) los dos triángulos ABC y A_1BC reunen las condiciones áng. $A =$ áng. A_1, $AB = A_1B$, $AC = A_1C$; luego estos triángulos son iguales; luego también lo son sus ángulos homólogos ABC y CBA_1; y como además son adyacentes, serán rectos. Análogamente, los ángulos BCA y A_1CB son rectos, porque á más de ser adyacentes, resultan iguales, como homólogos de los triángulos iguales ABC y A_1BC. Luego, en el triángulo ABC, sus ángulos en B y C son rectos.

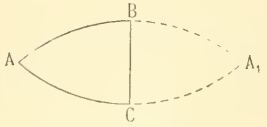


Fig. 266

II. (Fig. 266). *Si dos ángulos* B *y* C *de un triángulo son rectos, sus lados opuestos* AC *y* AB *son cuadrantes.*

En efecto; de la hipótesis se deduce que también son rectos los ángulos en B y C del triángulo A_1BC, y que, por consiguiente, son iguales los dos triángulos ABC y A_1BC (284-II); luego también lo son sus lados homólogos AB y A_1B, AC y A_1C; y así, AB es la mitad de la semirrecta ABA_1, y AC la mitad de la semirrecta ACA_1; luego AB y AC son cuadrantes.

IV.—De la normal al plano, y de los ángulos diedros.

287. Los caracteres de igualdad de triángulos, que llevamos expuestos, permiten establecer, por igual procedimiento que en la Geometría vulgar y en la hiperbólica, las proposiciones siguientes.

I. *Si una recta es normal en un mismo punto á otras dos de un plano* α, *también será normal á toda otra recta del plano* α, *que pase por dicho punto.*

II. *Por un punto de una recta, pasa un plano normal á ella; y nada más que uno.*

III. *El lugar de las normales á una recta en un punto, es un plano normal á dicha recta.*

IV. *El lugar de los puntos, tales que cada uno equidista de los extremos de un segmento rectilíneo dado, es el plano normal á este segmento en su punto medio.*

V. *Si cada uno de los tres puntos* B, C, D, *no situados en línea recta, equidista de los extremos de un segmento rectilíneo, el plano* BCD *es normal á dicho segmento en su punto medio.*

VI. *Por un punto de un plano, pasa una recta normal á él; y nada más que una.*

VII. *Todas las secciones rectas de un mismo diedro son iguales.*

VIII. *Todo diedro puede coincidir por resbalamiento y por contraposición consigo mismo.*

IX. *Á diedros iguales, corresponden iguales secciones rectas; al mayor de dos diedros corresponde mayor sección recta. Y viceversa.*

X. *La razón de los diedros es igual á la razón de sus secciones rectas.*

XI. *Todos los diedros llanos son iguales; todos los rectos también lo son. Dos diedros opuestos por la arista son iguales.*

XII. *Si un diedro es recto, también lo es su sección normal; y viceversa.*

XIII. *Si un diedro es recto, también lo son sus dos adyacentes y su opuesto por la arista.*

XIV. *Si un plano* α *es normal á una recta, también será normal á todo plano* β *que contenga á dicha recta.*

XV. *Si dos planos* α *y* β *son normales, toda recta trazada en* α *normalmente á la intersección* $\alpha\beta$, *es normal á* β.

XVI. *Si un plano* α *es normal á otros dos* β *y* γ, *es normal á su intersección.*

288. (Fig. 267). *Si una recta* a *y un plano* α *son normales en un punto* N, *también lo serán en el punto opuesto* N_1.

Demostración.—Por cortar la recta *a* al plano α en el punto N, lo corta también en el N_1 opuesto al N (274). Por otra parte, toda recta *b* del plano α, dirigida por N_1 pasa por N (265) y es normal á *a* en N_1, por serlo en N, según la hipótesis (280·*Corol.*); luego *a* es normal en N_1 al plano α, por serlo á todas las rectas de este plano, dirigidas por N_1.

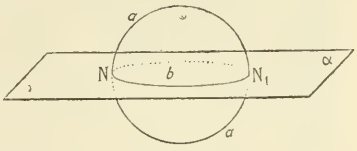


Fig. 267

V.—Círculo y esfera.

289. I. *Toda circunferencia, cuyo radio valga un cuadrante, es una línea recta.*

Demostración.—(Fig. 268). Sean O el centro de la circunferencia, y A, B, C, tres puntos cualesquiera de la misma. Si, como suponemos, los radios OA, OB, OC son cuadrantes de recta, en los triángulos OAB y OBC serán rectos los ángulos OBA y CBO (286-I), lo cual prueba que A, B, C están en línea recta; luego la circunferencia, de que se trata, es una línea recta.

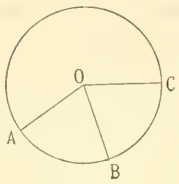


Fig. 268

II. *Recíprocamente, toda recta es una circunferencia, que tiene por radio un cuadrante.*

En efecto (fig. 268), si en un plano arbitrario, que contenga á la recta dada AB, trazamos dos rectas normales á ella en los puntos A y B, estas dos rectas se cortarán (273). Si O es uno de los dos puntos de intersección, en el triángulo birrectángulo OAB serán cuadrantes los lados OA y OB; de lo cual resulta (I) que la circunferencia descrita en el plano de que se trata, con centro O y radio OA, será una recta que pasará también por B, ó sea la AB; luego esta recta es una circunferencia que tiene por centro O, y por radio un cuadrante OA.

Observación.—El punto opuesto del O también dista un cuadrante de todos los puntos de la recta AB; y así, toda recta es una circunferencia, cuyo plano es uno cualquiera de los que contienen á la recta; y tiene en cada uno de ellos dos centros, que son puntos opuestos.

290. I. *Toda superficie esférica, cuyo radio valga un cuadrante, es un plano.*

Demostración.—(Fig. 269). Sean O el centro de la esfera, M, A, B,.... puntos de su superficie, y O_1 el punto opuesto al O. Si, como suponemos, cada una de las distancias OM, OA, OB,..... vale un cuadrante, lo mismo valdrán las distancias O_1M, O_1A, O_1B.....; por lo tanto, la superficie esférica de centro O y radio igual á un cuadrante, es el lugar de los puntos, tales que cada uno equidista de los extremos O y O_1 del segmento rectilíneo OMO_1; luego (287-IV) aquella superficie esférica es un plano normal á dicho segmento OMO_1 en su punto medio M.

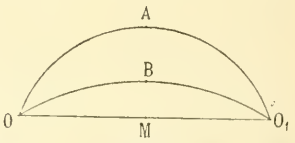


Fig. 269

II. *Recíprocamente, todo plano es una superficie esférica, que tiene por radio un cuadrante.*

En efecto (fig. 270), dirijamos una normal al plano dado α, por un punto M de él, y llevemos sobre la normal, á uno y otro lado de ella, las longitudes MO y MO_1 iguales á un cuadrante, con lo cual O y O_1 serán puntos opuestos. La superficie esférica de centro O y radio OM es un plano normal á OMO_1 en su punto medio M (I); y es, por consiguiente, el mismo plano α; luego éste es una superficie esférica de centro O y radio OM igual á un cuadrante.

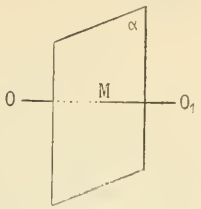


Fig. 270

OBSERVACIÓN.—El punto O_1 también dista un cuadrante de todos los puntos del plano α. Luego la superficie esférica, denominada plano, tiene dos centros O y O_1, que son puntos opuestos.

291. (Fig. 271). *Todos los puntos* A, B, C, ... *que equidistan de un punto fijo* O, *equidistan también de su opuesto* O_1.

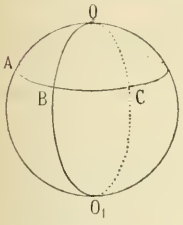


Fig. 271

Porque, si las distancias OA, OB, OC,... son iguales, también lo serán las OA_1, OB_1, OC_1,..., puesto que á todas éstas les faltará la misma longitud para valer media recta.

COROLARIO.—*Toda circunferencia, y también toda superficie esférica, tiene dos centros, que son puntos opuestos.*

OBSERVACIÓN.—Toda circunferencia ABC divide á su plano en dos círculos; y aunque su circunferencia común tiene dos centros O y O_1, en cada círculo no se considera como centro más que aquel que es interior á su superficie. Análogamente, toda superficie esférica divide al espacio total en dos esferas; y en cada una de ellas no se considera como centro más que aquel que es interior á dicho cuerpo.

La superficie de un círculo, y también el volumen de una esfera, crecen con el radio; y alcanzan su valor máximo, cuando el radio vale media recta. Puede considerarse el plano como un círculo, cuyo radio vale media recta, y cuyo contorno se reduce á un punto (el opuesto al centro); y análogamente, el espacio total es una esfera, que tiene por radio media recta, y su periferia reducida, á un punto, que es el opuesto del centro. *Existen, pues, un círculo máximo (el plano), y una esfera máxima (el espacio total).*

Más adelante demostraremos que, si el radio crece, primero desde cero hasta un cuadrante, y después desde un cuadrante hasta media recta, la longitud de la circunferencia crece primero desde cero hasta una recta, pero mengua después desde una recta hasta cero; y si se trata de una esfera, la superficie crece al principio desde cero hasta un plano, y mengua luego desde un plano hasta cero. Infiérese de esto, que *las rectas son circunferencias máximas de la esfera deno-*

minada plano; y que las superficies esféricas de área máxima son los planos.

VI. Polos de una recta y de un plano.

292. A los centros de una circunferencia (aunque ésta sea una recta) y á los de una superficie esférica (aunque ésta sea un plano) se les llama también *polos* de aquella línea ó superficie. Bajo el nombre de *recta polar* y de *plano polar* de un punto se comprende la recta ó plano que tiene á este punto por uno de sus polos. De estas definiciones, y de la doctrina expuesta en el artículo precedente, se sigue que todo plano tiene dos polos, que son puntos opuestos; y á todo punto corresponde un solo plano polar. Análogamente, toda recta de un plano α, solo tiene en α dos polos, que son puntos opuestos, y todo punto de α sólo tiene en α una recta polar.

293. *Una recta es normal á todas las que, á más de apoyarse sobre ella, pasan por uno de sus polos.*

Recíprocamente, en un plano dado, todas las rectas normales á otra, pasan por los dos polos de esta otra.

Demostración.—1.° (Fig. 272). Si O es un polo de la recta AB, el triángulo OAB, por tener dos lados OA y OB iguales á un cuadrante, tendrá rectos sus ángulos en A y B; luego toda recta OA, que corta á la AB y pasa por su polo O, es normal á AB.

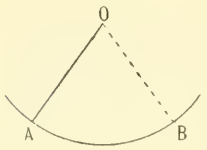


Fig. 272

2.° Supongamos que, en el plano de la figura 273, la recta AB tiene por uno de sus polos al punto O, y que la recta AN, situada en aquel plano, es normal en A á la recta AB. Trazando el radio OA, resultará (según acabamos de probar) recto el ángulo BAO; por consiguiente, si la recta AN no coincidiera con la AO, se tendría el absurdo de que el ángulo BAN, recto por hipótesis, sería mayor ó menor que el recto BAO; luego la recta AN pasa por el polo O de AB.; y es claro que también pasaría por el otro polo O_1 opuesto al O.

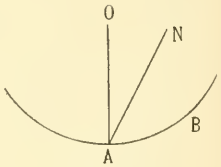


Fig. 273

294. I. (Fig. 273). *Por un polo* A *de una recta* a, *pasan infinidad de normales á ella.*

Puesto que (293) todas las rectas del plano A *a*, dirigidas por A, son normales á *a*.

II. (Fig. 274). *Por un punto* B *exterior á una recta* a, *y que no sea su polo, pasa una recta, y solamente una, que corta normalmente á la primera.*

Efectivamente, la recta a tiene en el plano Ba dos polos A y A_1; y como, por hipótesis, A y B no coinciden ni son opuestos, determinan una recta AB. Ahora bien, entre las rectas del plano aA, las que pasan por A, y solamente ellas, son normales á a; luego, entre todas las rectas de aquel plano, dirigidas por B, la BA, y ninguna otra, será normal á a.

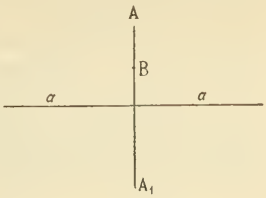


Fig. 274

295. *El plano es normal á todas las rectas que pasan por sus polos.*

Recíprocamente, todas las rectas normales á un plano, pasan por los dos polos de esta superficie.

Demostración.—1.° (Fig. 275). Todo punto del plano α dista de sus dos polos A y A_1 un cuadrante; luego todos los puntos de α equidistan de los extremos A y A_1 de una semirrecta cualquiera que empiece en A; y, por consiguiente, el plano es normal á esta semirecta en su punto medio M (287-IV).

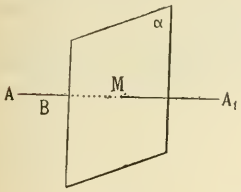


Fig. 275

2.° Toda recta x normal al plano α en un punto cualquiera M, pasa por los polos A y A_1 de α; porque de lo contrario, por el punto M podrían dirigirse dos normales x y AMA_1 al plano α. (AMA_1 es normal á α, por contener al polo A de α).

296. I. (Fig. 275). *Por un polo* A *de un plano* α *pasan infinidad de normales á* α.

Puesto que todas las rectas, dirigidas por A, son normales á α.

II. (Fig. 275). *Por un punto* B, *que no sea polo de un plano* α, *pasa una normal á dicho plano; y solamente una.*

Efectivamente, como por hipótesis, B no coincide con ninguno de los dos polos A y A_1 del plano α, los dos puntos A y B no son opuestos, y determinan una recta AB. Ahora bien, las rectas que pasan por A, y solamente ellas, son normales al plano α; luego, entre todas las rectas dirigidas por B, existe una recta AB, y solamente una, normal al referido plano.

297. *Un plano* α *es normal á todos los planos que pasan por sus polos* A *y* A_1.

Recíprocamente, todos los planos normales á un plano α *pasan por los polos* A *y* A_1 *de* α.

Demostración.—(Fig. 276). 1.° Supongamos que el plano 6 pasa por A. Trazando en 6, por el punto A, una recta cualquiera n, será n normal á α (295); luego el plano 6, por contener á la recta n, será normal al α (287-XIV).

2.° Suponemos que el plano 6 es normal al α. Una recta n de 6, normal

á la intersección de α y β, es normal á α (287-XV), y pasa por los polos A y A_1 de α Luego también β pasa por A y A_1.

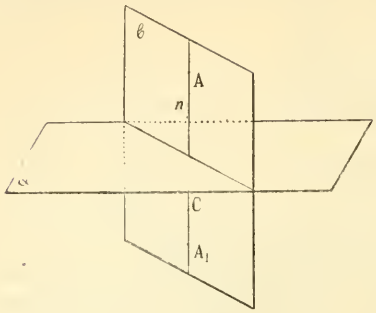


Fig. 276

298. *Todas las rectas y planos que pasan por un punto* A, *tienen un plano normal común, que es el plano* α *polar de aquel punto.*

Porque todos aquellos planos y rectas, por contener al polo A de α, son normales á α (295 y 297).

299. (Fig. 276). *Si dos planos* α *y* β *son normales, toda normal* n *á* α, *dirigida por un punto* C *de* β, *que no sea polo de* α, *está situada en* β.

Efectivamente, el plano β y la recta n, por ser normales á α, pasan por los polos A y A_1 de α (295 y 297); luego la recta n, por tener en β dos puntos no opuestos A y C, estará situada en β.

VII.—Rectas recíprocas.

300. I. Diremos que dos rectas son *recíprocas*, cuando cada una tiene por polos los puntos de la otra. La existencia de esta clase de rectas, como asimismo la propiedad de que á cada recta corresponde una sola recíproca, se prueba por medio de la siguiente proposición.

El lugar de los polos de una recta es otra recta; la cual, á su vez, tiene por polos los puntos de la primera.

Demostración.—(Fig. 277). Sea a una recta, y veamos cual es el lugar de sus polos. Trácese por un punto B de a un cuadrante BA normal en M á a: el extremo A de este cuadrante será un polo de a; y si hacemos girar el ángulo recto ABa alrededor de a, la línea b descrita por el punto A será el lugar de los polos de la recta a. Pero dicho lugar es, evidentemente, una circunferencia; y como su radio vale un cuadrante BA, esta circunferencia b es una recta. Luego el lugar de los polos de a es una recta b.

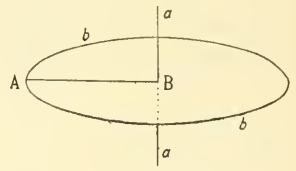


Fig. 277

Análogamente, como BA es un cuadrante normal en A á la recta b, si

hacemos girar el ángulo BAb alrededor de b, se verá que la circunferencia descrita por B es el lugar de los polos de b, y que esa circunferencia es una recta, y está en un plano normal á b en A; pero este plano es el aA; y, por consiguiente la referida circunferencia es la recta a. Luego a es, á su vez, el lugar de los polos de la recta b.

Observación.—Del razonamiento anterior se infiere que, para construir la recta recíproca de una recta dada b, basta dirigir por un punto A de b el cuadrante AB normal á b; y por B la normal a al plano bB; y esta normal será la recta recíproca de b.

II. *Si dos rectas son recíprocas:*

1.° *La distancia entre un punto cualquiera de la una y un punto cualquiera de la otra, vale un cuadrante;*

2.° *Toda recta que corte á las dos, es normal á ellas;*

3.° *Los planos que pasan por una de ellas, son normales á la otra;*

4.° *Los planos normales á la primera, contienen á la segunda.*

Demostración.—(Fig. 278). Sean a y b dos rectas recíprocas, B un punto de a, y A un punto de b.

1.° La distancia AB vale un cuadrante, porque A es polo de b

2.° Las dos rectas a y b son normales á toda recta AB que las corte, porque AB pasa por un polo B de a, y por un polo A de b (293).

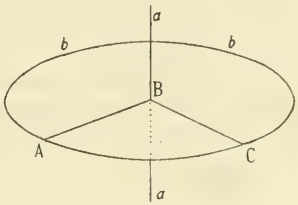


Fig. 278

3.° Todo plano 6, que pasa por b, corta á la recta a (274). Si B es uno de los dos puntos de intersección, y A y C son puntos de b, las rectas AB y CB son normales á a, según acaba de probarse; luego a es normal al plano 6, por serlo en B á dos rectas BA y BC de este plano.

4.° Recíprocamente, todo plano 6 normal á la recta a, contiene á su recíproca b. En efecto, si B es una intersección de a con 6, será a normal en B á las rectas BA y BC; y normal por consiguiente, al plano BAC, ó sea al Bb; luego este plano y el 6, por ser ambos normales en B á la recta a, son uno mismo; y, por lo tanto, el plano 6 contiene á la recta b.

Observación.—Los dos últimos enunciados de este párrafo equivalen á estos otros.

Todos los planos normales á una misma recta a, *tienen una recta común, que es la recíproca de* a. *Todos los planos que contienen á una misma recta* a, *tienen una normal común, que es la recíproca de* a.

III. *Por un polo de una recta, pasan infinidad de planos normales á ella.*

Por un punto que no sea polo de una recta, pasa un plano normal á la recta, y solamente uno.

DEMOSTRACIÓN. — 1.° Si A es un polo de la recta *a*, cae sobre la recta *b*, recíproca de *a*; los planos que contienen á *b* contienen también á A, y son normales á *a* (300.-II.-3.°); luego, por el punto A, pasan infinidad de planos normales á la recta *a*.

2.° Si B no es polo de la recta *a*, no cae sobre la recíproca *b* de *a*. Los planos que pasan por *b*, y ninguno más, son normales á la recta *a*; pero, entre todos ellos, hay uno, y solamente uno, que pasa por B, y es el plano *b*B; luego por el punto B pasa un plano *b*B normal á la recta *a*; y no pasa otro.

VIII. — Hiperciclo, hiperesfera y pseudo-cilindro.

301. El hiperciclo, que hemos estudiado en la Geometría hiperbólica, puede ser definido diciendo que es el lugar de los puntos de un plano, equidistantes de una recta del mismo, y situados á un mismo lado de ella. Análogamente, la superficie de la hiperesfera es el lugar de los puntos equidistantes de un plano, y situados á un mismo lado de él. Admitidas estas definiciones, y conservando para las denominaciones de base y alturas la misma significación que se les atribuye en la Geometría hiperbólica, podremos enunciar y demostrar, para la Geometría elíptica, las leyes siguientes.

1.° *El hiperciclo es una circunferencia de círculo, que tiene por centros los polos de la base.*

2.° *La superficie de la hiperesfera es la de una esfera; y los dos centros de ésta son los polos de la base de aquélla.*

DEMOSTRACIÓN. — (Fig. 279). Sean A, B, C,..... puntos del hiperciclo *h*, y *b* la recta que le sirve de base (representada en la figura por un arco de círculo). Las alturas AM, BN, CP,... de aquellos puntos concurren (prolongadas) en los dos polos de la recta *b* (293). Designemos por O el polo que está al mismo lado de esta recta *b* que el hiperciclo; y serán cuadrantes las distancias OM, ON, OP,... La altura, del hiperciclo, por ser la distancia de un punto á una recta, debe ser igual ó menor que un cuadrante. En el primer caso, el hiperciclo se reduce, evidentemente, á un punto, que es el polo O. Pero si la altura es menor que un cuadrante, las distancias OA, OB, OC,... son iguales, como complementos de las alturas iguales AM, BN, CP,...; luego, en este caso, el hiperciclo es una circunferencia, que tiene por centro el polo O, y por radio el complemento de la

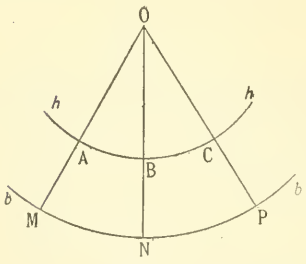


Fig. 279

altura. Claro está que el otro polo de la recta *b* es también centro de dicha circunferencia.

Queda establecida la proposición referente al hiperciclo; y por análogo razonamiento se demostraría la referente á la hiperesfera.

302. (Fig. 280). Sean *h* una circunferencia menor, O el centro correspondiente al menor de los dos círculos que limita, *a* la recta polar de este centro (situada en el plano del círculo) y *b* la recíproca de *a*. La circunferencia *h* es un hiperciclo, que tiene *a* por base; y por consiguiente, si esta circunferencia da una vuelta completa alrededor de la recta *a*, la superficie de revolución, que describe, es el lugar de todos los puntos del espacio, cuya distancia á la recta *a* es igual á la altura del hiperciclo *h*. A la porción del espacio, limitada por esta superficie, y que contiene al eje de revolución *a*, la denominaremos *pseudo-cilindro completo;* y al segmento de este cuerpo, comprendido entre dos planos normales al eje, le llamaremos sencillamente *pseudo-cilindro*, de conformidad con lo dicho en el párrafo 248 de la Geometría hiperbólica. La superficie *pseudo-cilíndrica*, descrita por la circunferencia *h* en su revolución alrededor de la recta *a*, es, á su vez, el lugar de los puntos cuyas distancias á la recta *b* (recíproca de *a*) es constantemente igual al radio OC de la circunferencia *h*, radio que es el complemento de la altura CD del hiperciclo *h*. Resulta, pues, que dicha superficie limita dos pseudo-cilindros completos, cuyos respectivos ejes de revolución son la recta *a* y su recíproca *b*. Entre ambos cuerpos componen todo el espacio. De los dos pseudo-cilindros completos, el de eje *b* es también un toro, descrito por el círculo (O*h*) en su revolución alrededor de *a*; y, á su vez, el pseudo-cilindro completo, de eje *a*, es un toro de eje *b*.

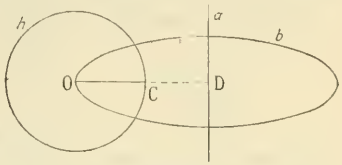


Fig. 280

IX. — De la normal común á dos rectas, que se cortan, ó á dos planos.

303. *Si dos rectas se cortan, tienen en su plano una normal común, y solamente una, la cual biseca á los lados de los ángulos que forman aquellas rectas.*

Demostración. — Fig. 281). Sean *b* y *c* las dos rectas secantes, A y A_1 sus dos puntos de intersección, B un polo de *b*, y C un polo de *c*, situados ambos en el plano *bc*. Toda recta de este plano, que sea normal á *b*, pasa por B; y si es normal á *c*, pasa por C (293); luego, si reune ambas condiciones, pasa por B y C. Por consiguiente, la recta BC, y ninguna otra, es la única recta del plano *bc*, que corta normalmente á las *b* y *c*. Además, los lados de los 4 ángulos cón-

cavos que forman las rectas b y c, están bisecados en M y M_1, N y N_1, por la normal común BC: efectivamente, los triángulos AMN y A_1MN son iguales, porque tienen un lado común MN, é iguales sus ángulos en M y N; y de la igualdad de estos triángulos, se sigue la de sus lados homólogos AM y A_1M, AN y A_1N, lo que prueba que M y N son los respectivos puntos medios de los lados AMA_1 y ANA_1. De igual modo se probaría que M_1 y N_1 bisecan á las semirrectas AM_1A_1 y AN_1A_1.

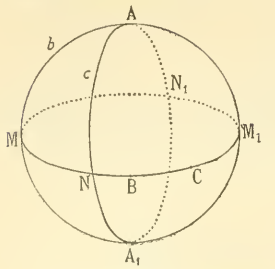


Fig. 281

304. *Dos planos tienen una normal común, y solamente una.*

Demostración.—Sean α y 6 los dos planos, A un polo de α, y B un polo de 6. Estos dos puntos A y B no coinciden ni son opuestos, y determinan, por consiguiente, una recta. Las rectas que pasan por A, y solamente ellas, son normales al plano α; las que pasan por B, y ninguna más, son normales á 6; luego la recta AB, y ninguna otra, será normal á α y 6. Luego estos dos planos α y 6 tienen una normal común AB, y no tienen otra.

X.—Algunas propiedades riemannas del diedro y del ángulo sólido.

305. I. Dos planos diferentes se cortan siempre (275) según una recta (272), y dividen al espacio total en 4 regiones, que son ángulos diedros. Como la recta es una circunferencia, y el semiplano un círculo, *el diedro es un cuerpo completamente limitado; y su volumen es finito, por serlo el espacio total, del que es una parte. En el diedro, la arista es una circunferencia* (289-II), *y las caras son círculos.*

II. *Las caras de un diedro son normales á la recta que une sus centros.*

Demostración.—(Fig. 282). Sean ABCD la arista de un diedro, y M y N los centros de sus caras. Las distancias AM, BM, AN y BN son cuadrantes (289-II); luego (286-I), en los triángulos AMN y BMN, son rectos los ángulos en M y N. Podemos, pues, afirmar que la recta MN es normal en M á dos rectas MA y MB de la cara MAB, y en N á dos rectas NA y NB de la cara NAB; luego MN es normal á los planos de ambas caras.

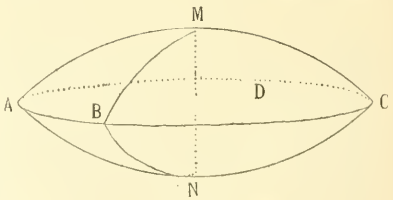


Fig. 282

III. *El diedro es un cuerpo de revolución.*

Efectivamente (fig 282), puesto que la recta MN que une los centros de las dos caras es normal á ellas, si el triángulo AMN gira alrededor de la recta MN, el cuadrante MA describirá una cara del diedro; el cuadrante NA la otra cara; y todo el triángulo AMN, el diedro dado. Luego éste es un cuerpo de revolución, cuyo eje es la recta MN.

306. (Fig. 283). Sean OAO_1, OBO_1, OCO_1, ODO_1, OEO_1 diferentes semirrectas no situadas en un mismo plano, y que tienen los mismos extremos O y O_1: la superficie constituida por los ángulos rectilíneos AOB, BOC, COD, DOE, EOA, es completamente cerrada, y divide al espacio en dos cuerpos que se llaman *ángulos sólidos* ó *ángulos poliedros*. Cada uno de estos dos ángulos sólidos tiene por *vértices* los dos puntos O y O_1; por *aristas* las semirrectas OAO_1, OBO_1, OCO_1, ODO_1, OEO_1, y por *caras* los ángulos rectilíneos AOB, BOC, ... que forman la superficie. Infiérese de estas definiciones, que *el ángulo sólido es un cuerpo completamente limitado, de volumen finito; que tiene dos vértices; y que sus aristas son medias rectas.*

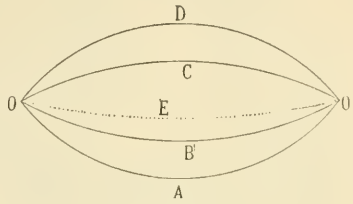


Fig. 283

Un ángulo sólido se denomina *convexo*, cuando queda todo él á un mismo lado del plano en que yace una cualquiera de sus caras. *Ángulos diedros de un ángulo sólido convexo* son los diedros que, dejando en su interior á todo el ángulo sólido, están formados por dos caras consecutivas. Por consiguiente, *los diedros y las caras de un ángulo sólido convexo son menores que 180°.*

Una porción de espacio, limitada por una hoja cónica reentrante, se llama *ángulo cónico*, y puede considerarse como un ángulo sólido con infinito número de caras. Claro está, que el ángulo cónico tiene dos vértices, que son puntos opuestos.

Dos ángulos sólidos ó cónicos, se llaman *opuestos por sus vértices*, cuando las aristas del uno son las prolongaciones opuestas de las aristas del otro. En general, las denominaciones usadas para los ángulos sólidos y cónicos, en la Geometría vulgar, se emplean con idéntico ó análogo sentido en la Geometría elíptica.

307. *En el ángulo sólido ó cónico, los puntos medios de las aristas caen sobre un plano, que es el polar de sus vértices.*

Porque aquellos puntos medios distan de los vértices un cuadrante (200 I).

308. *Dos ángulos sólidos ó cónicos, opuestos por sus vértices, son iguales; y cada vértice del uno tiene por homólogo, en el otro, el vértice opuesto.*

DEMOSTRACIÓN.—(Fig. 284). Sean α y α_1 dos ángulos sólidos ó cónicos, opuestos por sus vértices O y O_1. Los puntos medios A, B, C, D de las aristas, en el ángulo α, forman (290-I) una figura plana igual á la constituida por los puntos medios A_1, B_1, C_1, D_1 de las aristas del ángulo α_1 (284-II-*Cor.*) Colocando los dos ángulos α y α_1 de manera que las figuras planas iguales ABCD y $A_1B_1C_1D_1$ coincidan, también coincidirán cada arista de α con su correspondiente de α_1, porque ambas serán normales al plano ABCD en un mismo punto; luego los dos ángulos sólidos ó cónicos α y α_1 habrán coincidido, y son, por consiguiente iguales. Además al colocar el ángulo α_1 sobre el α, de manera que coincidan sus secciones planas ABCD y $A_1B_1C_1D_1$, el cuadrante O_1A_1 coincide con el OA (no con el O_1A), lo cual prueba que el vértice O de α tiene por homólogo, en α_1, el vértice O_1.

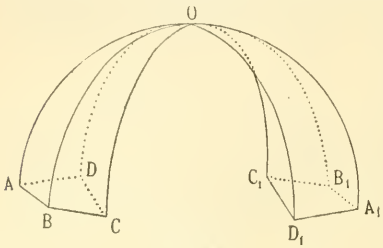


Fig. 284

XI.— Condiciones de igualdad de los triángulos rectángulos. Aplicaciones.

309. *Dos triángulos unirrectángulos son iguales, cuando tienen iguales hipotenusas, é igual otro lado ó un ángulo oblicuo.*

DEMOSTRACIÓN.—1.° (Fig. 285). Si los triángulos unirrectángulos ABC y A′B′C′ tiene iguales sus hipotenusas BC y B′C′, é iguales también los catetos AB y A′B′, coinciden cuando se les coloca de manera que el lado AB y el ángulo recto A del uno coincidan con sus iguales A′B′ y A′ del otro. Efectivamente, si en esta posición los vértices C y C′ no coincidieran, uno de los dos catetos AC y A′C′ (AC por ejemplo) quedaría formando parte del otro, tal como indica la figura; y podríamos razonar del modo siguiente. Como el triángulo ABC no tiene, por hipótesis, más ángulo recto que el A, el punto B no puede ser polo del lado AC (293); luego (294-II) por B pasa una sola normal BA á la recta AB; pero si M es el punto medio de CC′, la recta BM, por ser BC = B′C′ y MC = M′C′, es también normal á AC (285-III), y de esto se deduce, sucesivamente, que las dos rectas AB y BM son una misma, que A y M son puntos opuestos (275), que el segmento AM vale media recta, y más el AC′; pero esto último es imposible, porque un lado de un triángulo ordinario

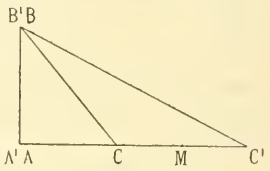


Fig. 285

vale menos de media recta (282-*Obs.*). Es, pues, necesario que el punto C′ se situe en C; luego los dos triángulos pueden coincidir; *y* son, por consiguiente, iguales.

2.° (Fig. 286). Si los triángulos ABC y A′B′C′ unirrectángulos tienen iguales tanto las hipotenusas BC y B′C′ como sus ángulos oblicuos B y B′, háganse coincidir estos dos ángulos, de manera que B se situe en B′, y BC tome la dirección de B′C′; y entonces la hipotenusa BC coincidirá con su igual B′C′, y BA tomará la dirección de B′A′. Como, por hipótesis, el ángulo B no es recto, C no es polo de AB (293), y así, por el punto C no pasa más que una normal á BA (294-II); luego CA y CA′, en su nueva posición, coinciden; y otro tanto sucede, por consiguiente, á los dos triángulos ABC y A′B′C′.

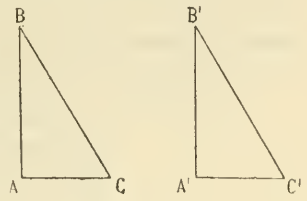


Fig. 286

OBSERVACIÓN.—Dos triángulos unirrectángulos, que tengan respectivamente iguales un ángulo oblicuo y el cateto opuesto, pueden no ser iguales. Tal sucede, por ejemplo (fig. 287) con los dos triángulos ABC y AB_1C, rectángulos en A, si B y B_1 son puntos opuestos.

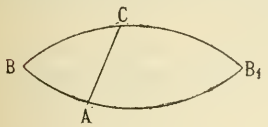


Fig. 287

310. (Fig, 288). Si M no es polo de la recta AB, por el punto M pasa una sola recta MA que corta normalmente á la AB. Si A y A_1 son los dos pies de esta normal, la semirrecta AMA_1 queda dividida por el punto M en dos segmentos desiguales MA *y* MA_1: pues bien, la longitud MA del menor de estos dos segmentos se llama *distancia del punto* M *á la recta* AB. Pero si M es polo de la recta AB, la distancia de M á cualquier punto de esta recta vale un cuadrante, y constituye la *distancia del punto* M *á su polar* AB.

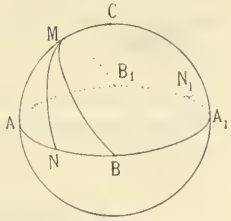


Fig. 288

311. (Fig. 288). *Si* MBN *es un ángulo agudo,* M *un punto de un lado, y* MA *el segmento normal á la recta* BN, *que mide la distancia del punto* M *á dicha recta* BN, *el extremo* A *caerá sobre el lado* BNB_1 *del ángulo agudo* B; *no sobre su prolongación.*

Efectivamente, en el plano del ángulo B, la recta AB limita dos semiplanos, uno de los cuales contiene al ángulo dado B. El centro C de este semiplano es exterior al ángulo B, porque éste es agudo. El punto M no es polo de AB, y así, no coincide con C ni con el punto opuesto al C, y esto permite afirmar (265-*Cor.* 1.°)

que C y M determinan una recta CM. Sabemos, además, que CM es normal á AB, por contener á su polo C. Las dos intersecciones A y A_1 de la recta AB con su normal MC son puntos opuestos, diferentes de B y B_1; y, por consiguiente, uno de ellos, A, cae sobre la semirrecta BNB_1, y el otro, A_1, sobre la prolongación opuesta BN_1B_1. De los dos segmentos suplementarios MA y MA_1, el primero es menor que el segundo, porque MA vale menos que un cuadrante CA; luego MA es la distancia del punto M á la recta BN; y queda demostrado que el extremo A de la distancia MA cae sobre el lado BNB_1 del ángulo agudo B; no sobre su prolongación opuesta BN_1B_1.

312. I. (Fig. 289). Si el vértice A es polo de la base BC, el triángulo ABC tiene infinidad de alturas correspondientes á esta base, todas iguales á un cuadrante; pero, en el caso contrario, sólo tiene dos alturas AP y AP_1, que son suplementarias; y la menor de ellas, OP, mide la distancia del vértice A á la base BC.

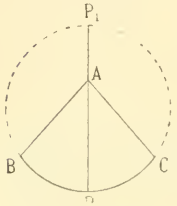


Fig. 289

II. (Fig. 290). *Si el triángulo* ABC *tiene agudos los ángulos en* B *y* C, *la menor* AP *de sus dos alturas relativas á la base* BC, *tiene su extremo* P *sobre esta base; no sobre su prolongación.*

Demostración.—El extremo P cae sobre la semirrecta BCB_1, porque CBA es agudo; y sobre la semirrecta CBC_1, porque es agudo ACB (311); luego P cae en la parte común á estas dos semirrectas, ó sea sobre el lado BC.

313. I. *En un ángulo inferior á uno llano, el lugar de los puntos de su superficie, tales que cada uno equidista de sus dos lados, es su semirrecta bisectriz.*

II. *En el triángulo, las bisectrices de sus tres ángulos, concurren en un mismo punto interior, el cual equidista de los tres lados*

Se demuestran estas dos proposiciones de igual modo que en las Geometrías vulgar é hiperbólica.

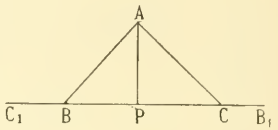


Fig. 290

XII.—Relaciones entre los lados de un polígono.

314. *Un lado cualquiera de un triángulo es menor que la suma de los otros dos, y mayor que su diferencia.*

La demostración que para este principio se dió en la *Introducción* (32), subsiste en la Geometría elíptica; pero en vez de las proposiciones 18-V. y 24, hay que fundarse en sus análogas, que son las 311 y 309.

315. I. *En el polígono, un lado cualquiera (que no exceda á media recta) es menor que la suma de todos los otros.*

II. *Para ir de un punto á su opuesto, existen infinidad de caminos mínimos, que son semirrectas. Para ir de un punto á otro no opuesto, existe un solo camino mínimo, que es el segmento inferior á media recta, terminado por ambos puntos.*

III. *Si en un semiplano, una línea convexa está envuelta por otra, la convexa tiene menor longitud.*

Se demuestran todas estas proposiciones de igual manera que sus correspondientes de la esférica en la Geometría vulgar.

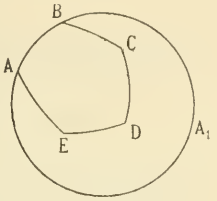


Fig. 291

316. *La suma de los lados de un polígono convexo es menor que una recta.*

Efectivamente (fig 291), un polígono convexo ABCDE y la recta AB están en un mismo semiplano; y, en él, esta recta ABA_1B envuelve al polígono; luego (315-III) el perímetro de éste es menor que la longitud de aquella recta.

XIII.—Relaciones entre los ángulos de un polígono.

317. Llamaremos *exceso* de un n-gono á la diferencia que se obtiene restando de la suma de sus ángulos $2n-4$ rectos. Según esto, el defecto de un triángulo es la suma de sus tres ángulos, menos 2 rectos. Cuando un n-gono es convexo, su exceso es igual á 4 rectos, disminuído en la suma de sus n ángulos externos.

318. *La suma de los tres ángulos de un triángulo excede á dos rectos; y la mitad del exceso equivale á la superficie del triángulo.*

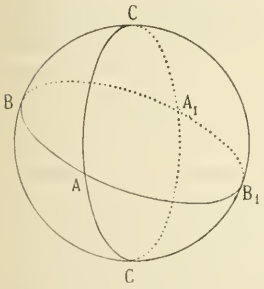


Fig. 292

Demostración.—(Fig. 292). Sean ABC el triángulo, A, B, C sus ángulos y A_1, B_1, C_1 los puntos respectivamente opuestos á los vértices. Como el plano es una superficie esférica, y las rectas del mismo circunferencias máximas, las tres rectas AB, BC, CA dividen el plano ABC en 8 triángulos, que son los ABC, ABC_1, AC_1B_1, AC_1B_1 y sus opuestos; de manera que se tienen las siguientes relaciones entre dichos triángulos y los ángulos A, B, C del triángulo propuesto.

$$A = ABC + AB_1C_1, \quad B = ABC + ACB_1, \quad C = ABC + ABC_1.$$

(La primera igualdad resulta de ser $A = ABC + A_1BC$, y A_1BC igual á su opuesto AB_1C_1). Sumando ordenadamente las tres expresiones de A, B, C, hallamos

$$A + B + C = ABC \times 2 + [ABC + ABC_1 + AB_1C_1 + ACB_1];$$

y, como la suma incluída en el paréntesis vale un semiplano, ó sea dos ángulos rectos, tendremos, designando por R el ángulo recto,

$$A + B + C = ABC \times 2 + 2\,R;$$

y de esta igualdad, se deduce

$$A + B + C > 2\,R, \qquad ABC = \tfrac{1}{2}\,(A + B + C - 2\,R),$$

que son las dos relaciones que deseábamos demosstrar.

Corolarios.—*En el triángulo, la suma de dos ángulos es mayor que el externo adyacente al tercero.*

En el triángulo unirrectángulo, la suma de los dos ángulos oblicuos es mayor que un recto.

Si la superficie de un triángulo tiende hacia cero, la suma de sus tres ángulos tiende hacia dos rectos. Y viceversa.

Si la superficie de un triángulo crece desde cero y tiende hacia su valor máximo, que es un semiplano, la suma de sus ángulos crece desde 2 hasta 6 rectos,

Observación. — Si se miden con un buen teodolito los ángulos de un triángulo, cuyos vértices sean tres estaciones escogidas á voluntad, la suma de los valores obtenidos difiere muy poco de 180°, y la pequeña discrepancia puede ser atribuída á los errores que implica la observación. No prueba esto, de ningún modo, que la Geometría elíptica esté en desacuerdo con el universo real; prueba tan sólo que, en todos los triángulos que hasta hoy se han observado, el exceso angular (si no es nulo) es inapreciable, por su pequeñez, con nuestros actuales instrumentos de medición. De la Geometria elíptica no se puede, pues, afirmar que sea contraria á la realidad.

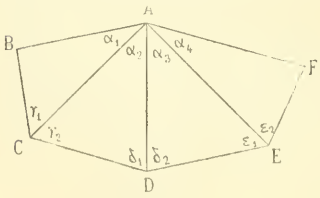


Fig. 293

319. *La suma de los ángulos de un* n*-gono convexo excede á* $2\,n - 4$ *rectos; y la mitad del exceso equivale á la superficie del polígono.*

Demostración.—(Fig. 293). Un polígono convexo ABCDEF, de *n* lados, queda descompuesto, mediante las diagonales que parten de un mismo vértice A,

en $n-2$ triángulos, cuyos ángulos componen los del polígono. Los tres ángulos de cada triángulo suman más de 2 rectos (318); y los de todos los $n-2$ triángulos sumarán, por consiguiente, más de $2\,(n-2)$ rectos, ó sea $2\,n-4$ rectos; luego también la suma de todos los ángulos del n-gono valdrán más de $2\,n-4$ rectos.

Por otra parte, refiriéndonos á la figura 293, entre los ángulos α_1, α_2, α_3, α_4, B, γ_1, γ_2,.... de los referidos triángulos y sus áreas ABC, ACD, ADE, AEF, existen (318) las $n-2$ relaciones siguientes, en las cuales R designa un ángulo recto:

$$\mathrm{ABC} = \tfrac{1}{2}\,(\alpha_1 + \mathrm{B} + \gamma_1 - 2\,\mathrm{R}),$$

$$\mathrm{ACD} = \tfrac{1}{2}\,(\alpha_2 + \gamma_2 + \delta_1 - 2\,\mathrm{R}),$$

$$\mathrm{ADE} = \tfrac{1}{2}\,(\alpha_3 + \delta_2 + \varepsilon_1 - 2\,\mathrm{R}),$$

$$\mathrm{AEF} = \tfrac{1}{2}\,(\alpha_4 + \varepsilon_2 + \mathrm{F} - 2\,\mathrm{R})$$

que, sumadas ordenadamente, dan esta otra:

$$\mathrm{ABC} + \mathrm{ACD} + \mathrm{ADE} + \mathrm{AEF} =$$

$$\tfrac{1}{2}\left[(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + \mathrm{B} + (\gamma_1 + \gamma_2) + (\delta_1 + \delta_2) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \mathrm{F} - (2\,n-4)\,\mathrm{R}\right]$$

en la cual el primer miembro equivale al área del polígono dado ABCDEF; y además, es $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \mathrm{A}$, $\gamma_1 + \gamma_2 = \mathrm{C}$, $\delta_1 + \delta_2 = \mathrm{D}$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \mathrm{E}$. Por consiguiente,

$$\mathrm{ABCDEF} = \tfrac{1}{2}\left[(\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} + \mathrm{D} + \mathrm{E} + \mathrm{F}) - (2\,n-4)\,\mathrm{R})\right],$$

de acuerdo con la segunda parte del enunciado.

Corolarios.—*Si en un cuadrilátero convexo, tres ángulos son rectos, el cuarto ángulo será obtuso; y si dos solamente son rectos, la suma de los otros dos será mayor que uno llano.*

Porque, entre los cuatro ángulos, deben sumar más de 4 rectos.

Dos polígonos convexos, que tengan iguales excesos, son equivalentes; de dos polígonos convexos, el que tenga mayor exceso es el mayor. Y viceversa.

La razón de dos polígonos convexos, es igual á la razón de sus excesos.

Si el área de un n*-gono convexo tiende hacia cero, la suma de sus ángulos tiende hacia* 2n — 4 *rectos. Y viceversa.*

320. (Fig. 294). *Si se prolongan en un mismo sentido los lados de un polígono convexo, la suma* $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon$ *de los ángulos externos, así formados, es menor que* 4 *rectos.*

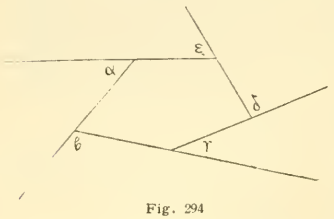


Fig. 294

Demostración. — Sea n el número de vértices. Cada ángulo del polígono y su externo adyacente suman 2 rectos; y, por lo tanto, entre todos los ángulos internos y externos valen $2n$ rectos; pero los internos, solamente, valen reunidos más de $2n-4$ rectos; luego la suma de los externos vale menos que la diferencia $2n-(2n-4)$ rectos; y, como esta diferencia es igual á 4 rectos, será

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon<4 \text{ rectos.}$$

321. *En el triángulo, el suplemento de cada ángulo es mayor que la diferencia de los otros dos ángulos, y menor que la suma de sus suplementos.*

Asi (fig. 295), en el triángulo ABC, cuyos ángulos designaremos respectivamente por A, B, C, se verifican las relaciones

$$180^\circ - A > B - C,$$

$$180^\circ - A < (180^\circ - B) + (180^\circ - C).$$

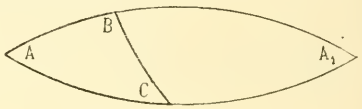


Fig. 295

Efectivamente, si A_1 es el punto opuesto al A, en el triángulo A_1BC, cuyos ángulos valen respectivamente A, $180^\circ - B$ y $180^\circ - C$, tendremos (318)

$$180^\circ < A + (180^\circ - B) + (180^\circ - C),$$

y de esta igualdad se deduce

$$180^\circ - A < (180^\circ - B) + (180^\circ - C),$$

que es una de las dos fórmulas que deseábamos establecer. De igual modo se probaría que

$$180^\circ - C < (180^\circ - A) + (180^\circ - B);$$

y, pasando al primer miembro el último sumando, resulta

$$B - C < 180° - A,$$

que es la otra fórmula que faltaba demostrar.

XIV.—Comparación de dos lados de un triángulo con los dos ángulos opuestos.

322. *En el triángulo, á iguales ángulos se oponen iguales lados; al mayor de dos ángulos se opone mayor lado. Y viceversa.*

La demostración que Legendre da de estas proposiciones, es, según se manifestó (35) admisible en la Geometría elíptica.

323. *En todo triángulo, la suma de dos lados y la suma de los dos ángulos opuestos, son ambas menores, ambas iguales ó ambas mayores que 180°.*

Demostración. —(Fig. 296). Sea el triángulo ABC; designemos sus lados y ángulos respectivamente por a, b, c y A, B, C; y demostremos, por ejemplo, que si es $a+b<180°$, será también $A+B<180°$. De la hipótesis $a+b<180°$, se deduce $a<180°-b$; pero a y $180°-b$ son los lados BC y CA_1 del triángulo adyacente A_1BC (en el que A_1 es el punto opuesto al A), y sabemos que al mayor de estos dos lados se opone mayor ángulo; luego $A_1<A_1BC$, ó $A_1<180°-B$, ó $A<180°-B$, ó en fin, $A+B<180°$, lo que se quería demostrar.

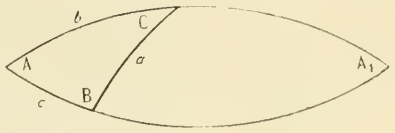


Fig. 296

De igual manera se razonaría en los otros casos.

324. *En todo triángulo rectángulo, un cateto cualquiera y su ángulo opuesto son de la misma especie; es decir, ambos menores, ambos iguales, ó ambos mayores que 90°.*

Demostración. —(Figs. 297, 298 y 299). Sea ABC un triángulo rectángulo

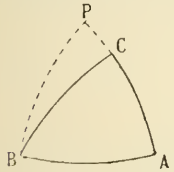


Fig. 297

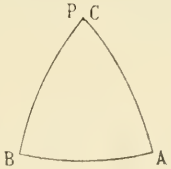


Fig. 298

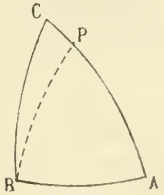


Fig. 299

en A. Sobre el cateto AC, prolongado si es necesario, tómese la longitud AP igual á un cuadrante, con lo cual P será polo del lado AB, y distará de B un cuadrante. El punto P puede caer en la prolongación del lado AC (fig. 297), en el punto C (fig. 298), ó entre A y C (fig. 299).

Si P cae en la prolongación de AC (fig. 297), será evidentemente AC menor que el cuadrante AP, y ABC menor que el ángulo recto ABP; luego, en este caso, el cateto AC y su ángulo opuesto ABC son menores que 90°.

Si P cae en C (fig. 298), se ve que AC y B valen 90° (289-II).

En fin, si P cae entre A y C (fig. 299), se puede afirmar que AC es mayor que el cuadrante AP, y que el ángulo ABC es mayor que el recto ABP; luego, en este último caso, el lado AC y su ángulo opuesto ABC valen más de 90°. Queda, pues, demostrado, que, en todos los casos, un cateto y su ángulo opuesto son de la misma especie.

325. (Fig. 300). *Entre todos los segmentos rectilíneos (inferiores á media recta) que empiezan en un mismo punto* B, *y terminan en una recta dada, ó en un plano dado (que no es polar de aquel punto) el menor es el segmento* BA *normal á dicha recta ó plano, é inferior á un cuadrante; y el mayor es el* BA_1, *adyacente y suplementario del referido segmento.*

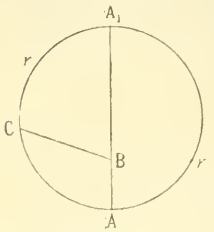


Fig. 300

Sea BC otro segmento rectilíneo, inferior á 180°, que empieza en B y termina en la recta dada ó plano dado r : se debe demostrar que $BA < BC$, y $BA_1 > BC$.

Pues bien, en el triángulo rectángulo BAC, el lado AB, inferior á 90° (por hipótesis) se opone á un ángulo agudo (324), mientras que BC se opone á un ángulo recto; luego (322) $BA < BC$. En el triángulo rectángulo BA_1C, al lado BA_1, mayor que un cuadrante, se opone un ángulo obtuso BCA_1, y el BC se opone á uno recto A_1; luego $BA_1 > BC$.

XV —Algunas propiedades del cuadrilátero.

326. (Fig. 301). *En el cuadrilátero convexo* AA'BB', *que tenga iguales los ángulos en* A *y* A', *se verifican las siguientes relaciones entre sus dos lados* AB, A'B' *y los dos ángulos* B *y* B':

1.ª *Si* $AB = A'B'$, *será* $B' = B$;

2.ª *Si* $AB < A'B'$, *será* $B' < B$;

3.ª *Si* $B' = B$, *será* $AB = A'B'$;

4.ª *Si* $B' < B$, *será* $AB < A'B'$.

DEMOSTRACIÓN.—(Fig. 301). Los dos lados AB y A'B', prolongados, se cortan en dos puntos (273), uno de los cuales, que designaremos por C, está á distinto lado de la recta AA' que el cuadrilátero convexo AA'BB'. En el triángulo CAA', los ángulos en A y A' son iguales, como adyacentes de los ángulos iguales en A y A' del cuadrilátero dado; de lo cual resulta que CA = CA'. Con estos preliminares, podemos razonar del modo siguiente:

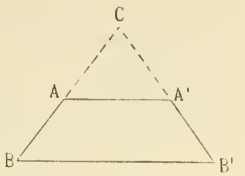


Fig. 301

1.° Si AB = A'B', será CB = CB'; y el triángulo isósceles CBB', tendrá iguales sus ángulos en B y B.

2.° Si AB < A'B', será CB < CB'; y, en el triángulo CBB', el ángulo B' opuesto al lado CB, será menor que el B opuesto al lado CB'.

3.° Si B' = B, en el triángulo CBB' será CB = CB'; y, por tanto, AB = A'B'.

4.° Si B' < B, en el triángulo CBB', tendremos CB < CB'; y, por consiguiente, AB < A'B'.

327. La normal á una recta *a*, dirigida por un punto M, que no sea su polo, corta á *a* en dos puntos opuestos (273): de estos dos puntos, el más próximo al M es el que consideraremos, como *proyección normal del punto* M *sobre la recta* a.

328. (Fig. 302). *Si en el cuadrilátero* ABCD, *convexo y rectángulo en* A *y* B, *y con el ángulo* C *agudo, es* E *el punto medio de* DC, *y* F *la proyección de* E *sobre* AB, *se verificarán las relaciones*

$$FA < FB, \qquad CB - EF < EF - DA.$$

DEMOSTRACIÓN.—1.° (Fig. 302). Las tres rectas AD, BC, FE concurren en los dos polos de AB (293); y por ser convexo el cuadrilátero, uno de estos dos polos, que designaremos por G, está á distinta parte de CD que el lado AB. Á partir de E, tómese sobre la prolongación de GE la longitud EH = EG, y trácese CH. De esta construcción, resultan iguales los triángulos EGD y EHC, é iguales los ángulos homólogos en H y G, señalados con un arco, y los lados homólogos GD y HC. Además, por ser GE menor que un cuadrante GF, el duplo de GE, ó sea GEH, es menor que media recta, de lo cual se infiere que el segmento rectilíneo GEH es lado del triángulo HGC; y que el ángulo en G de este triángulo es el EGC. Por ser agudo, según la hipótesis, el ángulo DCB, es obtuso el ADC (319-*Cor.*); luego DCB < ADC, y de esto se infiere (326) que AD < BC, y que el complemento de AD es

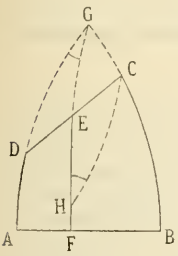


Fig. 302

mayor que el de BC; es decir, que DG > CG, ó CH > CG. Y, puesto que estos dos lados del triángulo HCG son desiguales, también lo serán los ángulos opuestos; y se tendrá HGC > CHG; ó HGC > DGH. Finalmente, como esta relación entre ángulos céntricos de la circunferencia recta AB subsiste para sus arcos FB y FA, será FB > FA, que es la primera desigualdad, que nos proponíamos demostrar.

2.º (Fig. 303). Por ser agudo, según la hipótesis, el ángulo DCB, y rectos los A, B, y F, son obtusos ADE y FEC (319 - *Cor.*); luego, en los cuadriláteros ADEF, FECB, se tiene EF > DA, CB > EF. En las direcciones AD y FE, llévese AG = FE, y FH = BC, con lo cual es FE — AD = DG, EC — FE = EH; y se trata de probar que EH < DG. Tomando á partir de E, en la dirección EF, la distancia EI = EH, resultan iguales los triángulos EHC, EID; é iguales, por consiguiente, los ángulos homólogos en H é I. Por ser iguales EH y EI, bastará probar que EI < DG. Los ángulos en C, H, G y E de los cuadriláteros birrectángulos FHCB, AFEG son obtusos, porque tanto C, y H como E y G son iguales, y suman más de dos rectos (326 y 319 - *Cor.*); luego también es obtuso el ángulo EID (por ser igual al EHC), y agudo su adyacente DIF. Así, en el cuadrilátero birrectángulo AFID, es agudo el ángulo DIF, obtuso, por consiguiente, el cuarto ángulo ADI, y agudo su adyacente IDG. Y, puesto que en el cuadrilátero DIEG, con los ángulos iguales en E y G, es el ángulo IDG < EID, será (326) EI < DG, ó EH < DG, ó CB — EF < EF — DA, que es la segunda relación del enunciado.

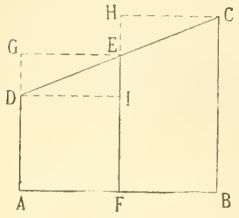


Fig. 303

XVI.—Leyes comunes á las tres geometrías parabólica, hiperbólica y elíptica.

329. En la *Introducción* de este *Tratado*, expusimos algunas leyes geométricas, que son verdaderas, independientemente de la verdad ó falsedad del Axioma XI de Euclides, y dijimos que todas ellas (exceptuando las que van precedidas de uno ó dos asteriscos) eran también verdaderas en la Hipótesis de Riemann. Así es, en efecto: muchas de aquellas leyes quedan ya establecidas en los artículos precedentes de esta *Geometría elíptica;* y mediante ellas, se pueden establecer las restantes, empleando las mismas demostraciones que figuran en los tratados de Geometría vulgar. El lector, versado en el estudio de los Elementos, puede comprobar esto fácilmente, y debe admitir, por lo tanto, que todas

las leyes de la *Introducción*, que no van señaladas con uno ó dos asteriscos, son también verdaderas en la hipótesis riemanna; y forman, por consiguiente, un cuerpo de doctrina indiscutible, común á las tres geometrías.

En cuanto á las proposiciones de la *Introducción*, que van precedidas de dos asteriscos, ya dijimos que no se verifican nunca, ó dejan de cumplirse en infinidad de casos, cuando se admite que la recta es una línea cerrada; pero, en esta hipótesis, los enunciados precedidos de un solo asterisco, son admisibles, si bien con cierta modificación, porque sólo dejan de cumplirse en casos excepcionales. Así, por ejemplo, la propiedad de que la normal dirigida á un plano por un punto dado es única, se cumple también en la Geometría elíptica, con tal que el punto dado no sea polo de aquel plano; el ser la circunferencia una línea curva, es ley que subsiste en aquella geometría, si el radio no vale uno ni dos cuadrantes. En los artículos que preceden, pueden observarse, acerca de esto, numerosos ejemplos; y creemos inútil multiplicarlos; pues, con la doctrina que dejamos expuesta, la simple lectura de los enunciados que, en nuestra *Introducción*, van señalados con una estrellita, indicará la modificación que deben sufrir para ser admisibles en la Geometría elíptica.

CAPÍTULO II

TRIGONOMETRÍA

I. — Teoría de las funciones circulares.

330. (Fig. 304). *Supongamos que en el triángulo* ABC, *rectángulo en* A, *son agudos los ángulos* B *y* C. *que* B′ *es un punto de la hipotenusa (diferente de los extremos) y* A′ *la proyección normal de* B′ *sobre* AC. *Con estos supuestos, se verificarán las relaciones*

$$\frac{AC}{A'C} > \frac{BC}{B'C} > \frac{AB}{A'B'}.$$

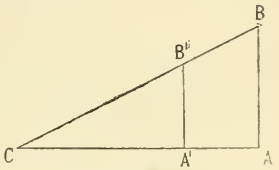


Fig. 304

DEMOSTRACIÓN.— (Fig. 305). Si B′C y BB′ son comensurables, dividámoslos en partes iguales á su medida común; y, por los puntos de división, tracemos las ordenadas sucesivas y_1, y_2, y_3,..... que miden las distancias de estos puntos á la recta AC. Designemos por x_1 la distancia entre C y la ordenada inmediata y_1, por x_2 la distancia entre y_1 é y_2,... Si aquella medida común de B′C y B′B está contenida n veces en CB′, y p veces en B′B tendremos (328)

$$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots\cdots < x_n <$$

$$x_{n+1} < x_{n+2} < x_{n+3} < \cdots\cdots < x_{n+p};$$

y por consiguiente,

$$A'C = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots\cdots + x_n < n\, x_n,$$

$$AA' = x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots\cdots + x_{n+p} > p\, x_n;$$

es decir, que

$$A'C < n\,x_n, \qquad AA' > p\,x_n;$$

luego $\dfrac{AA'}{A'C} > \dfrac{p}{n}$; y como $\dfrac{p}{n} = \dfrac{BB'}{B'C}$, será $\dfrac{AA'}{A'C} > \dfrac{BB'}{B'C}$.

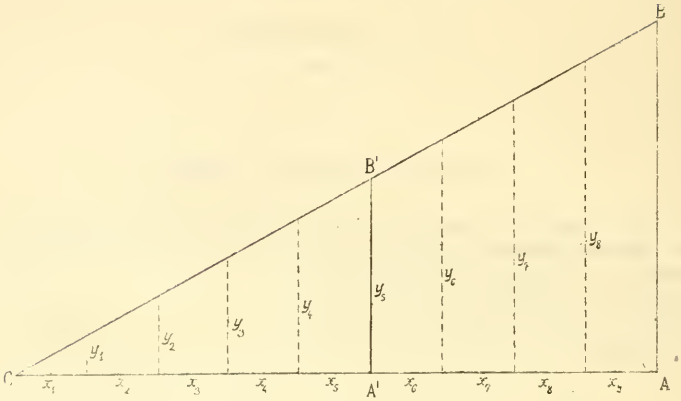


Fig. 305

Análogamente, el mismo teorema 328 nos proporciona las relaciones

$$y_1 > y_2 - y_1 > y_3 - y_2 > \cdots\cdots > A'B' - y_{n-1} >$$

$$y_{n+1} - A'B' > y_{n+2} - y_{n+1} > \cdots\cdots > AB - y_{n+p-1};$$

y expresando que, en la primera línea de desigualdades, la suma de sus n miembros vale más que n veces el menor de todos (que es $A'B' - y_{n-1}$); y que, en la segunda línea, la suma de los p miembros vale menos que p veces la cantidad $A'B' - y_{n-1}$ mayor que cualquiera de los p sumandos, tendremos

$$A'B' > n\,(A'B' - y_{n-1}), \qquad AB - A'B' < p\,(A'B' - y_{n-1});$$

luego $\dfrac{AB - A'B'}{A'B'} < \dfrac{p}{n}$; y de esta desigualdad y la $\dfrac{p}{n} = \dfrac{BB'}{B'C}$, se deduce $\dfrac{BB'}{B'C} > \dfrac{AB - A'B'}{A'B'}$.

En resumen, tenemos demostrada la limitación

$$\frac{AA'}{A'C} > \frac{BB'}{B'C} > \frac{AB - A'B'}{A'B'},$$

para el caso de que BB′ y B′C sean comensurables.

Examinemos, ahora, el caso en que no lo sean.

Designemos (fig. 306) por D el punto medio de BB′, y por α la n-ava parte de B′C. El segmento B′D no será un múltiplo de α, pero se compondrá de un múltiplo B′X de α y de un resto $XD < \alpha$. Sean E é Y las respectivas proyecciones normales de D y X sobre CA. Si el número n es arbitrariamente grande, α será arbitrariamente pequeño; y por tanto,

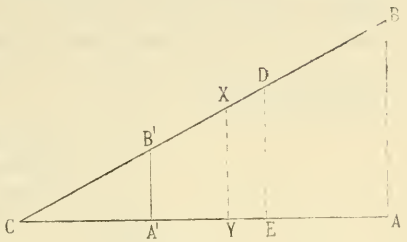


Fig. 306

$$\text{lím. } YA' = EA', \qquad \text{lím. } XB' = DB', \qquad \text{lím. } YX = ED.$$

Mas, por ser XB′ y B′C comensurables, puede aplicarse al par de triángulos YXC y A′B′C, la fórmula establecida para el par ABC y AB′C′; de manera que se cumple la limitación.

$$\frac{YA'}{A'C} > \frac{XB'}{B'C} > \frac{YX - A'B'}{A'B'};$$

y de ella, tomando los límites y duplicando sus miembros, se deduce

$$\frac{2\,EA'}{A'C} = \frac{2\,DB'}{B'C} = \frac{2\,(ED - A'B')}{A'B'};$$

y combinando estas relaciones con las desigualdades

$$AA' > 2\,EA', \qquad 2\,(ED - A'B') > AB - A'B',$$

que se deducen de las $AE > EA'$, $ED - A'B' > AB - ED$ (328), obtenemos nuevamente la limitación

$$\frac{AA'}{A'C} > \frac{BB'}{B'C} > \frac{AB - A'B'}{A'B'},$$

la cual queda establecida para todos los casos.

Finalmente, añadiendo una unidad á cada miembro, se obtiene, tras fácil transformación, la fórmula del enunciado.

331. *Si en un triángulo rectángulo* ABC, *un ángulo agudo* C *permanece constante, cuando la hipotenusa* a *mengüe, desde 90° hasta 0, también mengua la razón* b : a, *pero crece la* c : a; *y ambas tienden hacia límites finitos, comprendidos entre 0 y 1.*

DEMOSTRACIÓN — (Fig. 307). Sean ABC el triángulo, rectángulo en A, B' un punto de la hipotenusa (diferente de sus extremos) y A' la proyección normal de B' sobre AC. Según el teorema anterior, se cumplen las relaciones

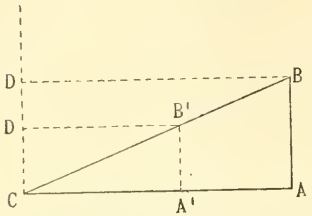


Fig. 307

$$\frac{AC}{A'C} > \frac{BC}{B'C}, \qquad \frac{AB}{A'B'} < \frac{BC}{B'C};$$

y, mediante la permutación de los términos medios, resultan estas otras:

$$\frac{AC}{BC} > \frac{A'C}{B'C}, \qquad \frac{AB}{BC} < \frac{A'B'}{B'C},$$

las cuales expresan que, si la hipotenusa $BC < 90°$ mengua, convirtiéndose en B'C, mengua también la razón AC : BC, y crece la AB : BC.

Falta demostrar que estas dos razones tienden hacia límites inferiores á 1, y diferentes de cero. Sean D y D' las proyecciones normales de B y B' sobre la normal á CA en C. En el cuadrilátero trirrectángulo A'B'D'C, es (326) $A'B' < CD'$, $A'C > B'D'$; y, por consiguiente, según lo demostrado, será

$$\frac{AC}{BC} > \frac{A'C}{B'C} > \frac{B'D'}{B'C} > \frac{BD}{BC}; \qquad \frac{AB}{BC} < \frac{A'B'}{B'C} < \frac{CD'}{B'C} < \frac{CD}{BC};$$

es decir, que

$$\frac{AC}{BC} > \frac{A'C}{B'C} > \frac{BD}{BC}; \qquad \frac{AB}{BC} < \frac{A'B'}{B'C} < \frac{CD}{BC}.$$

Si la longitud BC es constante, y B'C mengua, tendiendo hacia cero, los miembros extremos de estas dos limitaciones son constantes y menores que 1; pero, de los dos miembros intermedios, el primero, ó sea $\frac{A'C}{B'C}$, va siempre menguando; el otro, ó sea $\frac{A'B'}{B'C}$, va siempre creciendo; y como ambos permanecen constantemente comprendidos entre cantidades finitas, menores que 1, tenderán hacia límites finitos, comprendidos entre 0 y 1.

332. *Si en un cuadrilátero plano y trirrectángulo, sus lados tienden hacia cero, la razón de cada dos lados opuestos tiende hacia la unidad.*

Demostración.—(Fig. 308). Sea el cuadrilátero ABCD, rectángulo en A, C y D. Las dos rectas BC y AD se cortan en los polos de CD (293), y uno de ellos, que designaremos por E, se halla al mismo lado de esta recta que el cuadrilátero dado. Los dos triángulos CDE y ABE son rectángulos; y aplicando, á la figura que constituyen, la proposición anterior, tenemos CD : CE < AB : BE; y por tanto, CD : AB < CE : BE. Además, en el cuadrilátero ABCD, el ángulo B es mayor que el D; luego CD > AB y CD : AB > 1. En resumen, tenemos

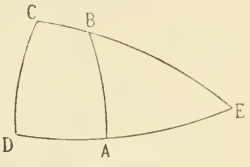


Fig 308

$$1 < CD : AB < CE : BE.$$

Si los lados del cuadrilátero tienden hacia cero, el segmento BE tiende hacia el cuadrante CE; y la razón CE : BE, hacia 1; luego la razón CD : AB, por estar comprendida entre 1 y una cantidad que tiende hacia 1, tiene por límite este mismo número.

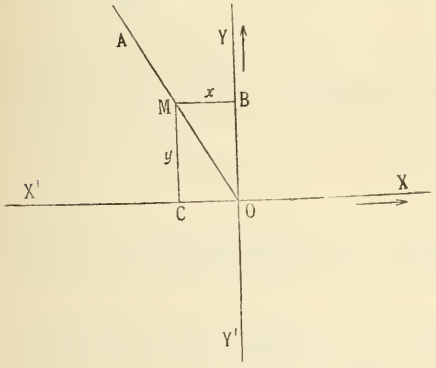


Fig. 309

333. 1. (Fig. 309). Sean XOA un ángulo (positivo ó negativo, menor, igual ó mayor que un giro) que tiene OX por lado inicial, y OA por lado final, M un punto de este lado, y OY la normal al lado OX, situada en el plano del ángulo dado. Tomemos OX y OY por ejes de coordenadas, y convengamos en que el sentido positivo es, para describir los ángulos, el sentido directo (contrario al que siguen las saetas del re-

lej); para el eje de las x, el OX; y para el eje de las y, el que indica el lado final OY del ángulo recto y positivo XOY. Designemos, finalmente, por α el ángulo XOA, por x la abcisa BM del punto M, por y su ordenada CM, y por r la distancia OM, y supongamos que r es una longitud variable que tiende hacia cero. Con estos supuestos, las funciones goniométricas ó circulares *seno* y *coseno* del ángulo α, ó de cualquiera de sus arcos, se definen por las relaciones

$$\operatorname{sen}\alpha = \lim.\frac{y}{r}, \qquad \cos\alpha = \lim.\frac{x}{r}.$$

Para que estas definiciones sean admisibles, probaremos que, si el lado OA no coincide con ninguno de los ejes coordenados, las razones $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$ tienden hacia límites finitos, cuando r tiende hacia cero; y que, si por el contrario, el lado OA coincide con alguno de los dos ejes, aquellas razones son constantes.

1.° Si el lado OA no coincide con ninguno de los dos ejes coordenados, en otros términos, si el ángulo α no es nulo ni múltiplo positivo ni negativo de un recto, en los triángulos rectángulos OMC, OMB, cuyos ángulos en O permanecen invariables, los valores absolutos de las razones $x:r$, $y:r$ tienden hacia límites finitos, comprendidos entre 0 y 1 (331); luego hacia esos mismos límites, afectados respectivamente del signo que les corresponda, tienden aquellas razones.

2.° Si el lado OA coincide con alguno de los ejes, ó de otro modo, si el ángulo α es nulo ó múltiplo de un recto, una de las dos coordenadas del punto M es nula, y la otra vale r ó $-r$, de lo cual resulta que las razones $y:r$ y $x:r$ son constantes, de manera que se tiene

$$\operatorname{sen} 0 = 0, \quad \operatorname{sen} 90^\circ = 1, \quad \operatorname{sen} 180^\circ = 0, \quad \operatorname{sen} 270^\circ = -1,$$

$$\cos 0 = 1, \quad \cos 90^\circ = 0, \quad \cos 180^\circ = -1 \quad \cos 270^\circ = 0.$$

11. *Con los mismos supuestos del párrafo precedente, existen las relaciones*

$$\operatorname{sen}\alpha = \lim.\frac{\mathrm{OB}}{r}, \qquad \cos\alpha = \lim.\frac{\mathrm{OC}}{r}.$$

Efectivamente, por tender hacia cero los lados del cuadrilátero trirrectángulo OCMB, y por las definiciones que hemos dado del seno y del coseno, se tiene (332)

$$\operatorname{sen}\alpha = \lim.\frac{\mathrm{CM}}{r} = \lim.\left(\frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{OB}}\cdot\frac{\mathrm{OB}}{r}\right) = \left(\lim.\frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{OB}}\right)\left(\lim.\frac{\mathrm{OB}}{r}\right) = \lim.\frac{\mathrm{OB}}{r},$$

$$\cos\alpha = \lim.\frac{BM}{r} = \lim.\left(\frac{BM}{OC}\cdot\frac{OC}{r}\right) = \left(\lim.\frac{BM}{OC}\right)\left(\lim.\frac{OC}{r}\right) = \lim.\frac{OC}{r}.$$

334. I. *Si un ángulo α es arbitrariamente pequeño, el seno tiende hacia cero, y el coseno hacia la unidad.*

Demostración.—(Fig 310). Sean XOA el ángulo α arbitrariamente pequeño; M y N dos puntos del lado OA, tales que $OM < ON < 90^0$; BM y DN las respectivas abcisas de M y N; CM y EN sus ordenadas. Si la distancia ON y el ángulo XOA permanecen constantes, cuando la distancia OM tiende hacia cero, será (331 y 333-I y II)

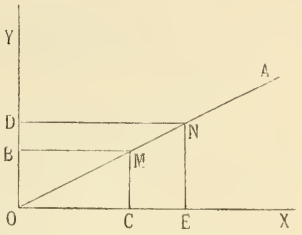


Fig. 310

$$\frac{OD}{ON} > \lim.\frac{OB}{OM} = \operatorname{sen}\alpha = \lim.\frac{CM}{OM} > \frac{EN}{ON},$$

$$\frac{OE}{ON} > \lim.\frac{OC}{OM} = \cos\alpha = \lim.\frac{MB}{OM} > \frac{DN}{ON};$$

es decir, que

$$\frac{OD}{ON} > \operatorname{sen}\alpha > \frac{EN}{ON}, \qquad \frac{OE}{ON} > \cos\alpha > \frac{DN}{ON}.$$

Si ahora suponemos, que el ángulo α tiende á desvanecerse, los dos miembros extremos de la penúltima limitación tiende hacia cero, y los dos de la última hacia la unidad: luego, para los dos miembros intermedios, será $\lim.\operatorname{sen}\alpha = 0$, y $\lim.\cos\alpha = 1$.

II. *La tangente y cotangente de un ángulo ó arco α se definen por las igualdades*

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha},$$

de las cuales se deduce inmediatamente

$$\operatorname{tang}\alpha \cdot \cot\alpha = 1.$$

335. *Si dos ángulos son complementarios, el seno de cada uno es el coseno del otro; y la tangente de cada uno es la cotangente del otro.*

Demostración. — (Fig. 311). Sean OX y OY los dos ejes coordenados, α un ángulo XOA, cuyo lado inicial es la parte positiva 'OX del eje de la x, y su segundo lado OA; OE la bisectriz del ángulo recto y positivo XOY, M un punto del lado OA, M′ su simétrico, respecto de aquella bisectriz, x é y las coordenadas de M, x' é y' las de M′. Como toda la figura tiene un eje de simetría OE, las líneas homólogas son iguales; luego $y' = x$, $x' = y$. Estas igualdades se cumplen, no sólo en valor absoluto, sino en signo; porque, á causa de la misma simetría, los puntos M y M′ están situados los dos en el ángulo recto XOY, ó los dos en el opuesto X'OY′, ó uno en el YOX′, y el otro en Y'OX. Por otra parte, el ángulo α, cualquiera que sea la posición de su lado final OA, tiene por complemento cierto ángulo de lado inicial OA y de lado final OY, porque la suma ó resultante XOY de los dos ángulos complementarios XOA y AOY, descritos en el sentido que les corresponda, debe ser un cuadrante. Mas, siendo OE un eje de simetría, dicho complemento AOY es igual en magnitud y signo á uno de los ángulos XOM′ de lado inicial OX y lado final OM′. En resumen: 1.° Los ángulos α y $90° - \alpha$, cuyo lado inicial es OX, tienen por respectivos lados finales OM y OM′; y 2.° Las coordenadas x é y de M, y las x' é y' de M′, satisfacen á las igualdades $y' = x$, $x' = y$. Por consiguiente, si OM tiende hacia cero, tendremos:

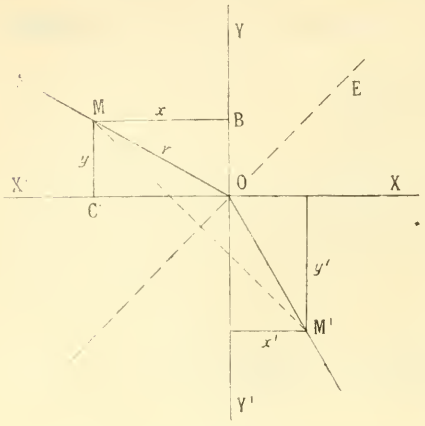


Fig. 311

$$\operatorname{sen}(90° - \alpha) = \lim. \frac{y'}{OM} = \lim. \frac{x}{OM} = \cos \alpha,$$

$$\cos(90° - \alpha) = \lim. \frac{x'}{OM} = \lim. \frac{y}{OM} = \operatorname{sen} \alpha;$$

luego

$$\operatorname{sen}(90° - \alpha) = \cos \alpha, \qquad \cos(90° - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha.$$

Ahora, fundándonos en estas igualdades y en las definiciones de la tangente y de la cotangente, haremos las siguientes deducciones:

$$\text{tang}\,(90^\circ - \alpha) = \frac{\text{sen}\,(90^\circ - \alpha)}{\cos\,(90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = \cot\alpha,$$

$$\cot\,(90^\circ - \alpha) = \frac{\cos\,(90^\circ - \alpha)}{\text{sen}\,(90^\circ - \alpha)} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \text{tang}\,\alpha;$$

luego

$$\text{tang}\,(90^\circ - \alpha) = \cot\alpha, \qquad \cot\,(90^\circ - \alpha) = \text{tang}\,\alpha.$$

336. I. *Si á un ángulo α se le añade un múltiplo positivo ó negativo de 360°, sus funciones circulares no varían.*

Porque, si k es un número entero, positivo ó negativo, los ángulos α y $\alpha + k$. 360°, supuestos con el mismo lado inicial, tendrán el mismo lado final; y de esto se infiere que su seno y coseno (y por lo tanto su tangente y contangente) estarán definidas por las mismas igualdades.

II. 1.° *Si á un ángulo se le cambia el signo, el coseno permanece invariable; y el seno, tangente y cotangente conservan también su valor absoluto, pero cambian de signo.*

2.° *Si el ángulo se aumenta ó disminuye en 180°, la tangente y cotangente no varían; pero el seno y coseno cambian de signo, y conservan también su valor absoluto.*

3.° *Si un ángulo se cambia por su suplemento, no se altera el seno; pero el coseno, tangente y cotangente cambian de signo, y conservan también su valor absoluto.*

Demostración. — (Fig. 312). Designemos por α un ángulo cualquiera positivo ó negativo, menor, igual ó mayor que un giro. Sean OX su lado inicial, OA su lado final, M un punto de OA, N y P los puntos respectivamente simétricos de M con relación á los ejes OX y OY, Q el punto simétrico de M, respecto del centro O, y r la distancia OM. Si las coordenadas de M las designamos por x é y, las de N serán x y $-y$; las de P, $-x$ é y; y las de Q, $-x$ y $-y$. Además,

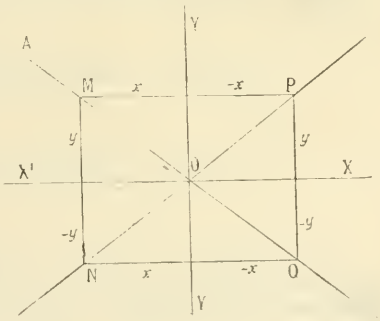


Fig. 312

las cuatro distancias OM, ON, OP, OQ serán iguales á r. Con estas premisas, razonaremos del modo siguiente:

1.° Por la simetría de la figura, el ángulo $-\alpha$ es igual á cierto ángulo XON, que tenga OX por lado inicial y ON por lado final; luego

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = \lim.\frac{-y}{r} = -\lim.\frac{y}{r} = -\operatorname{sen}\alpha,$$

$$\cos(-\alpha) = \lim.\frac{x}{r} = \cos\alpha,$$

$$\operatorname{tang}(-\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tang}\alpha,$$

$$\cot(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\operatorname{sen}(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\operatorname{sen}\alpha} = -\cot\alpha.$$

2.° Si al ángulo α (cuyo lado final es OA) agregamos ó sustraemos 180°, el nuevo ángulo $\alpha \pm 180°$ tendrá OQ por lado final. Por consiguiente,

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm 180°) = \lim.\frac{-y}{r} = -\lim.\frac{y}{r} = -\operatorname{sen}\alpha,$$

$$\cos(\alpha \pm 180°) = \lim.\frac{-x}{r} = -\lim.\frac{x}{r} = -\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tang}(\alpha \pm 180°) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha \pm 180°)}{\cos(\alpha \pm 180°)} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha} = \operatorname{tang}\alpha,$$

$$\cot(\alpha \pm 180°) = \frac{\cos(\alpha \pm 180°)}{\operatorname{sen}(\alpha \pm 180°)} = \frac{-\cos\alpha}{-\operatorname{sen}\alpha} = \cot\alpha.$$

3.° La resultante de dos ángulos suplementarios es 180°; y así el, ángulo α (cualquiera que sea la posición de su lado final OA) tiene por suplemento cierto ángulo MOX′ de lado inicial OA y lado final OX′ opuesto al OX. Mas, por la simetría de la figura con relación á OY, dicho suplemento, ó sea $180° - \alpha$, es

igual, en magnitud y signo, á cierto ángulo XOP, de lado inicial OX y lado final OP. Por lo tanto,

$$\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = \lim. \frac{y}{r} = \operatorname{sen}\alpha,$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \lim. \frac{-x}{r} = -\lim. \frac{x}{r} = -\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tang}(180^\circ - \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha} = -\operatorname{tang}\alpha,$$

$$\cot(180^\circ - \alpha) = \frac{\cos(180^\circ - \alpha)}{\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = -\cot\alpha.$$

Observación.—Mediante estas leyes, la determinación de las funciones circulares de un ángulo dado, queda siempre reducida al caso en que este ángulo es, además de positivo, agudo ó recto. Por otra parte, la tangente y la contangente de un ángulo se expresan mediante su seno y su coseno; luego, en definitiva, todas las funciones circulares de un ángulo dado pueden expresarse mediante el seno y el coseno de un ángulo positivo recto ó agudo.

337. 1. (Fig. 313). *Supongamos que en el ángulo* XOA *se consideran como positivos los segmentos de recta que llevan la misma dirección* OX, OA *que sus lados, y como negativos los de dirección contraria; que* M *es un punto de la recta* OA, *y* N *su proyección normal sobre* OX; *y que la longitud* OM *tiende hacia cero. Con estos supuestos, podemos afirmar que la razón* ON : OM *del segmento proyección* ON *al proyectado* OM, *tiene por límite, en magnitud y signo, el coseno del ángulo* XOA.

Demostración.—El punto M puede estar en el lado OA ó en su prolongación; en otros términos, el segmento OM puede ser positivo ó negativo. De aquí los dos casos siguientes:

1.° Supongamos (fig. 313) que M está sobre el lado OA. Tómese la recta OX por eje de las x, su dirección OX como la positiva, y la normal OY á OX por eje de las y. La abcisa PM del punto M tiene igual signo que la proyección

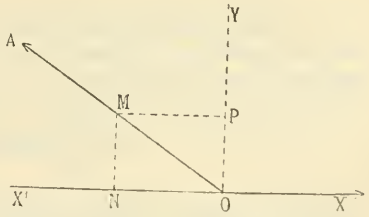


Fig. 313

ON; y por esto, por la definición del coseno, y por ser (332) lím. PM : ON = 1, cuando (como se supone) la longitud OM tiende hacia cero, tendremos

$$\cos XOA = \text{lím.}\frac{PM}{OM} = \text{lím.}\left(\frac{PM}{ON}\cdot\frac{ON}{OM}\right) =$$

$$\left(\text{lím.}\frac{PM}{ON}\right)\left(\text{lím.}\frac{ON}{OM}\right) = \text{lím.}\frac{ON}{OM};$$

luego

$$\cos XOA = \text{lím.}\frac{ON}{OM},$$

de acuerdo con el enunciado.

2.° (Fig. 314). Si M está en la prolongación OB del lado OA, en cuyo caso el segmento OM es negativo, tómese sobre OA, en la dirección OA, la longitud OM′ igual en valor absoluto á OM, y márquese la proyección normal N′ de M′ sobre OX. De esta construcción, resulta que, atendiendo á los signos, es NM = — N′M′, ON = — ON′; luego (según el primer caso)

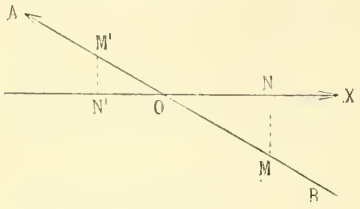


Fig. 314

$$\cos XOA = \text{lím.}\frac{ON'}{OM'} = \text{lím.}\frac{-ON}{-OM} = \text{lím.}\frac{ON}{OM};$$

y así, obtenemos nuevamente $\cos XOA = \text{lím.}\dfrac{ON}{OM}$.

II. *Con los mismos supuestos anteriores, si el ángulo* XOA (fig. 315) *es variable, y tiende hacia un límite* XOA′ *al mismo tiempo que la distancia* OM *tiende hacia cero, existe la relación*

$$\text{lím.}\frac{ON}{OM} = \cos(\text{lím. XOA}).$$

Demostración. — Llevemos, á partir de O, sobre los lados OA y OA′, las longitudes iguales OB y OB′. Sean CB, C′B′ las respectivas abcisas de los pun-

tos B, B′, y DB, D′B′ sus ordenadas. Sabemos (326) que, en el cuadrilátero trirrectángulo ONMP, es PM < ON; y por esto, y por el párrafo 331, sabemos que, en valor absoluto, es

$$\frac{CB}{OB} < \frac{PM}{OM} < \frac{ON}{OM} < \frac{OD}{OB};$$

y que, por consiguiente, también en valor absoluto, será

$$\frac{CB}{OB} < \frac{ON}{OM} < \frac{OD}{OB};$$

pero, si se atiende á los signos de los segmentos, como todas estas razones son de igual signo, se cumplirá la limitación anterior ó esta otra:

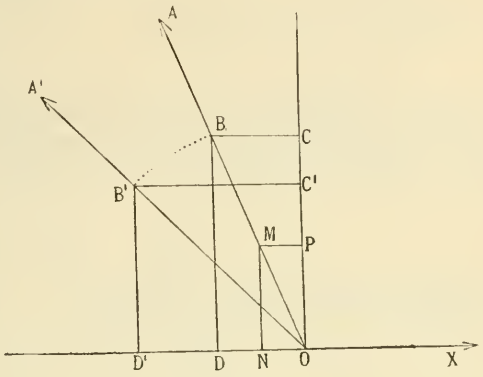


Fig. 315

$$\frac{CB}{OB} > \frac{ON}{OM} > \frac{OD}{OB}.$$

Si al mismo tiempo que el ángulo variable XOA tiende hacia su límite XOA′, la distancia OM tiende hacia cero, el punto B tiende á ocupar la posición B′, por cuyo motivo, tomando los límites en las dos series de desigualdades anteriores, podremos afirmar que se cumple una de estas dos relaciones:

$$\frac{C'B'}{OB'} \leqq \text{lím.} \frac{ON}{OM} \leqq \frac{OD'}{OB'}, \qquad \frac{C'B'}{OB'} \geqq \text{lím.} \frac{ON}{OM} \geqq \frac{OD'}{OB'}.$$

Si ahora suponemos que la distancia OB′ es arbitrariamente pequeña, los miembros extremos de estas limitaciones tienden hacia un mismo límite, que es cos XOA′ (333 y 337-I); luego ese mismo límite es el valor del miembro intermedio, es decir, que

$$\text{lím.} \frac{ON}{OM} = \cos XOA', \quad \text{ó} \quad \text{lím.} \frac{ON}{OM} = \cos(\text{lím. } XOA).$$

338. (Fig. 316 y 317). *Supongamos que en el ángulo* XOA *(constante ó variable) se consideran como positivos los segmentos de recta que llevan la misma dirección que sus lados, y como negativos los de dirección contraria;*

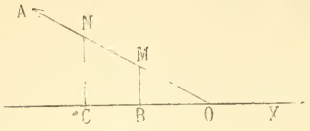


Fig. 316

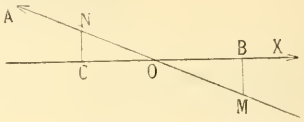


Fig. 317

que MN *es un segmento (positivo ó negativo) de la recta* OA, *y* BC *su proyección normal sobre* OX; *y que las distancias* OM *y* ON *tienden hacia cero: entonces se cumplirá, en magnitud y signo, la relación*

$$\text{lím.}\,\frac{BC}{MN} = \cos XOA,$$

si el ángulo XOA *es constante, ó la relación*

$$\text{lím.}\,\frac{BC}{MN} = \cos\,(\text{lím. } XOA),$$

si este ángulo es variable y tiende hacia un límite.

Demostración — Tomando en cuenta los signos de los segmentos, es, en todos los casos, $OC - OB = BC$, $ON - OM = MN$. Por ser OM y ON arbitrariamente pequeños, las dos razones $\frac{OC}{ON}$ y $\frac{OB}{OM}$ tienden (en magnitud y signo) hacia un mismo límite, que es (337) el coseno del ángulo XOA, ó de su límite, si este ángulo es variable; luego hacia este mismo valor del coseno tenderá la razón $\frac{OC - OB}{ON - OM}$, ó sea $\frac{BC}{MN}$.

339. *Entre las funciones circulares de* α, 6 *y* $\alpha \pm 6$, *se verifican las relaciones*

$$\cos(\alpha + 6) = \cos\alpha\cos 6 - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen} 6,$$

$$\cos(\alpha - 6) = \cos\alpha\cos 6 + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen} 6,$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + 6) = \operatorname{sen}\alpha\cos 6 + \cos\alpha\operatorname{sen} 6,$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - 6) = \operatorname{sen}\alpha\cos 6 - \cos\alpha\operatorname{sen} 6.$$

DEMOSTRACIÓN.—En primer término, es fácil comprobar que esta ley se cumple, si alguno de los dos ángulos α y θ, ó los dos, son nulos ó múltiplos positivos ó negativos de un recto, y así, bastará que sólo consideremos el caso de que α y θ sean oblicuos. Supongamos todos los ángulos positivos descritos en sentido directo, y sean (fig. 318) XOA y AOB los ángulos α y θ, los cuales pueden ser positivos ó negativos, y su valor absoluto menor ó mayor que un giro. Las notaciones XOA y AOB, sólo expresan que OX y OA son respectivamente los lados iniciales de estos dos ángulos, y que OA y OB son los respectivos lados finales. En todos los casos, la suma $\alpha + \theta$ será cierto ángulo XOB de lado inicial OA y lado final OB. Si AOC es un ángulo recto y positivo, será $90° + \alpha$ igual á cierto ángulo XOC. Sean M un punto del lado OB, N la proyección normal de M sobre OA, y P y Q las de M y N sobre OX. Ninguna de las dos intersecciones de las rectas OX y MN es polo de OA (porque suponemos que OX y OA no son normales), y así, una de ambas intersecciones, que la designaremos por R, estará más próxima que la otra del punto N. Sobre las rectas OX, OA, OB, consideraremos como positivas las direcciones que indican estas notaciones (las que señalan las flechas). En cuanto á NM lo consideraremos como positivo, si OM y OC están á un mismo lado de OA (figs. 318 y 319), y como negativo en el caso contrario (figura 320); en otros términos, asignaremos al segmento NM el mismo signo que corresponde á la ordenada NM en el sistema cuyos ejes coordenados de las x y de las y tuvieran respectivamente por direcciones positivas OA y OC. Y resulta

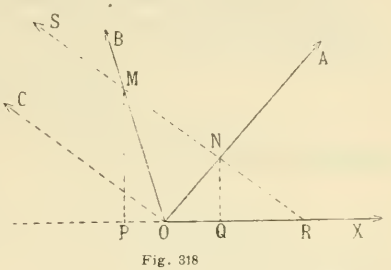


Fig. 318

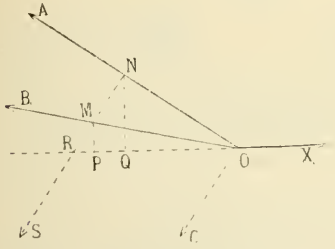


Fig. 319

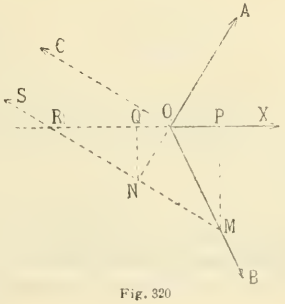


Fig. 320

de este convenio, que, en magnitud y signo, es (en todos los casos) lím. $\frac{NM}{OM} =$ sen δ. El ángulo indeterminado, de vértice R, cuyo lado inicial RX tiene la dirección OX, y cuyo lado final RS tiene la dirección positiva que corresponde á NM, lo designaremos por XRS; y con todos estos supuestos, razonaremos del modo siguiente:

Cualquiera que sea la situación mutua de los tres puntos O, P, Q, si se atiende á los signos de los segmentos, se tiene $OP = OQ + QP$; y, por consiguiente,

$$\frac{OP}{OM} = \frac{OQ}{OM} + \frac{QP}{OM},$$

igualdad que, mediante las identidades

$$\frac{OQ}{OM} = \frac{OQ}{ON} \cdot \frac{ON}{OM}, \qquad \frac{QP}{OM} = \frac{QP}{NM} \cdot \frac{NM}{OM},$$

se transforma sucesivamente en

$$\frac{OP}{OM} = \frac{OQ}{ON} \cdot \frac{ON}{OM} + \frac{QP}{NM} \cdot \frac{NM}{OM},$$

$$\text{lím.} \frac{OP}{OM} = \left(\text{lím.} \frac{OQ}{ON}\right)\left(\text{lím.} \frac{ON}{OM}\right) + \left(\text{lím.} \frac{QP}{NM}\right)\left(\text{lím.} \frac{NM}{OM}\right);$$

pero, si OM, es arbitrariamente pequeño, también lo son todos los segmentos que figuran en la anterior igualdad, y tendremos:

$$\text{lím. XRS} = \text{XOC}, \qquad \text{lím.} \frac{OP}{OM} = \cos(\alpha + \delta),$$

$$\text{lim.} \frac{OQ}{ON} = \cos\alpha, \qquad \text{lím.} \frac{ON}{OM} = \cos\delta, \qquad \text{lím.} \frac{NM}{OM} = \text{sen}\,\delta,$$

$$\text{lím.} \frac{QP}{NM} = \cos(\text{lím. XRS}) = \cos \text{XOC} = \cos(90^\circ + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha;$$

luego

$$\cos(\alpha + \delta) = \cos\alpha \cos\delta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\delta.$$

Cambiando, en esta fórmula, δ por $-\delta$, se halla el desarrollo de $\cos(\alpha - \delta)$; y finalmente, sustituyendo en las dos expresiones de $\cos(\alpha + \delta)$ y $\cos(\alpha - \delta)$, ya

demostradas, α por $90° - \alpha$, resultan los desarrollos de $\operatorname{sen}(\alpha + 6)$ y de $\operatorname{sen}(\alpha - 6)$.

340. *Si el ángulo* x *tiende hacia un límite* α, *será*

$$\text{lím.}\,(\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen}\alpha, \qquad \text{lím.}\,(\cos x) = \cos\alpha.$$

Efectivamente, el ángulo variable x y su límite α se diferencian en un ángulo evanescente ε, y se tiene

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(\alpha + \varepsilon) = \operatorname{sen}\alpha\cos\varepsilon + \cos\alpha\operatorname{sen}\varepsilon,$$

$$\cos x = \cos(\alpha + \varepsilon) = \cos\alpha\cos\varepsilon - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varepsilon.$$

Cuando x tiende hacia su límite α, ε y $\operatorname{sen}\varepsilon$ tienden hacia cero, y $\cos\varepsilon$ hacia 1 (334-I). Tomando, pues, los límites en las dos igualdades últimas, resultarán las del enunciado.

341. *Conociendo el coseno de un ángulo* α, *hallar el seno y el coseno de su mitad.*

Reemplazando α y 6 por $\frac{1}{2}\alpha$ en las fórmulas 1.ª y 2.ª del párrafo 339, se halla el sistema de ecuaciones

$$\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha + \operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}\alpha = 1, \qquad \cos^2\tfrac{1}{2}\alpha - \operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}\alpha = \cos\alpha,$$

del cual se deducen, para las incognitas $\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha$ y $\cos\frac{1}{2}\alpha$, los valores

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \qquad \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

que resuelven el problema.

342. *Las funciones goniométricas de un ángulo dado tienen los mismo valores en la Geometría vulgar que en la elíptica.*

Demostración — Como las fórmulas que sirven para expresar el seno, tangente y cotangente de un ángulo, mediante su coseno, son las mismas en ambas geometrías, bastará probar nuestra proposición para el coseno; ó mejor aún, para el coseno de un ángulo positivo, recto ó agudo, pues en último término á uno de estos dos casos se puede reducir siempre la determinación del coseno de un ángulo dado, positivo ó negativo. Esto advertido, distinguiremos en la demostración tres casos: 1.° Que el ángulo dado sea la 2^n-*ava* parte de un recto; 2.° Que sea múltiplo de dicha parte alícuota; y 3.° Que no lo sea.

1.° La reiterada aplicación de la fórmula 2.ª del párrafo 341 al ángulo recto, á su mitad, cuarto, octavo, &., da (partiendo de la igualdad $\cos 90^\circ = 0$),

$$\cos\frac{90^\circ}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \cos\frac{90^\circ}{4} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, \quad \cos\frac{90^\circ}{8} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots,$$

y estas igualdades prueban que los cosenos (y por lo tanto los senos) de los ángulos $\frac{90^\circ}{2}, \frac{90^\circ}{4}, \frac{90^\circ}{8}, \ldots \frac{90^\circ}{2^n}$), son los mismos en la Geometría euclídea que en la riemanna, puesto que en ambas se expresan por los mismos números.

2.° Designemos por ε el ángulo $\frac{90^\circ}{2^n}$. Si el ángulo dado α es un múltiplo de ε, las relaciones

$$\operatorname{sen} 2\varepsilon = 2 \operatorname{sen}\varepsilon \cos\varepsilon,$$

$$\cos 2\varepsilon = \cos^2\varepsilon - \operatorname{sen}^2\varepsilon,$$

$$\operatorname{sen} 3\varepsilon = \operatorname{sen} 2\varepsilon \cos\varepsilon + \cos 2\varepsilon \operatorname{sen}\varepsilon,$$

$$\cos 3\varepsilon = \cos 2\varepsilon \cos\varepsilon - \operatorname{sen} 2\varepsilon \operatorname{sen}\varepsilon,$$

$$\operatorname{sen} 4\varepsilon = \operatorname{sen} 3\varepsilon \cos\varepsilon + \cos 3\varepsilon \operatorname{sen}\varepsilon,$$

$$\cos 4\varepsilon = \cos 3\varepsilon \cos\varepsilon - \operatorname{sen} 3\varepsilon \operatorname{sen}\varepsilon,$$

. . . . . .

. . . . . .

permitirán expresar los senos y cosenos de los ángulos 2ε, 3ε, 4ε,..., mediante sen ε y cos ε; pero estos dos valores numéricos, como asimismo las fórmulas que se obtengan, son los mismos en las dos geometrías euclídea y riemanna; luego, en ambas geometrías, el coseno de un ángulo dado α, que sea múltiplo de ε, vale lo mismo.

3.° Si α no es múltiplo de ε, se compondrá de un ángulo α', múltiplo de ε, y de otro ángulo menor que ε; y cuando n sea arbitrariamente grande, ε tenderá hacia cero, y α' hacia α. Pero, al variar n, el coseno euclídeo y el riemanno de α' son constantemente iguales (2.° caso); luego también lo serán sus límites, ó sean los cosenos euclídeo y riemanno de α.

343. *Toda la teoría de las funciones circulares, establecida en la Geometría vulgar, subsiste en la Geometría elíptica.*

Porque (342) las funciones circulares de un ángulo dado tienen los mismos valores en ambas geometrías.

Observación.—En todas las fórmulas relativas á la medida de ángulos, debe sobreentenderse que la unidad angular (de igual modo que en la Geometría euclídea) es el ángulo que, multiplicado por π, da por producto un ángulo llano. Según esto, la razón del giro con la unidad angular vale 2π; la del angulo llano, π; y la del ángulo recto, $\frac{1}{2}\pi$.

De otro modo, la unidad angular es el ángulo céntrico del arco circular que en la hipótesis euclideana, sería equivalente á su radio.

344. *En el triángulo rectángulo* ABC, *cuyos lados* a, b, c *son arbitrariamente pequeños, y cuyos ángulos oblicuos* B *y* C *tienden respectivamente hacia los límites* 6 *y* γ, *se cumplen las leyes siguientes:*

$$\text{lím.}\frac{b}{a} = \text{sen } 6 = \cos \gamma, \qquad \text{lím.}\frac{c}{a} = \text{sen } \gamma = \cos 6,$$

$$\text{lím.}\frac{b}{c} = \text{tang } 6 = \cot \gamma, \qquad \text{lím.}\frac{c}{b} = \text{tang } \gamma = \cot 6.$$

Demostración.—(Fig. 321). El cateto b es la proyección normal de la hipotenusa sobre AC, y el otro cateto c es también la proyección normal de a sobre AB. Además, los ángulos 6 y γ son complementarios (318·*Cor.* 3.°). Por consiguiente (337-II), si los lados del triángulo tienden hacia cero, será

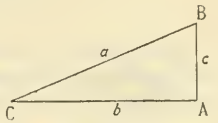


Fig 321

$$\text{lím.}\frac{b}{a} = \cos \gamma = \text{sen } 6, \qquad \text{lím.}\frac{c}{a} = \cos 6 = \text{sen } \gamma,$$

que son las dos primeras fórmulas del enunciado. Y dividiéndolas ordenadamente, resultan enseguida las dos últimas.

345. *Si la longitud del diámetro tiende hacia cero, la razón de la circunferencia á su diámetro tiende hacia un límite, que es el número designado por* π *en la Geometría vulgar.*

Demostración.—(Fig. 322). Con centro O, y radio menor que un cuadrante, describamos una circunferencia, y sean AB su n-ava parte, C el punto medio del arco AB, EF la porción de tangente en C, limitada por los lados OA y OB del ángulo AOB, y D la intersección del radio OC con la cuerda AB. Con estos supuestos, DB y CE son respectivamente los semilados de los n-gonos regulares con-

vexos, inscrito y circunscrito en el círculo dado; de manera que los perímetros de estos polígonos serán respectivamente $DB \times 2n$ y $CE \times 2n$; y como la longitud c de la circunferencia es mayor que el perímetro del polígono inscrito, y menor que el del circunscrito, tendremos

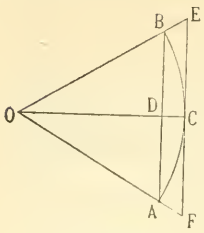


Fig. 322

$$DB \times 2n < c < CE \times 2n,$$

limitación que, dividida por el duplo del radio $r = OB = OC$, se convierte en

$$\frac{DB}{OB} n < \frac{c}{2r} < \frac{CE}{OC} n.$$

Tomando los límites de los tres miembros, en el supuesto de que el radio tiende hacia cero, y teniendo presente que

$$\text{lím.} \frac{DB}{OB} = \text{sen} \frac{180^\circ}{n}, \qquad \text{lím.} \frac{CE}{OC} = \text{tang.} \frac{180^\circ}{n},$$

resulta

$$n \text{ sen} \frac{180^\circ}{n} \leqq \text{lím.} \frac{c}{2r} \leqq n \text{ tang.} \frac{180^\circ}{n}.$$

Ahora bien, en la Geometría vulgar, y por lo tanto en la Geometría elíptica (343), si n es arbitrariamente grande, los miembros extremos de esta limitación tienden hacia un mismo límite, que es el número designado por π en la Geometría vulgar (*); luego hacia ese mismo límite tiende el miembro intermedio $\frac{c}{2r}$.

II—Relaciones trigonométricas en los triángulos esféricos y rectilíneos.

346. *Las relaciones trigonométricas entre los elementos del triángulo esférico, que se establecen en la Geometría vulgar, subsisten en la Geometría elíptica; y son, además, aplicables á los triángulos rectilíneos.*

(*) Tienden hacia π, cuando n es arbitrariamente grande, porque (como es fácil ver) el primer miembro representa la razón del perímetro de un n-gono regular convexo al duplo de su radio; y el último miembro, la razón del mismo perímetro al duplo de su apotema.

DEMOSTRACIÓN.—Bastará probar que, para todo triángulo rectilíneo ó esférico ABC, rectángulo en A, se cumple la relación sen B = sen b: sen a, porque de ella se deducen todas las otras relaciones de la Trigonometría esférica, de la manera que se hizo en la Geometría hiperbólica (199 y 200).

Pues bien (fig. 323), sean OABC el triedro correspondiente al triángulo esférico ó rectilíneo ABC, rectángulo en A, M un punto del radio OC, A′ la proyección normal de M sobre OA, y B′ la de A′ sobre OB. Como el diedro OA es recto, la normal MA′ á su arista, trazada en la cara AOC, es normal á la otra cara. Además, de esta construcción, resulta MB′ normal á OB. En resumen, en el triángulo MA′B′ es recto el ángulo MA′B′; y el ángulo B′ es una sección recta del diedro OB (ó de su suplemento), y por consiguiente, dicho ángulo B′ y el B tienen el mismo seno. Esto advertido, si el lado OM es arbitrariamente pequeño, también lo serán las distancias OA′, OB′ y los tres lados del triángulo A′B′M; y tendremos:

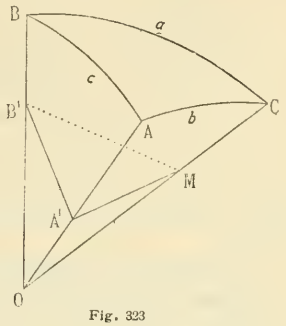


Fig. 323

$$\text{sen B} = \text{sen B}' = \text{lím.}\frac{\text{A'M}}{\text{B'M}} = \text{lím.}\frac{\text{A'M : OM}}{\text{B'M : OM}} =$$

$$\frac{\text{lím. (A'M : OM)}}{\text{lím. (B'M : OM}} = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } a};$$

luego

$$\text{sen B} = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } a}.$$

La proposición queda demostrada.

III. —Metro natural. Longitud de un arco de círculo.

347. *En todas las fórmulas que vamos á exponer, relativas á longitudes, debe sobreentenderse que se toma por unidad angular el ángulo que multiplicado por* π *da por producto un ángulo llano* (343 *Obs.*), *y por unidad de longi-*

tud el segmento de recta cuyo ángulo céntrico es la unidad angular. A este segmento le llamaremos *metro natural*.

348. *La longitud de un segmento rectilíneo tiene por medida el valor numérico de su ángulo céntrico.*

Efectivamente (fig. 324), si AB es un segmento rectilíneo, DE la unidad de longitud, C un polo de la recta AB, y F un polo de la recta DE, será DFE la unidad angular. Los segmentos rectilíneos (por ser arcos circulares de igual radio) son proporcionales á sus ángulos céntricos: tendremos, pues, AB : DE = ACB : DFE; y esta igualdad es la que se quería demostrar, pues expresa que la razón del segmento AB á la unidad lineal DE vale lo mismo que la razón entre el ángulo céntrico de AB y la unidad angular DFE.

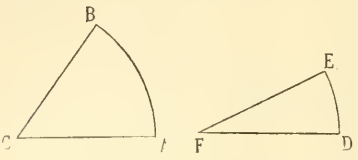


Fig. 324

Corolario.—*La longitud de la recta tiene por medida el número* 2π.

Porque la medida de su ángulo céntrico, que es un giro, vale 2π (343-*Obs.*).

349. *La longitud* l *de un arco de círculo es igual al producto de su ángulo céntrico* α *por el seno de su radio* r. *Es lo que expresa la fórmula*

$$l = \alpha \operatorname{sen} r.$$

Se demuestra de igual modo que la fórmula correspondiente de la Geometría hiperbólica, sin más variación que la de sustituir por funciones circulares las hiperbólicas.

Corolario.—*La longitud de la circunferencia, cuyo radio es* r, *tiene por expresión* $2\pi \operatorname{sen} r$.

Porque la circunferencia es un arco circular, que tiene 2π por ángulo céntrico.

Observaciones.—1.ª Una circunferencia tiene dos centros, que son puntos opuestos; y los radios correspondientes á estos centros son suplementarios; de lo cual se infiere que las circunferencias de radios r y $\pi - r$ son iguales. Así resulta también de la fórmula anterior, puesto que r y $\pi - r$ tienen igual seno.

2.ª Cuando el radio r vale un cuadrante, la circunferencia se convierte en una recta, y la expresión de su longitud toma el valor 2π, como ya sabíamos (348-*Cor.*).

3.ª La longitud $2\pi \operatorname{sen} r$ de la circunferencia alcanza su valor máximo, cuando r vale un cuadrante; luego las circunferencias máximas son las líneas rectas.

350. (Fig. 325). *Designando por* l *la longitud de un arco circular* AB,

por α *su ángulo céntrico* AOB, *por* d *la distancia* BD *entre un extremo* B *del arco y el radio* OA *que pasa por el otro extremo, se cumple la fórmula*

$$l = \frac{\alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \operatorname{sen} d .$$

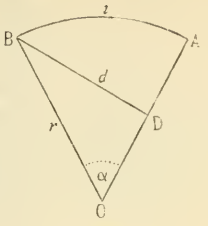


Fig. 325

Efectivamente, si $OB = r$, del triángulo BDO, rectángulo en D, se saca $\operatorname{sen} r = \frac{\operatorname{sen} d}{\operatorname{sen} \alpha}$; y sustituyendo este valor de sen r en la ecuación $l = \alpha \operatorname{sen} r$ (349), obtendremos la fórmula del enunciado.

IV.—Áreas.

351. Sabemos (319 - *Cor.* 2.°) que todos los triángulos de igual exceso angular son equivalentes. Por tanto, para medir las superficies, puede tomarse por unidad angular la superficie de un triángulo, cuyo exceso sea igual á un ángulo determinado. Este ángulo no debe satisfacer á otra condición que la de ser inferior á 360°, porque (318 - *Cor.* 4.°) el exceso angular de un triángulo puede variar desde 0 hasta 360°.

En este tratado de Geometría elíptica, siempre que, al hablar de áreas, no se exprese qué relaciones existen entre las unidades angular, lineal y superficial, debe sobreentenderse que se toma por unidad angular el ángulo céntrico de un arco circular que, en la Hipótesis euclideana, sería equivalente á su radio; por unidad de longitud el metro natural (347); *y por unidad de superficie la de un triángulo, cuyo exceso sea la unidad angular. Además, por brevedad, suele decirse "área de una superficie", "línea" ó "longitud de una línea" y "ángulo" á las respectivas razones de estas cantidades con su unidad.*

352. *El área de un polígono convexo es igual á su exceso.*

Observemos, en primer lugar, que la traducción de este enunciado, incorrecto por brevedad, es el siguiente: *si se toma por unidad superficial el triángulo cuyo exceso es la unidad angular; el área de un polígono convexo tiene por medida el valor numérico de su exceso.*

Demostración. — Entre la superficie del polígono convexo P, la del triángulo unidad U y sus respectivos excesos p y u, se verifica (319 - *Cor.* 3.°) la proporción $P : U = p : u$; y como, según lo convenido, u es la unidad angular, las razones $P : U$ y $p : u$ son los respectivos valores numéricos del área del polígono y de su exceso angular. Luego estas razones son iguales.

353. *El área de un ángulo tiene por medida el duplo de su razón con la unidad angular.*

DEMOSTRACIÓN. — (Fig. 326). Sean U la unidad angular, E y D los puntos medios de sus lados, con lo cual el triángulo birrectángulo UED será la unidad de superficie, y valdrá la mitad del ángulo U. Por consiguiente, entre las superficies de los dos ángulos A y U y la del triángulo UED, se verifica la relación $A : UED = 2\,(A : U)$.

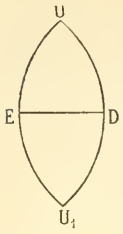


Fig. 326

COROLARIOS. *El área de un semiplano vale* 2π; *y la de todo el plano es* 4π.

Porque, considerando estas dos figuras como ángulos, los duplos de sus respectivas razones con la unidad angular valen 2π y 4π.

354. I. *El area de un sector circular que tenga* r *por radio,* α *por ángulo céntrico y* l *por longitud de su arco, se expresa por cualquiera de las dos fórmulas.*

$$s = 2\,\alpha\,\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}r, \qquad s = l\,\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}r,$$

que se demuestran como sus correspondientes de la Geometría hiperbólica (236-I), sin otra variación que la de sustituir, en los razonamientos, las funciones circulares á las hiperbólicas.

II. *El área del círculo se calcula por cualquiera de las expresiones*

$$s = 4\,\pi\,\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}r, \qquad s = c\,\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}r,$$

en las que es r *el radio, y* c *la longitud de la circunferencia.*

Porque las fórmulas I son aplicables al sector cuyo ángulo céntrico vale 2π, ó sea al círculo total.

OBSERVACIÓN. — Aplicando la primera de las dos fórmulas últimas al caso de ser r un cuadrante ó una semirecta, se obtienen las áreas del semiplano y del plano, que ya conocíamos.

355. (Fig. 327). *El área* T *de un trapecio circular* ABCD *se expresa por la fórmula*

$$T = 2\,m\,\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}a,$$

en la cual a *es la altura* BC, *y* m *la longitud de la circunferencia media.*

Se demuestra por igual procedimiento que el mismo teorema de la Geometría hiperbólica, pero empleando funciones circulares en vez de hiperbólicas (239-III).

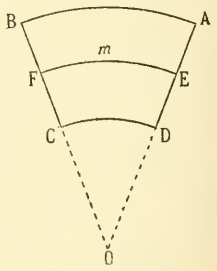


Fig. 327

356. *En el cono de revolución (descrito por la rotación de un triángulo rectángulo, alrededor de uno de sus catetos) el área* s *de la superficie lateral es*

$$s = c \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} l, \qquad \textit{y también} \qquad s = 2\pi \operatorname{sen} r \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} l,$$

siendo l *el lado*, r *el radio de la base*, *y* c *la longitud de su circunferencia.*

Porque dicha superficie, después de cortarla á lo largo de uno de sus lados, y de extenderla sobre un plano, se convierte en un sector circular, que tiene l por radio, y c por arco; luego (354 - I) su área será $s = c \operatorname{tang} \frac{1}{2} l$; y como (349 - *Cor.*) $c = 2\pi \operatorname{sen} r$, también será $s = 2\pi \operatorname{sen} r \operatorname{tang} \frac{1}{2} l$.

357. I. *El área* s *de una zona cónica de revolución (de una sola hoja) puede expresarse mediante su lado* l *y la longitud* m *de su circunferencia media* (241), *ó en función de su lado y el radio* r *de esta circunferencia, por las fórmulas*

$$s = 2 m \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} l, \qquad s = 4\pi \operatorname{sen} r \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} l.$$

Demostración. — Cortando dicha zona á lo largo de uno de sus lados, y desarrollándola, se convierte en un trapecio circular, cuyo arco medio tiene la longitud m, y cuya altura es l. Luego el área de la zona será la de este trapecio circular; y eso es (355) lo que expresa la primera fórmula. La segunda se obtiene sustituyendo, en la primera, m por su igual $2\pi \operatorname{sen} r$ (239 - *Cor.*).

II. *La superficie total* s *de un ángulo cónico de revolución, tiene por medida el duplo de su circunferencia media.*

Efectivamente, esta superficie puede considerarse como una zona cónica, en la que cada orilla está reducida á un punto, y cuyo lado l vale media recta. Por consiguiente, para tener el área s de esta zona en función de su circunferencia media m, basta suponer $l = \pi$ en la fórmula $s = 2 m \operatorname{sen} \frac{1}{2} l$; y resulta $s = 2 m$, de acuerdo con el enunciado.

358. I. (Fig. 328). *Cuando un círculo* PCP_1 *gira alrededor de uno de sus diámetros* PP_1, *todo segmento* AB *de recta, tocado en su punto medio* C *por el círculo, y totalmente situado á un mismo lado de dicho eje, describe una zona cónica, cuya área* s *es*

$$s = 4\pi \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} a - 4\pi \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} b,$$

si a *y* b *designan las respectivas distancias* AP *y* BP *de los extremos de aquel segmento á un mismo extremo* P *del referido diámetro.*

II. *Todo casquete esférico equivale á un círculo, cuyo radio es la cuerda de su arco meridiano.*

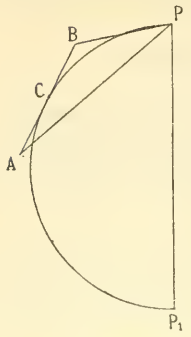


Fig. 328

III. *La superficie esférica de radio* r, *tiene por área* $4\pi \operatorname{sen}^2 r$; *y equivale á un círculo que tenga por radio el diámetro de la esfera.*

IV. *Dos superficies esféricas son entre sí como los cuadrados de sus circunferencias máximas.*

V. *El área* s *de una zona esférica de revolución puede expresarse mediante su radio* r, *su altura* a *y las distancias* b *y* b_1 *de su centro á los planos de las orillas, ó mediante la cuerda* c *de su arco meridiano y la distancia* m *entre el punto medio de este arco y el eje, por las fórmulas*

$$s = \frac{\pi \operatorname{sen} 2r \operatorname{sen} a}{\cos b \cos b_1}, \qquad s = 4\pi \operatorname{sen} m \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} c.$$

Las demostraciones que, de las proposiciones correspondientes, se dieron en la Geometría hiperbólica, subsisten en la Geometría elíptica; pero con la consabida sustitución de las funciones hiperbólicas por las circulares.

Observaciones.—1.ª Una superficie esférica tiene dos centros, que son puntos opuestos; y los radios correspondientes á estos centros son suplementarios; de lo cual se infiere que las dos superficies esféricas de radios r y $\pi - r$ son iguales. Así resulta también de la fórmula $s = 4\pi \operatorname{sen}^2 r$, que expresa el área s de la superficie esférica en función de su radio r; porque r y $\pi - r$ tienen igual seno.

2.ª Cuando el radio vale un cuadrante, la superficie esférica se convierte en un plano, y la expresión de su área toma el valor 4π, como ya sabíamos.

3.ª La expresión $4\pi \operatorname{sen}^2 r$ adquiere su valor máximo, cuando r vale un cuadrante; luego las superficies esféricas máximas son los planos.

359. I. *La superficie lateral de un pseudo-cilindro tiene por medida el producto de multiplicar por su lado* l *la circunferencia de la base, ó por la altura* a *la semicircunferencia cuyo radio es el diámetro* 2r *de dicha base. Es decir, que designando por* s *el área de aquella superficie, será*

$$s = 2\pi \operatorname{sen} r \times l, \qquad s = \pi \operatorname{sen} 2r \times a;$$

fórmulas que se demuestran por igual procedimiento que sus análogas de la Geometría hiperbólica (248).

II. *La superficie* s *de un pseudo-cilindro completo* (302), *tiene por medida* $2\pi \operatorname{sen} 2r$.

Efectivamente, aplicando la fórmula $s = \pi \operatorname{sen} 2r \times a$, al caso en que la altura a vale la longitud 2π de toda una recta, resulta $s = 2\pi \operatorname{sen} 2r$

V.—Volúmenes.

360. *En este tratado de Geometría elíptica, al hablar de la medida de los cuerpos, si no se advierte qué relación existe entre las unidades angular, lineal, superficial y corpórea, debe sobreentenderse que la unidad angular es el ángulo del arco que, en el supuesto euclídeo, sería equivalente á su radio; la de longitud, el metro natural* (347); *la de superficie, el triángulo cuyo exceso es la unidad angular; y la de volumen, el diedro cuya sección recta tiene por área el número* $\frac{1}{\pi}$. *Además, por brevedad, suele llamarse "ángulo", "línea", "superficie" y "cuerpo", á las respectivas razones de estas cantidades con la unidad.*

361. *El volumen de un diedro tiene por medida el producto de* π *por el área de su sección recta.*

Demostración.—Entre el volumen del diedro A, el del diedro U, tomado por unidad de volumen, y las áreas a y $\frac{1}{\pi}$ de sus respectivas secciones rectas, se verifica la proporción $A : U = a : \frac{1}{\pi}$, ó $A : U = \pi a$, que es lo que se quería demostrar, puesto que A : U es la medida del volumen del diedro A.

Corolarios.—*El volumen de un semi-espacio vale* $2\pi^2$; *y el de todo el espacio es* $4\pi^2$.

Porque estas dos figuras son ángulos diedros, cuyas respectivas secciones rectas, que son el ángulo llano y el giro, tienen por medida de su área 2π y 4π (353 *Cor.*).

362. (Fig. 329). Llamaremos *sección media* de un ángulo poliédrico ó cónico OO_1, á la sección producida en él por el plano que contiene los puntos medios A, B, C, D de sus aristas ó lados.

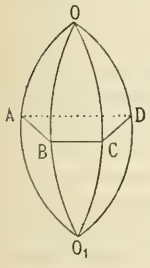


Fig. 329

El volumen de un ángulo poliédrico ó cónico tiene por medida el producto de π *por el área de su sección media* ABCD.

Demostración.—1.° Un ángulo poliédrico OO_1 equivale á un diedro igual á la mitad de su exceso. Por consiguiente, su volumen tiene por medida el producto de π por el área de la sección recta, correspondiente al semi-exceso. Pero esta sección recta es igual al semi-exceso del polígono ABCD (porque los ángulos de éste y los diedros correspondientes del ángulo poliédrico son de igual amplitud), é igual,

por lo tanto, al área de ABCD; luego el volumen del ángulo poliedríco OO_1 tiene por medida el producto de π por el área de la sección media ABCD.

2.° Un ángulo cónico puede considerarse como el límite de un ángulo poliédrico, cuyas caras, en número arbitrariamente grande, son arbitrariamente pequeñas; por cuyo motivo, lo demostrado para el ángulo poliédrico es aplicable á su límite, que es el ángulo cónico.

363. (Fig. 329). Si el vértice O de una pirámide OABCD es polo del plano de su base ABCD, todas las aristas que parten del vértice, serán cuadrantes, y normales á la base, y diremos que la pirámide es *recta*. Esta pirámide es, evidentemente, la mitad del ángulo sólido OO_1, cuya sección media es la base ABCD.

El volumen de una pirámide recta OABCD *tiene por medida el semiproducto de* π *por el área de su base* ABCD.

Porque dicha pirámide es la mitad del ángulo sólido OABCD; y como (362) el volumen de éste tiene por medida el producto de π por el área del polígono ABCD, el volumen de la pirámide valdrá la mitad de este producto.

364. I. (Fig. 330). Al cuerpo ABCDEFGH, limitado por las superficies de dos esferas concéntricas y la de un ángulo sólido que tenga su vértice en el centro O, le llamaremos *tronco de sector esférico;* y en él consideraremos como *bases* las porciones ABCD y EFGH de las dos superficies esféricas, comprendidas dentro de aquel ángulo sólido; como *aristas laterales* ó *lados* las porciones AE, BF, GG,.... de las aristas ó lados del ángulo sólido, comprendidas entre las bases; y como *altura* la longitud común de estas aristas, ó sea la distancia entre las bases. Puede ocurrir que el tronco tenga plana una base, por valer el radio de ésta un cuadrante. El cuerpo limitado por un trozo de superficie hiperesférica, el plano de su base y la superficie que proyecta normalmente sobre este plano la orilla de aquel trozo, no es otra cosa que un tronco de sector esférico con una base plana. De las dos bases de un tronco de sector esférico, la que tenga menor el radio (no superior á un cuadrante) es la menor; porque dichas bases son entre sí como las superficies esféricas totales de que forman parte; y la menor de éstas es la que tiene el menor radio (no superior á 90°). El referido tronco tendrá simétricas sus bases, cuando sus radios (que parten de igual centro) sean suplementarios.

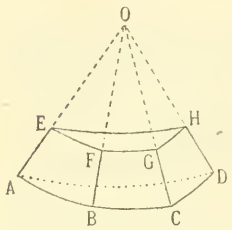


Fig. 330

II. *Dos troncos de sectores esféricos, de igual altura, y cuyas bases mayores pertenezcan á esferas iguales, son entre sí como sus bases.*

III. *Si dos troncos de sectores esféricos tienen común la base mayor, y la razón de sus alturas tiende hacia 1, la razón de los dos troncos tenderá también hacia este mismo límite.*

Dejamos al lector la demostración de estos principios, que son verdaderos en las tres geometrías parabólica, hiperbólica y elíptica.

365. *Dos pseudo-cilindros de igual radio* (248) *son entre sí como sus alturas.*

Se demuestra de igual modo que en la geometría vulgar la misma proposición para los prismas ó cilindros propiamente dichos.

366. (Fig. 331). Sean ABCD un trapecio circular, situado totalmente á un mismo lado de la recta x polar del centro O común á las dos bases AD y BC. Si este trapecio da una vuelta completa alrededor del eje x, describe un cuerpo de

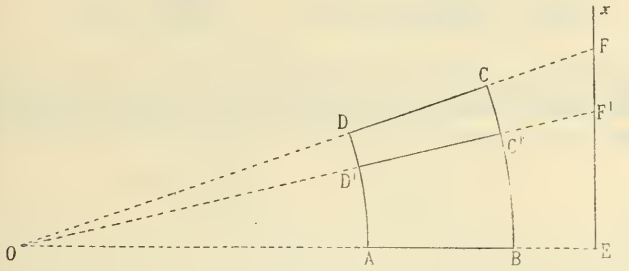


Fig. 331

revolución, de forma anular, al cual, provisionalmente, llamaré *corona pseudo-cilíndrica:* su *espesor* será la distancia AB, y su *amplitud* la longitud del segmento EF del eje x, comprendido dentro del ángulo BOC. En este movimiento de rotación, las bases AD y BC del trapecio (que son arcos hiperciclares de base x) describen zonas de pseudo-cilindro; y los lados AB y DC engendran coronas circulares iguales, que son las *bases* de aquel cuerpo. Cortando la corona pseudo-cilíndrica por planos normales al eje x, las secciones, que resultan, son coronas circulares iguales, que tienen EA y EB por radios.

367. *Dos coronas pseudo-cilíndricas, que tienen una base común, son entre sí como sus amplitudes.*

Demostración.—(Fig. 331). Sean ABCD y ABC'D' los respectivos trapecios circulares meridianos de las dos coronas pseudo-cilíndricas, AD y BC las bases del primero, y AD' y BC' las del segundo, con cuyos supuestos pertenecerán á un mismo círculo los arcos AD y AD', y á otro los BC y BC'. Si E, F y F' son las respectivas proyecciones normales de B, C y C' sobre x, las amplitudes de aquellas dos coronas serán EF y EF'. Designemos, de igual modo que se hizo en la Geometría hiperbólica, toda figura de revolución (sea línea, superficie ó cuerpo) por el elemento que la engendra, encerrado dentro de un paréntesis; y, con esta notación, [ABCD] designará la corona pseudo cilíndrica descrita por el tra-

pecio circular ABCD alrededor de x, y [AD] la zona pseudo-cilíndrica que describe el arco circular AD. Como (365) los pseudo-cilindros de igual radio son entre sí como sus alturas, se verifican las relaciones

$$\frac{[AEFD]}{[AEF'D']} = \frac{EF}{EF'} = \frac{[BEFC]}{[BEF'C']},$$

de las cuales se deduce sucesivamente

$$\frac{[AEFD]-[BEFC]}{[AEF'D']-[BEF'C']} = \frac{EF}{EF'}, \qquad \frac{[ABCD]}{[ABC'D']} = \frac{EF}{EF'},$$

y esta última proporción es la que se quería demostrar.

368. (Fig. 332). Sean, como antes, ABCD un trapecio circular, situado totalmente á un mismo lado de la recta x polar del centro O común á las bases AD

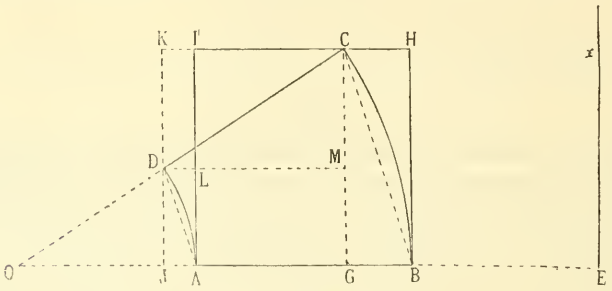


Fig. 332

y BC; y supongamos que la mayor de éstas, ó sea la más próxima al eje, es la BC. Las tangentes en A y B á los arcos AD y BC, y el hiperciclo de base AB, dirigido por C, determinan un trapecio circular ABHI, que tiene AB é IH por bases, y HB por altura. Si toda la figura da una vuelta completa alrededor de x, el trapecio ABCD describe una corona pseudo-cilíndrica (366), y el ABHI otro cuerpo anular, que es (364-I) un tronco de sector esférico. Pues bien, podemos afirmar el siguiente

LEMA 1.° — *Si en la corona pseudo-cilíndrica* [ABCD] *el espesor* AB *y la distancia* CG *de* C *á la recta* AB *son iguales y tienden hacia cero, mientras que el radio* EA *del paralelo* [A], *ó su límite, es menor que un cuadrante, la razón de esta corona al cuerpo anular* [ABHI] *tiende hacia la unidad.*

DEMOSTRACIÓN.—Trácense la distancia DJ de D á la recta AB, y el hiperciclo de base AB, dirigido por D. Las rectas JB, JD, BH y el hiperciclo HI determinan un trapecio circular JBHK, y otro AGML las rectas AG, AI, CG y el hiperciclo que hemos dirigido por D. Los cuerpos [ABCD] y [ABHI] son mayores que el [AGML], y menores que el [JBHK]. Por consiguiente, bastará probar que la razón entre estos dos últimos tiende hacia la unidad, cuando, siendo el radio OA (ó su límite) menor que 90°, el espesor AB y la distancia GC son iguales y tienden hacia cero. De la identidad

$$\frac{[AGML]}{[JBHK]} = \frac{[AGML]}{[AGCI]} \times \frac{[AGCI]}{[JBHK]}$$

se infiere que el primer miembro tenderá hacia 1, si tienden hacia este límite las dos razones del segundo. La cuestión queda, pues, reducida á demostrar las siguientes relaciones entre troncos de sectores esféricos:

$$\text{lím.}\frac{[AGML]}{[AGCI]} = 1, \qquad \text{lím.}\frac{[AGCI]}{[JBHK]} = 1;$$

ó bien, á demostrar que en los dos primeros troncos (que tienen la misma base) la razón de sus alturas DJ : CG tiende hacia 1; y que, en los dos últimos troncos (que son de igual altura) la razón [AG]:[JB] de sus bases tiende también hacia 1. Pues bien, si, como suponemos, AB y CG son arbitrariamente pequeños, también lo será DJ; y, de la identidad

$$\frac{DJ}{CG} = \frac{DJ}{\text{sen } DJ} \times \frac{\text{sen } DJ}{\text{sen } CG} \times \frac{\text{sen } CG}{CG}$$

(por tender hacia 1 las razones 2.ª y 4.ª) se deducirá

$$\text{lím.}\frac{DJ}{CG} = \text{lím.}\frac{\text{sen } DJ}{\text{sen } CG},$$

igualdad que, mediante las relaciones

$$\text{sen } DJ = \text{sen } OD \text{ sen } AOD, \qquad \text{sen } CG = \text{sen } OC \text{ sen } AOD,$$

que se sacan de los triángulos rectángulos DJO, CGO, se convierte en

$$\text{lím.}\frac{DJ}{CG} = \text{lím.}\frac{\text{sen } OD}{\text{sen } OC} = \text{lím.}\frac{\cos EA}{\cos EB}.$$

Finalmente, como EA y EB tienden hacia un mismo límite, y éste es, por hipótesis, menor que 90°, el último miembro, y por consiguiente el primero, tienden hacia el valor 1.

Falta probar que la razón de las coronas circulares [AG] y [JB] tiende también hacia 1. El área de la primera es

$$[AG] = 4\pi\left(\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}EA - \operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}EG\right) = 4\pi \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(EA-EG)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(EA+EG)$$

y, en definitiva, por ser $EA - EG = AG$,

$$[AG] = 4\pi \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}AG \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(EA+EG).$$

Análogamente, se hallaría

$$[JB] = 4\pi \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}JB \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(EJ+EB);$$

y dividiendo ordenadamente ambas igualdades, se halla

$$\frac{[AG]}{[JB]} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}AG}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}JB} \times \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(EA+EG)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(EJ+EB)}.$$

Para que el límite de la primera razón sea la unidad, basta que lo sean también los límites de las dos últimas. Bastará, pues, probar que

$$\lim.\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}AG}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}JB} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim.\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(EA+EG)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(EJ+EB)} = 1,$$

ó bien, que

$$\lim.\frac{AG}{JB} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim.\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(EA+EG)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(EJ+EB)} = 1,$$

porque, siendo $\frac{1}{2}AG$ y $\frac{1}{2}JB$ arbitrariamente pequeños, su razón tiene el mismo límite que la de sus senos.

Por ser arbitrariamente pequeña la distancia GC, también lo son la DJ y los arcos BC y AD; y, como además sus radios OA y OB no tienden hacia cero (pues suponemos que el complemento EA de OA, ó su límite, es menor que

90°) los ángulos CBJ y DAJ tienden hacia un recto. Los triángulos infinitesimales GBC y JAD proporcionan las relaciones

$$\text{lím.}\frac{GB}{GC} = \text{lím. cot CBG} = \cot 90° = 0,$$

$$\text{lím.}\frac{JA}{JD} = \text{lím. cot DAJ} = \cot 90° = 0;$$

es decir, que

$$\text{lím.}\frac{GB}{GC} = 0, \qquad \text{lím.}\frac{JA}{JD} = 0;$$

pero (por hipótesis) $CG = AB$, y además, $JD < AB$; luego

$$\text{lím.}\frac{GB}{AB} = 0, \qquad \text{lím.}\frac{JA}{AB} = 0,$$

y, por consiguiente,

$$\text{lím.}\left(1 - \frac{GB}{AB}\right) = 1, \quad \text{lím.}\frac{AB - GB}{AB} = 1, \quad \text{lím.}\frac{AG}{AB} = 1,$$

$$\text{lím.}\left(1 + \frac{JA}{AB}\right) = 1, \quad \text{lím.}\frac{JA + AB}{AB} = 1, \quad \text{lím.}\frac{JB}{AB} = 1;$$

y, dividiendo ordenadamente las dos últimas igualdades, resulta $\text{lím.}\dfrac{AG}{JB} = 1$, que es una de las dos relaciones que necesitábamos demostrar.

Ahora sólo nos falta instituir la relación

$$\text{lím.}\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(EA + EG)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(EJ + EB)} = 1.$$

Si EA es constante, ó si siendo variable no tiende hacia cero, los dos términos de la razón anterior tienden hacia un mismo límite finito, que es el seno de EA ó de su límite; luego, en tal caso, aquella razón tiende hacia 1. Pero, si EA tiende hacia cero, lo mismo ocurrirá á EG, EJ, EB, $\frac{1}{2}(EA + EG)$, $\frac{1}{2}(EJ + EB)$ y á los senos de estas cantidades; de manera que, en el límite, la referida razón se presentará bajo la forma $\frac{0}{0}$. Su límite, sin embargo, es la unidad. Efectiva-

mente, la razón de las cantidades arbitrariamente pequeñas $\frac{1}{2}(EA + EG)$ y $\frac{1}{2}(EJ + EB)$ puede sustituirse, en el límite, por la de sus senos; y así, bastará probar que

$$\text{lím.}\frac{EA + EG}{EJ + EB} = 1.$$

Pues bien, hemos visto, en el curso de esta demostración, que $\text{lím.}\frac{BG}{BA} = 0$ y $\text{lím.}\frac{AJ}{AB} = 0$; y (puesto que $AB < EA + EB$) con mayor motivo será

$$\text{lím.}\frac{BG}{EA + EB} = 0, \qquad \text{lím.}\frac{AJ}{EA + EB} = 0.$$

Por consiguiente, podremos efectuar las siguientes deducciones:

$$\frac{EA + EG}{EJ + EB} = \frac{EA + EB + BG}{EA + EB + JA} = \frac{1 + \dfrac{BG}{EA + EB}}{1 + \dfrac{JA}{EA + EB}};$$

$$\text{lim.}\frac{EA + EG}{EJ + EB} = \frac{1 + \text{lím.}\dfrac{BG}{EA + EB}}{1 + \text{lím.}\dfrac{JA}{EA + EB}} = 1;$$

luego

$$\text{lím.}\frac{EA + EG}{EJ + EB} = 1.$$

La proposición queda demostrada.

LEMA 2.º—(Fig. 333). *Si en dos coronas pseudo-cilíndricas* [ABCD] *y* [A′B′C′D′], *los radios* EA *y* EA′ *de sus paralelos* [A] *y* [A′] *(ó los límites de estos radios) son menores que 90°, y sus espesores* AB *y* A′B′ *y alturas* CG *y* C′G′ *son iguales y tienden hacia cero, la razón de las dos coronas tiene por límite la razón* sen EA : sen EA′ *entre los senos de aquellos radios (ó de sus límites).*

DEMOSTRACIÓN. —Las tangentes en A, B, A′, B′ á los arcos AD, BC, A′D′, B′C′, y los hipercíclos de bases AB y A′B′, dirigidos por C y C′, determinan dos trapecios circulares ABHI y A′B′H′I′. Considerando la identidad

$$\frac{[ABCD]}{[A'B'C'D']} = \frac{[ABCD]}{[ABHI]} \times \frac{[ABHI]}{[A'B'H'I']} \times \frac{[A'B'H'I']}{[A'B'C'D']},$$

vemos que, en virtud de la hipótesis y del lema precedente, las razones 2.ª y 4.ª, tienden hacia la unidad; y, además, que la 3.ª razón entre troncos de sectores esféricos, con iguales alturas CG y C'G', es el límite hacia que tiende la razón de sus bases, ó sea de las coronas circulares [AB] y [A'B']. Por consiguiente,

$$\text{lím.} \frac{[ABCD]}{[A'B'C'D']} = \text{lím.} \frac{[AB]}{[A'B']};$$

pero (349 y 355), si M y M' son los puntos medios de AB y A'B', para las áreas

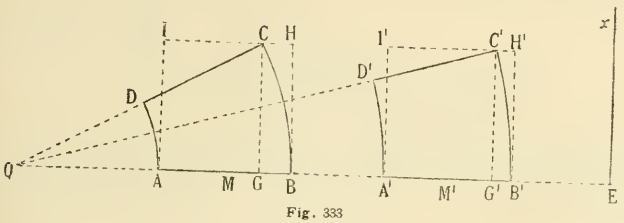


Fig. 333

de las coronas circulares [AB] y [A'B'] tenemos:

$$[AB] = 4\pi \operatorname{sen} EM \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} AB, \qquad [A'B'] = 4\pi \operatorname{sen} EM' \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} A'B';$$

y como, por hipótesis, es AB = A'B', será

$$\frac{[AB]}{[A'B']} = \frac{\operatorname{sen} EM}{\operatorname{sen} EM'}, \qquad \text{lím.} \frac{[ABCD]}{[A'B'C'D']} = \text{lím.} \frac{\operatorname{sen} EM}{\operatorname{sen} EM'}.$$

Finalmente, al tender AB y A'B' hacia cero, los respectivos límites de EM y EM' son EA y EA'; luego la última igualdad equivale á esta otra:

$$\text{lím.} \frac{[ABCD]}{[A'B'C'D']} = \frac{\operatorname{sen} EA}{\operatorname{sen} EA'},$$

que es lo que se afirmaba en el enunciado.

LEMA 3.° — (Fig. 334). *Si en dos coronas pseudo-cilíndricas* [ABCD] *y* [A′B′C′D′] *de igual amplitud* EF *é igual espesor, los radios* EA *y* EA′ *de los paralelos* [A] *y* [A′] *(ó sus límites) son menores que 90°, cuando sus espesores tiendan hacia cero, la razón de las coronas tiene por límite la razón entre los senos de los diámetros* 2EA *y* 2EA′ *de aquellos paralelos, ó entre los senos de los límites de estos diámetros.*

DEMOSTRACIÓN.—Sean O el centro común á las bases AD, BC, A′D′, B′C′ de los dos trapecios circulares ABCD y A′B′C′D′, y P y Q las intersecciones de los arcos BC y B′C′ (ó de sus prolongaciones) con el hiperciclo de base AB y altura igual á AB. Las rectas OP, OQ, AB y las bases de aquellos trapecios de-

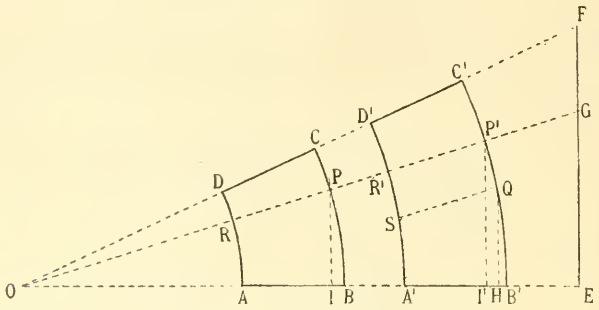


Fig. 334

terminan otros trapecios circulares ABPR, A′B′P′R′ y A′B′QS. Sea EG la común amplitud de las coronas [ABPR] y A′B′P′R′]. Como (367) las coronas pseudo-cilíndricas de igual base son entre sí como sus amplitudes, se cumplirán las proporciones

$$\frac{[ABCD]}{[ABPR]} = \frac{EF}{EG}, \qquad \frac{[A'B'C'D']}{[A'B'P'R']} = \frac{EF}{EG},$$

que conducen á esta otra

$$\frac{[ABCD]}{[A'B'C'D']} = \frac{[ABPR]}{[A'B'P'R']},$$

la cual enseña que la razón [ABCD] : [A′B′C′D′] de las dos coronas pseudo-cilíndricas propuestas, cuyos espesores AB y A′B′ son arbitrariamente pequeñas, pero cuya común amplitud EF es finita, tiene el mismo límite que la razón

de las coronas [ABPR], [A'B'P'R'], en las que no sólo sus espesores, sino también su común amplitud EG, tienden hacia cero. La cuestión queda, pues, reducida á calcular el valor de esta última razón.

Como, por construcción, las distancias PI y QH de P y Q á AB son iguales á AB, y además, por hipótesis, AB y A'B' también son iguales y arbitrariamente pequeñas, y los radios EA y EA' (ó sus límites) valen menos de 90°, podremos afirmar, en virtud del lema precedente y del principio 367, á más de la identidad

$$\frac{[ABPR]}{[A'B'P'R']} = \frac{[ABPR]}{[A'B'QS]} \cdot \frac{[A'B'QS]}{[A'B'P'R']},$$

las relaciones

$$\lim. \frac{[ABPR]}{[A'B'QS]} = \frac{\text{sen } EA}{\text{sen } EA'}, \qquad \lim. \frac{[A'B'QS]}{[A'B'P'R']} = \frac{\text{arc. } B'Q}{\text{arc. } B'P'},$$

de las cuales se concluye

$$\lim. \frac{[ABPR]}{[A'B'P'R']} = \frac{\text{sen } EA}{\text{sen } EA'} \times \lim. \frac{\text{arc. } B'Q}{\text{arc. } B'P'};$$

mas, por ser arbitrariamente pequeños los arcos BQ y B'P', y finitos sus radios, la razón de estos arcos, la de sus ordenadas QH y P'I', y la de sus senos, tienden hacia un mismo límite. Es decir, que

$$\lim. \frac{\text{arc. } B'Q}{\text{arc. } B'P'} = \lim. \frac{\text{sen } QH}{\text{sen } P'I'};$$

pero, de los triángulos rectángulos OPI y OP'I', teniendo en cuenta que PI = QH, se saca

$$\frac{\text{sen } QH}{\text{sen } P'I'} = \frac{\text{sen } OP \text{ sen } EOG}{\text{sen } OP' \text{ sen } EOG} = \frac{\text{sen } OB}{\text{sen } OB'} = \frac{\cos EB}{\cos EB'};$$

luego

$$\lim. \frac{\text{arc. } B'Q}{\text{arc. } B'P'} = \lim. \frac{\cos EB}{\cos EB'},$$

$$\lim. \frac{[ABCD]}{[A'B'C'D']} = \frac{\text{sen } EA}{\text{sen } EA'} \cdot \frac{\cos EA}{\cos EA'} = \frac{\text{sen } 2\,EA}{\text{sen } 2\,EA'};$$

y en definitiva

$$\text{lím.}\frac{[\text{ABCD}]}{[\text{A}'\text{B}'\text{C}'\text{D}']}=\frac{\text{sen } 2\,\text{EA}}{\text{sen } 2\,\text{EA}'},$$

lo que se quería demostrar.

369. (Fig. 335). *Dos pseudo-cilindros* [ABFE] *y* [CDEF] *de igual altura* EF, *son entre sí como los senos cuadrados de sus radios* EA *y* EC.

Demostración.—Pueden ocurrir dos casos: que los radios EA y EC sean comensurables entre sí, ó que no lo sean.

1.° Si los radios EA y EC son comensurables, dividámoslos en partes iguales á la k-ava parte de su medida común, y supongamos que esta k-ava parte está contenida m veces en EA, y n veces en EC. Por los puntos de división, tracemos (en el plano meridiano ABEF) horiciclos de base EF, ó sean circunferencias cuyo centro sea un polo de EF; y quedará el trapecio circular ABFE descompuesto en m trapecios, y en n el CDFE. Al girar toda la figura en torno de la recta EF, cada trapecio parcial describe una corona pseudo-cilíndrica, y si designamos por V_h la que ocupa el lugar h (empezando á contar por la más próxima al eje), y por α su espesor, su radio será $h\alpha$, de manera que, cuando aquel espesor tienda hacia cero, por ser k arbitrariamente grande, entre los volúmenes de las referidas coronas se cumplirán (según el lema 3.° del párrafo anterior) las relaciones

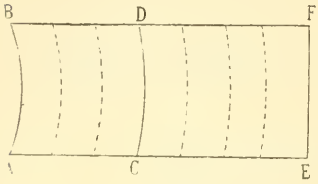


Fig. 335

$$\text{lím.}\frac{V_h}{V_m}=\text{lím.}\frac{\text{sen } 2h\alpha}{\text{sen } 2\,\text{EA}},$$

ó

$$\frac{V_h}{V_m}=\frac{\text{sen } 2h\alpha}{\text{sen } 2\,\text{EA}}+\varepsilon_h, \qquad \text{ó} \qquad V_h=\frac{V_m}{\text{sen } 2\,\text{EA}}\,\text{sen } 2h\alpha+V_m\varepsilon_h.$$

siendo ε_h una cantidad arbitrariamente pequeña. Análogamente, se cumplirán las n relaciones

$$V_1=\frac{V_m}{\text{sen } 2\,\text{EA}}\,\text{sen } 2\alpha+V_m\varepsilon_1,$$

$$V_2 = \frac{V_m}{\operatorname{sen} 2\,EA} \operatorname{sen} (2 \cdot 2\,\alpha) + V_m\,\varepsilon_2\,,$$

$$V_3 = \frac{V_m}{\operatorname{sen} 2\,EA} \operatorname{sen} (3 \cdot 2\,\alpha) + V_m\,\varepsilon_3\,,$$

$$\vdots$$

$$V_n = \frac{V_m}{\operatorname{sen} 2\,EA} \operatorname{sen} (n \cdot 2\,\alpha) + V_m\,\varepsilon_n\,,$$

en las cuales las n letras ε designan cantidades evanescentes. Sumando ordenadamente estas n igualdades, observando que la suma de los primeros miembros es el pseudo-cilindro [EFDC], y llamando ε al promedio de ε_1, ε_2, ε_3, ... ε_n (promedio que también será arbitrariamente pequeño) resulta

$$[EFDC] = \frac{V_m}{\operatorname{sen} 2\,EA} \left(\operatorname{sen} 2\,\alpha + \operatorname{sen} (2 \cdot 2\,\alpha) + \operatorname{sen} (3 \cdot 2\,\alpha) + \cdots\cdots + \operatorname{sen} (n \cdot 2\,\alpha)\right) + n\,V_m\,\varepsilon.$$

Los arcos 2α, $2 \cdot 2\alpha$, $3 \cdot 2\alpha$, ... $n \cdot 2\alpha$ incluídos en el paréntesis, forman una progresión aritmética, cuya diferencia (igual á su primer término) vale 2α; y por consiguiente (*), la suma de sus senos está expresada por la fórmula

$$\operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen} (2 \cdot 2\alpha) + \operatorname{sen} \cdot (3 \cdot 2\alpha) + \cdots\cdots + \operatorname{sen} (n \cdot 2\alpha) = \frac{\operatorname{sen} [n\alpha] \operatorname{sen} [(n+1)\alpha]}{\operatorname{sen} \alpha},$$

y mediante ella, la anterior expresión de [EFDC] se convierte en

$$[EFDC] = \frac{V_m}{\operatorname{sen} 2\,EA \operatorname{sen} \alpha} \left[\operatorname{sen} [n\alpha] \operatorname{sen} [(n+1)\alpha] + (n \operatorname{sen} \alpha)\,\varepsilon \operatorname{sen} 2\,EA\right],$$

la cual, teniendo en cuenta que

$$n\alpha = EC \qquad \text{y} \qquad n \operatorname{sen} \alpha = n\alpha \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} = EC \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha}\,,$$

se transforma en

$$[EFDC] = \frac{V_m}{\operatorname{sen} 2\,EA \operatorname{sen} \alpha} \left[\operatorname{sen} EC \operatorname{sen} (EC + \alpha) + EC \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha}\,\varepsilon \operatorname{sen} 2\,EA\right].$$

(*) Es una aplicación de la fórmula

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} (a+r) + \operatorname{sen} (a+2r) + \cdots + \operatorname{sen} (a+nr) = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(n+1)\,r \operatorname{sen} (a + \frac{1}{2}\,nr)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\,r}$$

De igual modo se hallaría para el otro pseudo-cilindro

$$[\mathrm{EFBA}] = \frac{V_m}{\operatorname{sen} 2\,\mathrm{EA}\,\operatorname{sen}\alpha}\left[\operatorname{sen}\mathrm{EA}\,\operatorname{sen}(\mathrm{EA}+\alpha)+\mathrm{EA}\,\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\,\varepsilon'\operatorname{sen} 2\,\mathrm{EA}\right],$$

siendo ε' una cantidad arbitrariamente pequeña. Y dividiendo ordenadamente las dos últimas igualdades, obtenemos

$$\frac{[\mathrm{EFDC}]}{[\mathrm{EFBA}]} = \frac{\operatorname{sen}\mathrm{EC}\,\operatorname{sen}(\mathrm{EC}+\alpha)+\mathrm{EC}\,\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\,\varepsilon\operatorname{sen} 2\,\mathrm{EA}}{\operatorname{sen}\mathrm{EA}\,\operatorname{sen}(\mathrm{EA}+\alpha)+\mathrm{EA}\,\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\,\varepsilon'\operatorname{sen} 2\,\mathrm{EA}}.$$

Finalmente, tomando los límites de ambos miembros, en el supuesto de que α tienda hacia cero, se tendrá lím. $\mathrm{EA}+\alpha=\mathrm{EA}$, lím. $(\mathrm{EC}+\alpha)=\mathrm{EC}$, lím. $\varepsilon=0$, lím. $\varepsilon'=0$; lím. $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}=1$; y en definitiva

$$\frac{[\mathrm{EFDC}]}{[\mathrm{EFBA}]} = \frac{\operatorname{sen}^2\mathrm{EC}}{\operatorname{sen}^2\mathrm{EA}}.$$

2.° Queda demostrada esta fórmula para el caso de ser comensurables entre sí los radios EC y EA. Si no lo fueran, designemos por α la n-ava parte del radio mayor EA. El otro radio no será un múltiplo de α, pero estará comprendido entre dos múltiplos consecutivos $(m+1)\alpha$ y $m\alpha$ de α. Si designamos por P y Q los dos pseudo-cilindros que tienen por radios $(m+1)\alpha$ y $m\alpha$, cuando α sea suficientemente pequeño, serán $(m+1)\alpha$ y $m\alpha$ menores que 90°, y se cumplirán las limitaciones

$$\frac{\operatorname{sen}^2 m\alpha}{\operatorname{sen}^2\mathrm{EA}} < \frac{\operatorname{sen}^2\mathrm{EC}}{\operatorname{sen}^2\mathrm{EA}} < \frac{\operatorname{sen}^2(m+1)\alpha}{\operatorname{sen}^2\mathrm{EA}}, \qquad \frac{\mathrm{Q}}{[\mathrm{EABF}]} < \frac{[\mathrm{ECDF}]}{[\mathrm{EABF}]} < \frac{\mathrm{P}}{[\mathrm{EABF}]},$$

que tienen, según el primer caso, iguales los primeros miembros, é iguales también los últimos. Podemos, pues, afirmar que

$$\frac{\operatorname{sen}^2 m\alpha}{\operatorname{sen}^2\mathrm{EA}} < \frac{[\mathrm{ECDF}]}{[\mathrm{EABF}]} < \frac{\operatorname{sen}^2(m+1)\alpha}{\operatorname{sen}^2\mathrm{EA}}.$$

Si α tiende hacia cero, los miembros extremos tienden hacia un mismo límite, que es $\operatorname{sen}^2\mathrm{EC} : \operatorname{sen}^2\mathrm{EA}$ (puesto que $m\alpha < \mathrm{EC} < (m+1)\alpha$); luego ese mismo límite es el valor del miembro intermedio.

370. I. *El volumen de un pseudo-cilindro completo* (302) *cuyo radio valga medio cuadrante, tiene por medida* $2\pi^2$.

Demostración — Sabemos (302) que á un pseudo-cilindro completo le falta para componer todo el espacio, otro pseudo-cilindro completo, cuyo radio tiene por complemento el radio del primero. Por consiguiente, como suponemos que el radio del uno vale medio cuadrante, ambos pseudo-cilindros serán iguales; luego uno cualquiera de los dos valdrá la mitad de todo el espacio, ó sea $2\pi^2$ (361-*Cor.*)

II. *El volumen de un pseudo-cilindro incompleto, de altura* a, *y cuyo radio valga medio cuadrante, tiene por medida* πa.

Efectivamente, este cilindro incompleto I y el completo C de igual radio, son entre sí como sus alturas a y 2π (puesto que la altura del completo es una recta entera, cuya longitud es 2π); es decir, que $I : C = a : 2\pi$; y sustituyendo en vez de C la expresión $2\pi^2$ de su volumen, resulta $I = \pi a$.

371. I. *El volumen* v *de un pseudo-cilindro cualquiera, de radio* r *y altura* a, *tiene por expresión.*

$$v = 2\pi a \operatorname{sen}^2 r.$$

Demostración. — Designemos por I el cilindro incompleto de la misma altura a, y de radio igual á medio cuadrante; y podremos afirmar (369) la relación

$$v : I = \operatorname{sen}^2 r : \operatorname{sen}^2 45°;$$

y haciendo en ella las sustituciones

$$I = \pi a, \qquad \operatorname{sen}^2 45° = \frac{1}{2},$$

se obtiene fácilmente la fórmula del enunciado.

II. *El volumen de un pseudo-cilindro completo, de radio* r, *tiene por medida* $4\pi \operatorname{sen}^2 r$.

Porque este valor es el que adquiere el segundo miembro de la igualdad precedente, cuando la altura a, por ser una recta completa, vale 2π.

372. *Para calcular el volumen de un segmento esférico (que sea de revolución) multiplíquese la zona curva, que lo limita, por la cotangente del radio, y réstese del duplo producto de* π *por la altura.*

El volumen de una esfera, de radio r, *es*

$$2\pi (2r - \operatorname{sen} 2r).$$

El volumen de un tronco cónico de revolución es

$$2\pi (a - l \cos \Theta),$$

en cuya expresión l *es el lado*, a *la altura, y* Θ *el ángulo del eje con uno de los lados.*

(Fig. 366). *El volumen de un sector esférico, descrito por la revolución de un sector circular* OAB *alrededor de su radio* OB, *tiene por medida*

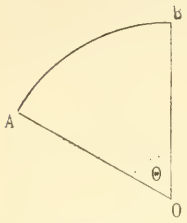


Fig. 336

$$2\pi \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\Theta\,(2r - \operatorname{sen} 2r),$$

en cuya expresión r *es el radio, y* Θ *el ángulo céntrico* BOA *del arco* BA.

Se demuestran todas estas leyes de igual modo que las correspondientes de la Geometría hiperbólica (258, 259 y 260), sin otra modificación que la de emplear las funciones circulares en vez de las hiperbólicas.

OBSERVACIONES.—Dos esferas, cuyos centros sean puntos opuestos, y que tengan radios suplementarios, componen todo el espacio; y la suma de sus volúmenes debe ser $4\pi^2$. El volumen de una esfera alcanza su valor máximo, convirtiéndose en todo el espacio, cuya medida es $4\pi^2$ (361-*Cor.*), cuando el radio vale media recta.

Todas estas conclusiones están confirmadas por la fórmula que expresa el volumen de la esfera.

FIN

ÍNDICE

Páginas

Prólogo.—Ojeada histórica 3

INTRODUCCIÒN

Leyes independientes del Axioma XI de Euclides

I.—Objeto de esta Introducción 11
II.—Leyes fundamentales. 11
III.—Primeras nociones sobre los ángulos 12
IV.—Ángulos formados por dos rectas con una tercera 13
V.—Algunas propiedades del cuadrilátero convexo 15
VI.—Condiciones de igualdad de dos triángulos. Aplicaciones. 16
VII.—Relaciones entre los tres lados de un triángulo. Aplicaciones 17
VIII.—Comparación de dos lados de un triángulo con los dos ángulos opuestos . 18
IX.—Triángulos con elementos comunes. 19
X.—Algunas propiedades del círculo 19
XI.—De la normal al plano 19
XII.—Del ángulo diedro 20
XIII.—De la simetría 21
XIV.—Figuras de revolución 24
XV.—Esférica 24
XVI.—Del ángulo sólido. 25

PARTE PRIMERA

Geometría hiperbólica

CAPÍTULO I. — GEOMETRÍA PURA

I.—Teoría general de las paralelas 29
II.—Leyes descriptivas fundamentales de la Geometría hiperbólica 40
III.—Del ángulo de paralelismo 47
IV.—Suma de los ángulos de un polígono 49
V.—De los triángulos iguales, y de los que tienen 1, 2, ó 3 vértices infinitamente lejanos 52
VI.—Relaciones entre las áreas de los polígonos y sus defectos 55
VII.—De la normal común á dos rectas ó dos planos, que no se cortan ni son paralelos 61
VIII.—De las ordenadas de una recta con relación á otra 65
IX.—Elementos en el infinito é ideales 70
X.—Mediatrices de los lados y bisectrices de los ángulos de un triángulo. . . 76
XI.—Círculo, horiciclo é hipercíclo 79
XII.—Esfera, horisfera é hiperesfera. 92
XIII.—Geometría de las figuras horisféricas 100

287

CAPÍTULO II. — TRIGONOMETRÍA

Páginas

I.—Las funciones circulares y el imaginarismo 105
II.—Trigonometría de las figuras horisféricas 105
III.—Relaciones trigonométricas en el triángulo esférico y rectángulo 105
IV.—Relaciones trigonométricas en un triángulo esférico cualquiera. 109
V.—Las funciones hiperbólicas. 114
VI.—Dignando de una distancia. Metro natural. 124
VII.—Expresiones diversas del ángulo de paralelismo 128
VIII.—Distancias y ángulos imaginarios. 131
IX.—De los triángulos ideales 133
X.—Relaciones trigonométricas en el triángulo rectilíneo y rectángulo . . . 134
XI.—Relaciones trigonométricas en un triángulo rectilíneo cualquiera 140
XII.—Longitud de un arco de ciclo 153
XIII.—Áreas. 156
XIV.—Volúmenes 174

PARTE SEGUNDA

Geometría elíptica

CAPÍTULO I. — GEOMETRÍA PURA

I.—Conceptos fundamentales 197
II.—Distancia entre dos puntos, y ángulo de dos rectas. 203
III.—Polígonos convexos. Igualdad de triángulos. Aplicaciones 205
IV.—De la normal al plano y de los ángulos diedros. 208
V.—Círculo y esfera. 210
VI.—Polos de una recta y de un plano 212
VII.—Rectas recíprocas. 214
VIII.—Hiperciclo, hiperesfera y pseudo-cilindro. 216
IX.—De la normal común á dos rectas, que se cortan, ó á dos planos. 217
X.—Algunas propiedades riemannas del diedro y del ángulo sólido. 218
XI.—Condiciones de igualdad de los triángulos rectángulos. Aplicaciones. . . 220
XII.—Relaciones entre los lados de un polígono. 222
XIII.—Relaciones entre los ángulos de un polígono 223
XIV.—Comparación de dos lados de un triángulo con los dos ángulos opuestos. . 227
XV.—Algunas propiedades del cuadrilátero. 228
XVI.—Leyes comunes á las tres geometrías parabólica, hiperbólica y elíptica. . . 230

CAPÍTULO II. — TRIGONOMETRÍA

I.—Teoría de las funciones circulares. 233
II.—Relaciones trigonométricas en los triángulos esféricos y rectilíneos. . . . 252
III.—Metro natural. Longitud de un arco de círculo. 253
IV.—Áreas. 255
V.—Volúmenes 259

ÍNDICE. 275

MEMORIAS

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS Y ARTES

DE BARCELONA

TERCERA ÉPOCA — VOL. VII. NÚM 3

ESTUDIO DE LA CATENARIA

Y DE SUS APLICACIONES MECÁNICAS

POR EL ACADÉMICO

D. JOSÉ TOUS Y BIAGGI

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

Publicada en septiembre de 1908

BARCELONA

A. LOPEZ ROBERT, IMPRESOR.—CONDE DEL ASALTO 63

1908

290

ESTUDIO DE LA CATENARIA

Y DE SUS APLICACIONES MECÁNICAS

por el Académico

D. José Tous y Biaggi

Sesión del día 28 de abril de 1908.

Es la catenaria una de las pocas líneas estudiadas, cuya razón de ser sea exclusivamente mecánica. El origen de las líneas y el estudio de sus propiedades por los primeros geómetras fué puramente geométrico, el movimiento proporcionó inmediatamente la idea de nuevas líneas y la de multitud de relaciones entre las conocidas, viniendo á parar en lo que actualmente se denomina Geometría cinemática, finalmente, la idea de fuerza como causa de movimiento de un punto material, ó de forma de equilibrio de un conjunto de ellos, ha dado lugar al conocimiento y al estudio de nuevas líneas y además al de propiedades y relaciones entre las de antiguo conocidas en su modo de ser exclusivamente geométrico.

A esta última clase pertenece la catenaria, que de seguro ha llamado la atención de los hombres observadores desde los tiempos más antiguos. No obstante, así como la línea recta, la circunferencia, la esfera, etc., son de propiedades tan sencillas que su idea se desarrolla fácilmente en el hombre aun desde niño, la catenaria no es así; la forma que toma un cordel ó cadenilla suspendida por sus extremos es aparentemente tan variable según sea la longitud de aquélla y la posición de éstos, que no parece sino que de catenarias haya una inmensa variedad, no obstante no es así y uno de los puntos que se harán notar es el de que de catenaria, en cuanto á forma, lo mismo que de circunferencia, no hay más que una, las diferencias son solo de mayor á menor, no de forma.

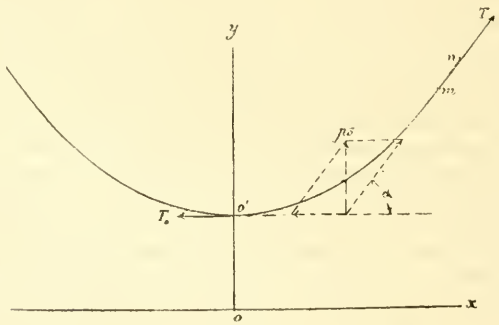
Por las razones dichas, no es pues de extrañar, que la forma de la catenaria fuera solo conocida experimentalmente y sus propiedades desconocidas, hasta que el gran desarrollo de las ciencias exactas en el siglo XVII viniera á dar solución á este problema. Aunque de seguro, muchos serían los que probarían de resolverlo, Galileo parece ser el primero que adelantó que la forma que tomaba un hilo suspendido era una parábola, pero sin demostrarlo; Joaquín Jungius en su *Geometría empyrica,* publicada en 1669, probó que no podía ser ni parábola ni hipérbola, pero sin llegar á encontrar qué clase de curva era. Jacobo Bernoulli, Leibnitz y Huygens encontraron la solución, que se publicó en las *Acta eruditorum* de Leipzig en 1691. David Gregory dió en las *Philosophical Transactions* de Londres en 1697 una solución, que J. Bernoulli calificó de paralogismo.

Resuelto el problema, perdió el estudio de esta curva el interés que había

despertado y solo lentamente se le fueron haciendo adiciones sobre todo en el sentido de determinar el valor de su parámetro en el caso de darse la longitud del hilo ó cadena y la posición relativa de sus extremos, punto de verdadera utilidad en las aplicaciones de esta curva. Poisson en su *Traité de Mecanique*, Moseley en sus *Mechanical Principles of Engineering and Architecture* y posteriormente Rankine en su *Applied Mechanics* han generalizado el estudio de esta cuestión que se trata actualmente, y en general con menos extensión, en todos los modernos tratados de Mecánica. Bajo el punto de vista, no de la investigación, sino de las aplicaciones en general y en particular á la Construcción, tal vez nadie la trata mejor que Rankine en su magistral y excelente *Manual of Civil Engineering*.

Es de notar lo poco que en estos últimos años se ha adelantado en el camino de facilitar el estudio de las aplicaciones de la catenaria cuando precisamente en ellos estas aplicaciones han sido más numerosas. En cables de transmisión, ferrocarriles funiculares, transportes aéreos, y sobre todo cables eléctricos, sin contar otras aplicaciones, hay invertidos en la actualidad centenares de millones de pesetas. Esto solo ya indica que, en el terreno económico, hasta cuestiones de detalle ó de ningún interés científico, pueden ser dignas de consideración y más lo son todavía las referentes á la resistencia á la ruptura, si se atiende á que las desgracias personales causadas por la ruptura de cables eléctricos, en una buena parte, son imputables á la ligereza con que generalmente se mira la cuestión de la resistencia de los mismos.

fig. 1



Estudiar esta cuestión, facilitar su aplicación á la colocación de cables en general, y al trazado de esta curva, es el objeto de este trabajo.

Si se considera el estado de equilibrio de un elemento de hilo *m n* ó *d.s* cuya

tensión en el punto m sea T, las proyecciones de ésta en la dirección vertical y horizontal de los ejes serán:

$T\frac{dy}{d.s}$ $T\frac{dx}{d.s}$ y como el peso de hilo mn, si es p el peso de la unidad de longitud, será $pd.s$; el estado de equilibrio exige pues que:

$$d.\left(T\frac{dy}{ds}\right) - pd.s = o \qquad d.\left(T\frac{dx}{d.s}\right) = o$$

que integrada esta última da:

$$T\frac{d.x}{d.s} = T_o \qquad \text{siendo } T_o \text{ la tensión horizontal,}$$

pues en el punto más bajo o', dx es igual á $d.s$. Sustituida en la anterior da

$$d.\frac{d.y}{d.x} = \frac{p}{T_o} d\ s$$

que es la forma bajo la que usualmente se integra sustituyendo $d.s$ por su valor.

Si bien este método refiere la solución del problema á las condiciones generales de equilibrio de fuerzas en un plano y actuándo sobre un punto, y tiene ventaja didáctica, no deja de ser notable por lo sencilla, la primitiva solución dada por Bernoulli que consiste en notar que un trozo cualquiera de hilo $o'm$, á partir del punto más bajo o' (que también podría ser otro cualquiera poniendo en vez de T_o la tensión correspondiente) está en equilibrio bajo la acción de su peso, T_o, y T, lo cual da en seguida;

$$ps = T_o \text{ tan. } \alpha = T_o \frac{dy}{d.x}$$

que diferenciada es igual á la anterior.

En una ó otra forma bajo la que se establezca la ecuación de equilibrio, resulta para la de la catenaria:

$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ en la que a vale $\frac{T_o}{p}$, de modo que la tensión T_o en el punto más bajo vale pa, ó sea el peso de una longitud de hilo igual á a.

Todos los problemas referentes al trazado de la catenaria y á sus aplicaciones, versan sobre el significado y determinación del parámetro a. Geométricamente se ve en seguida, haciendo x igual á cero, que a es la ordenada en el punto más bajo de la curva, propiedad que depende de la posición que se escoje, al integrar la ecuación diferencial de la curva, para el eje de abcisas. Mecánicamente, a es la tensión T_0 del hilo ó cadena en el punto más bajo para una cadena ó hilo de un peso, por unidad de longitud, igual también á la unidad. Es muy de notar, como ya se ha observado, que todas las catenarias no se diferencian más que en la magnitud, pero no en la forma, es pues una curva de forma única, como la circunferencia, cicloide, etc. Basta notar que otra catenaria cualquiera tendrá por ecuación:

$$y_1 = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x_1}{c}} + e^{-\frac{x_1}{c}}\right)$$ y si la relación de c á a es α ó sea $c = \alpha a$ se tendrá:

$$y_1 = \frac{\alpha a}{2}\left(e^{\frac{x_1}{\alpha a}} + e^{-\frac{x_1}{\alpha a}}\right)$$ y tomando y_1 x_1 á la misma escala de relación $y_1 = \alpha y$: $x_1 = \alpha x$ queda:

$$\alpha y = \frac{\alpha a}{2}\left(e^{\frac{\alpha x}{\alpha a}} + e^{-\frac{\alpha x}{\alpha a}}\right)$$ ó sea igual á la ecuación general

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

asi, pues, todas las catenarias son semejantes y el parámetro a representa en ellas un papel análogo al del radio en la circunferencia. Esta propiedad puede ser que haya sido ya observada, pero generalmente no se hace de ella mención y no obstante es de suma importancia por lo que facilita el trazado de esta curva.

A pesar de la forma trascendente de la ecuación de esta curva, sus propiedades tanto geométricas como mecánicas son relativamente láciles de determinar, los tratados de Geometría y los de Mecánica apenas citan algunas, algunos Manuales de Ingeniería ó de Mecánica aplicada como los de Rankine ó Formularios de Matemáticas como el de Láska traen varios resultados sin demostración, si bien parece que Gudermann, *Theorie der Potentialfunctionen*, publicada en Berlín en 1833 y Kulik, *Theorie und Tafeln der Kettenlinie*, publicada en Praga en 1832 trataron con desarrollo estas cuestiones, aunque ignoro hasta qué punto por no haberlas podido consultar.

Por lo que pueda tener de utilidad, dadas las muchas aplicaciones que la catenaria tiene, se expone esta cuestión.

La ecuación general de la curva:

$$y_1 = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x_1}{a}} + e^{-\frac{x_1}{a}}\right)$$ puede ponerse bajo la forma $$\frac{y_1}{a} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x_1}{a}} + e^{-\frac{x_1}{a}}\right)$$

y poniendo $\frac{y_1}{a} = y$; $\frac{x_1}{a} = x$

queda bajo la forma

$$(1) \qquad v = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

ó sea con el parámetro reducido á la unidad, que por la razón antes dicha es completamente general y ahorrará la repetición inútil de esta letra.

Atendiendo á que:

$$\frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \text{cos. h. } x \; ; \; \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = \text{sen. h. } x \; ; \; \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \text{tan. h. } x$$

puede ponerse también, bajo la forma de funciones hiperbólicas:

$$(1') \qquad y = \text{cos. h. } x$$

y abreviar así la notación y facilitar las transformaciones en todos los cálculos siguientes.

Bajo el supuesto dicho de tomar de aquí en adelante el valor del parámetro a igual á la unidad, y haciendo en todo referencia á la fig. II (que está trazada á escala) se obtiene:

$$(2) \qquad \frac{d.y}{d.x} = \text{tan. } \alpha = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) = \text{sen. h. } x$$

$$\frac{d^2.y}{d.x^2} = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) = y = \text{cos. h. } x$$

La longitud de un arco de catenaria á contar desde el punto más bajo de ésta, hasta un punto de abcisa x, se deduce de:

$$d.s = d.x \sqrt{1 + \left(\frac{d.y}{d.x}\right)^2} = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) d.x = y\, d.x = \text{cos. h. } x.d.x$$

que integrada da:

$$(3) \qquad s = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) = \text{sen. h. } x$$

Atendiendo á que:

$$\text{sen. } \alpha = \frac{\text{tan. } \alpha}{\sqrt{1 + \text{tan}^2. \alpha}} \quad ; \quad \text{cos. } \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tan}^2. \alpha}}$$

resulta también:

$$(4)\ \text{sen. } \alpha = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \frac{s}{y} = \text{tan. h. } x\ ;\ (5)\ \text{cos. } \alpha = \frac{2}{e^{x} + e^{-x}} = \frac{1}{y} = \frac{1}{\text{cos. h. } x} = \text{sec. h. } x$$

De la ecuación (1) y de la (3) elevadas al cuadrado y restadas la segunda de la primera resulta la notable propiedad:

$$(6) \quad y^2 - s^2 = 1 \ :\ \text{cos. h.}^2\, x - \text{sen. h.}^2\, x = 1$$

De sumar las ecuaciones (1) y (3) resulta:

$$y + s = e^{x} \qquad \text{ó sea} \qquad e^{x} = \text{cos. h. } x + \text{sen. h. } x$$

de la que se deduce,

$$(7) \quad x = l._{n}\,(y + s) = l._{n}\,(\text{cos. h. } x + \text{sen h. } x)$$

La longitud de la tangente np es:

$$(8)\quad np = \frac{pq}{\text{sen. } \alpha} = y\,\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}{2\left(e^x - e^{-x}\right)} = \frac{y^2}{s} = \frac{\text{cos. h}^2.\ x}{\text{sen. h. } x}$$

La de la normal es:

$$(9)\quad pk = \frac{pq}{\text{cos. } \alpha} = y\,\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{4}\left(e^x + e^{-x}\right)^2 = y^2 = \text{cos. h}^2.\ x$$

La de la subtangente es:

$$(10)\quad nq = \frac{pq}{\text{tan. } \alpha} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{y}{s} = \frac{\text{cos. h. } x}{\text{sen. h. } x} = \text{cot. h. } x$$

La de la subnormal es:

$$(11)\quad qk = pq \text{ tan. } \alpha = \frac{1}{4}\left(e^x + e^{-x}\right)\left(e^x - e^{-x}\right) = \frac{1}{4}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right) = ys$$

$$= \text{cos. h. } x \text{ sen. h. } x = \frac{\text{sen. h. } 2x}{2}$$

Sustituyendo en la fórmula general que da el rádio de curvatura los valores de $\frac{d.y}{d.x}$ $\frac{d^2y}{d.x^2}$ dados por las fórmulas (2) se halla:

$$(13)\quad \rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{d.y}{d.x}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2.y}{d.x^2}} = \frac{1}{4}\left(e^x + e^{-x}\right)^2 = y^2 = \text{cos. h}^2.\ x$$

luego el rádio de curvatura es igual á la longitud de la normal (9) y también al cuadrado de la ordenada, propiedad sencilla y notable.

De aquí, que las coordenadas del centro de curvatura c se encuentren fácilmente y, por ser $pk=cp$ y $qd=qk$, son:

$$(14)\quad x_c = od = oq - qd = x - ys = x - \text{cos. h. } x \text{ sen. h. } x = x - \frac{1}{2}\text{sen. h. } 2x$$

$$(15)\quad y_c = cd = 2y = 2 \text{ cos. h. } x$$

La ecuación de la evoluta, dadas las formas trascendentes usuales bajo las que se expresan s é y no resulta fácil de hallar, pero lo es bajo la forma de funciones hiperbólicas, pues de las ecuaciones anteriores y de la relación:

$$\text{cos. h.}^2 x - \text{sen. h.}^2 x = 1$$

se deduce:

$$\text{cos. h. } x = \frac{y_c}{2} \quad ; \quad x = \text{arc. cos. h.} \frac{y_c}{2} \quad ; \quad \text{sen. h. } x = \frac{1}{2}\sqrt{y_c^2 - 4}$$

que por sustitución en el valor de x_c dan:

$$(16)\quad x_c = \text{arc. cos. h} \frac{y_c}{2} - \frac{y_c}{4}\sqrt{y_c^2 - 4}$$

para la ecuación de la evoluta de la catenaria, si bien hay que notar que á pesar de su aparente sencillez, los cálculos para su aplicación son tan complicados como los de las ecuaciones primitivas, á menos de disponer de tablas de funciones hiperbólicas inversas. Esta evoluta fg es simétrica con respecto al eje de ordenadas y presenta en f un punto de retroceso. La determinación de las coordenadas x, y, del punto g, intersección de la catenaria con su evoluta, que dependen de una difícil eliminación por los procedimientos usuales, puede hacerse con relativa facilidad igualando las abcisas dadas por las ecuaciones (1') (16):

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \text{arc. cos. h. } y_1 \\ x_1 &= \text{arc. cos. h.} \frac{y_1}{2} - \frac{y_1}{4}\sqrt{y_1^2 - 4} \end{aligned}\right\} \text{arc. cos. h. } y_1 - \text{arc. cos. h.} \frac{y_1}{2} + \frac{y_1}{4}\sqrt{y_1^2 - 4} = 0$$

que dan:

$$(17)\quad x_1 = 2.04846 \qquad ; \qquad (18)\quad y_1 = 3.94247$$

La ecuación de la evolvente de la catenaria puede hallarse también con facilidad por medio de las funciones dichas. Representando por $x_e\ y_e$ las coordenadas de esta curva:

$$x_e = or = oq - rq = x - s\ \text{cos.}\ \alpha = x - \frac{s}{y} = x - \frac{\text{sen. h. } x}{\text{cos. h. } x}$$

$$y_e = rt = pq - pl = y - s\ \text{sen.}\ \alpha = y - \frac{s^2}{y} = \text{cos. h. } x - \frac{\text{sen. h.}^2\ x}{\text{cos. h. } x} = \frac{1}{\text{cos h. } x}$$

de aquí se deduce:

$$\text{cos. h. } x = \frac{1}{y_e} \quad ; \quad \text{sen. h. } x = \frac{1}{y_e}\sqrt{1-y_e^2}$$

y atendiendo á que la ecuación (7) toma la forma,

$$x = l._n\ (\text{cos. h. } x + \text{sen. h. } x) = l._n\left(\frac{1}{y_e} + \frac{1}{y_e}\sqrt{1-y_e^2}\right)$$

queda para la ecuación de la evolvente buscada:

$$(19)\quad x_e = l._n\left(\frac{1+\sqrt{1-y_e^2}}{y_e}\right) - \sqrt{1-y_e^2}$$

esta curva presenta dos ramas con un punto de retroceso en m y ambas tienen por asimtota el eje de abcisas. Además, la longitud de su tangente tq vale

$$tq = \frac{rt}{\text{cos. } \alpha} = \frac{y - s\ \text{sen. } \alpha}{\text{cos. } \alpha}$$

y sustituyendo por sen. α y cos. α sus valores y atendiendo á la ecuación (6) resulta

$$tq = y^2 - s^2 = 1$$

luego esta tangente es de longitud constante, en general igual al parámetro de la catenaria y bajo la hipótesis adoptada de tomar el parámetro igual á la unidad, este es el valor de dicha longitud de tangente. Esta evolvente tiene, pues, esta propiedad, que es la de las curvas que los tratados ingleses de Geometría llaman tractrices. Además, si se considera el punto q como pié de la ordenada y se traza la qt perpendicular á la tangente se tiene:

$$tp = pq \text{ sen. } \alpha = y\frac{s}{y} = s$$

luego el punto t pertenece á la evolvente (prescindiendo de que ésta, estuviera trazada) y por la ecuación (6) tq como se ha dicho antes, es igual al parámetro.

De aquí una construcción geométrica muy sencilla para trazar una tangente á un punto de la catenaria cuyo parámetro es conocido; por el pié q de la ordenada se traza un arco de circunferencia con un rádio igual al parámetro, y por el punto p de la catenaria trazando una tangente pt al arco anterior se tiene la tangente buscada. Además el punto de tangencia t es un punto de la evolvente y por la propiedad dicha de la igualdad de la normal pk con el rádio de curvatura se halla éste graficamente también.

La superficie comprendida entre el eje de abcisas, el de ordenadas, la curva y la ordenada correspondiente á una abcisa x vale:

$$(20) \quad A = \int_o^x y\,dx = \frac{1}{2}\int_o^x (e^x + e^{-x})\,dx = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = s = \text{sen. h. } x$$

No se equivocó de mucho Galileo al atribuir á la catenaria la forma de una parábola, pues en las inmediaciones del punto más bajo y en general para todos los valores de x menores que el parámetro a, la diferencia no es muy grande. En efecto, tomando la ecuación de la parábola $y^2 = px$ é invirtiendo los ejes, tomando el diámetro que pasa por el vértice por eje de ordenadas, el origen á una distancia a de dicho vértice, y además haciendo $p = \frac{1}{2a}$, la ecuación de la parábola que tendria los mismos ejes que una catenaria y pasaría por su mismo vértice tomaría la forma:

$$(21) \qquad y = a + \frac{x^2}{2a} = a\left(1 + \frac{x^2}{2a^2}\right)$$

y es la línea trazada de puntos en la fig. II.

El ángulo de su tangente en un punto cualquiera con el eje de abcisas sería:

$$(22) \qquad \frac{d.y}{d.x} = \frac{x}{a}$$

La superficie comprendida entre el eje de ordenadas, el de abcisas, la curva y la ordenada de un punto sería:

$$(23) \quad A = \int_o^x y\,d.x = \int_o^x \left(a + \frac{x^2}{2a}\right) dx = ax + \frac{x^3}{2.3\,a} = ax\left(1 + \frac{x^2}{2.3\,a^2}\right)$$

La longitud del arco comprendido desde el punto más bajo á otro de abcisa x:

$$s = \int_o^x dx \sqrt{1 + \left(\frac{d.y}{d.x}\right)^2} = \int_o^x d.x \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$ que desarrollando en serie por el binomio da:

$$(24) \qquad s = \int_o^x dx.\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{8}\frac{x^4}{a^4} + \frac{1}{16}\frac{x^6}{a^6} - \cdots\right)$$

$$= x\left(1 + \frac{x^2}{6a^2} - \frac{x^4}{40a^4} + \frac{x^6}{112a^6} - \cdots\right)$$

Los desarrollos en serie de

$$e^{\frac{x}{a}} = 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2\,a^2} + \frac{x^3}{3!\,a^3} + \frac{x^4}{4!\,a^4} + \frac{x^5}{5!\,a^5} + \frac{x^6}{6!\,a^6} + \cdots$$

$$e^{-\frac{x}{a}} = 1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2\,a^2} - \frac{x^3}{3!\,a^3} + \frac{x^4}{4!\,a^4} - \frac{x^5}{5!\,a^5} + \frac{x^6}{6!\,a^6} - \cdots$$

dan para la catenaria:

$$(25) \quad y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\left(1 + \frac{x^2}{2\,a^2} + \frac{x^4}{4!\,a^4} + \frac{x^6}{6!\,a^6} + \cdots\right)$$

para el ángulo de la tangente con el eje de abcisas:

$$(26)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{x}{a}\left(1 + \frac{x^2}{3!a^2} + \frac{x^4}{5!a^4} + \frac{x^6}{7!a^6} + \cdots\right)$$

para la superficie en la forma indicada:

$$(27)\quad A = \int_o^x y\,dx = \int_o^x a\left(1 + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^4}{4!a^4} + \frac{x^6}{6!a^6} + \cdots\right)dx$$

$$= ax\left(1 + \frac{x^2}{3!a^2} + \frac{x^4}{5!a^4} + \frac{x^6}{7!a^6} + \cdots\right)$$

y para el arco:

$$(28)\quad s = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = x\left(1 + \frac{x^2}{6a^2} + \frac{x^4}{120a^4} + \frac{x^6}{5040a^6} + \cdots\right)$$

que como se ve, comparados con los valores respectivos hallados antes para la parábola, para valores de $\frac{x}{a}$ menores que la unidad, difieren poco los unos de los otros, por lo que, en algunas aplicaciones que no necesiten gran aproximación se puede considerar la cateneria como una parábola. Las ecuaciones anteriores dan la medida del error que se comete con esta asimilación.

Para el estudio de las propiedades de la catenaria la magnitud del parámetro tiene poco interés, mas no sucede lo mismo en las aplicaciones, sobre todo las que se refieren á la colocación de cables y al estudio de su resistencia. Esta cuestión versa siempre sobre la determinación del parámetro dicho, la que resulta complicada, por la forma trascendente de las ecuaciones en que entra.

En la mayoría de casos de la práctica el problema se presenta bajo la forma siguiente. Dada la longitud de la cuerda, cable ó cadena y la posición de sus extremos, determinar la forma de la misma. Este problema se resuelve generalmente del modo siguiente:

Sean: $x'\ y'$ las coordenadas del punto más alto (supuesto x' positiva)
$x''\ y''$ » » » bajo.
$d = x' - x''$ la distancia horizontal, conocida entre los mismos.
$h = y' - y''$ » « vertical » » »
l » longitud de cuerda ó cable que se suspende.

Si en las ecuaciones (1) y (3) se restablece $\frac{y}{a}\ \frac{x}{a}\ \frac{s}{a}$ en vez de $y\ x\ s$, siendo a el parámetro de la catenaria que se busca, se tendrá:

$$l = s' - s'' = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x'}{a}} - e^{-\frac{x'}{a}} - e^{\frac{x''}{a}} + e^{-\frac{x''}{a}}\right)$$

$$h = y' - y'' = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x'}{a}} + e^{-\frac{x'}{a}} - e^{\frac{x''}{a}} - e^{-\frac{x''}{a}}\right)$$

que elevadas al cuadrado, restadas y reduciendo dan:

$$(29)\quad l^2 - h^2 = a^2\left(e^{\frac{d}{2a}} - e^{-\frac{d}{2a}}\right)^2$$

de donde por aproximaciones succesivas se puede determinar a.

Además dividiendo la suma de l y h por su diferencia se halla:

$$\frac{l+h}{l-h} = \frac{e^{\frac{x'}{a}} - e^{\frac{x''}{a}}}{e^{-\frac{x''}{a}} - e^{-\frac{x'}{a}}} = e^{\frac{x'+x''}{a}}$$

de donde se deduce:

$$(30)\quad x' + x'' = a l.n \frac{l+h}{l-h}$$

y como

$$x' - x'' = d$$

se hallan fácimente x' y x'' que resuelven el problema.

En muchas aplicaciones puede hallarse el valor a con bastante rapidez por desarrollo en série del modo siguiente:

$$\sqrt{l^2-h^2} = a\left(1 + \frac{d}{2a} + \frac{1}{2}\frac{d^2}{4a^2} + \frac{1}{3!}\frac{d^3}{8a^3} + \cdots \quad -1 + \frac{d}{2a} - \frac{1}{2}\frac{d^2}{4a^2} + \frac{1}{3!}\frac{d^3}{8a^3} - \cdots\right)$$

que se reduce á:

$$\sqrt{l^2 - h^2} = d\left(1 + \frac{1}{24}\frac{d^2}{a^2} + \cdots\right)$$

que despreciando los términos siguientes de la série, de los que el inmediato vale solo $\frac{1}{1920}\frac{d^4}{a^4}$, resulta:

$$(31)\quad a = \frac{1}{\sqrt{24}}\sqrt{\frac{d^3}{\sqrt{l^2-h^2}-d}} = 0.2041\sqrt{\frac{d^3}{\sqrt{l^2-h^2}-d}}$$

que por medio de unas tablas usuales de cuadrados y cubos se puede hallar con suma rapidez. Este valor así hallado, dado el pequeño valor del primer término despreciado de la série, para valores de $\frac{d}{a}$ inferiores á la unidad, será ya muy exacto. Así mismo el valor de $x' + x''$ vendrá dado por

$$(32)\quad x' + x'' = 2.3026\, a \log. \frac{l+h}{l-h}$$

que juntamente con $x' - x'' = d$ permite hallar x' y x'' por medio de unas tablas de logaritmos usuales.

En el caso, bastante frecuente, de una catenaria de cuerda horizontal, en la que $h = o$, las fórmulas anteriores se reducen á:

$$(33)\quad a = 0.2041\, d\sqrt{\frac{d}{l-d}}\quad ;\quad x' = -x'' = \frac{d}{2}$$

En este caso, es también bastante importante el trazado de la catenaria y determinación de su parámetro cuando se conoce solo la cuerda horizontal y la flecha, como sucede en el caso de cables de transporte ó eléctricos.

Para esto, conviene referir la ecuación general á un eje de abcisas que pase por el vértice, con lo que la ordenada es igual á la flecha que se denominará f y resulta:

$$y = f = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{d}{2a}} + e^{-\frac{d}{2a}} - 2\right)$$

por ser la ordenada aquí, igual á la ordenada de la ecuación general menos a, y la abcisa x, igual á la mitad de la cuerda d. Desarrollando el valor de f en série y reduciendo queda:

$$f = \frac{a}{2}\left[\left(\frac{d}{2a}\right)^2 + \frac{1}{3.4}\left(\frac{d}{2a}\right)^4 + \frac{1}{3.4.5.6}\left(\frac{d}{2a}\right)^6 + \cdots\right]$$

que puede ponerse bajo la forma:

$$f = d\left(\frac{1}{8}\frac{d}{a} + \frac{1}{384}\left(\frac{d}{a}\right)^3 + \frac{1}{23040}\left(\frac{d}{a}\right)^5 + \cdots\right)$$

que siempre que $\frac{d}{a}$ sea algo menor que la unidad, con gran aproximación se puede tomar:

$$(34) \quad f = \frac{1}{8}\frac{d^2}{a} \text{ que da para } a;\ a = \frac{1}{8}\frac{d^2}{f}$$

así mismo dada la cuerda y la flecha, se puede hallar con gran aproximación la longitud l observando que:

$$\frac{l}{2} = s = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{d}{2a}} - e^{-\frac{d}{2a}}\right) \text{ desarrollada en série da:}$$

$$l = 2a\left[\frac{d}{2a} + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{d}{2a}\right)^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}\left(\frac{d}{2a}\right)^5 + \cdots\right]$$

que poniendo en vez de a su valor hallado anteriormente da para la diferencia entre la longitud del arco y la cuerda:

$$l - d = \frac{d}{6}\left[\left(\frac{4f}{d}\right)^2 + \frac{1}{20}\left(\frac{4f}{d}\right)^4 + \cdots\right]$$

y como en estos casos antes referidos, la relación de la flecha á la cuerda es tal que $\frac{4f}{d}$ es muy inferior á la unidad, resulta muy exacto tomar solo el primer término de la série que da:

$$(35) \quad l - d = \frac{8}{3}\frac{f^2}{d}$$

fórmulas todas ellas muy sencillas si se comparan con las generales, largas de calcular por su forma trascendente. Es verdad que si se poseen tablas de funciones hiperbólicas, el cálculo se reduce grandemente, pero aparte de que estas ta-

blas son poco usadas, si se quiere exactitud hay que recurrir á tablas algo completas como las de Ligowski, Gudermann ú otras análogas, pues las pequeñas resultan poco exactas para estas aplicaciones.

En todas las aplicaciones al trazado de cables inclinados y planos referentes á su instalación, como los ejes caen muchas veces fuera del papel, es preferible referir la curva á ejes que pasen por el punto inferior de la misma cosa que resulta fácil, poniendo en las ecuaciones generales en vez de $y\ x$, $y + y''$, $x + x''$ siendo $y''\ x''$ las coordenadas de dicho extremo inferior. Sería preferible poder tomar como ejes coordenados la cuerda y una perpendicular á la misma, mas las fórmulas generales resultan demasiado complicadas y largas de calcular.

Propiedades y aplicaciones Mecánicas.

Es la catenaria una curva esencialmente mecánica y de esta esencia derivan todas sus propiedades geométricas y siendo tantos los cuerpos y las construcciones en que la única fuerza que sobre ellas actúa es la de la gravedad, de aquí que se preste á muchas aplicaciones. Es verdad que su forma exige que el cuerpo sea absolutamente flexible, cosa que en la realidad nunca sucede, pero son muchos los casos de equilibrio de cuerpos que se aproyiman á este estado ó que, á lo menos, la asimilación á él, contribuye á formarse un concepto aproximado de sus condiciones de equilibrio.

Si un hilo se suspende por sus extremos en dos puntos cualesquiera, la línea que forma es, entre todas las que pueda formar, la que tiene el centro de gravedad más bajo. Este principio es tan esencial como el del estado de equilibrio, que generalmente se toma como punto de partida, los dos son inseparables, enunciar el uno es indirectamente enunciar el otro y ambos parece que son formas particulares de un enunciado más general que parece ser: determinar el estado de un hilo absolutamente flexible sujeto por sus extremos y sometido á la acción de la gravedad, sin que ésta pueda modificar dicho estado. Dados los conceptos de centro de gravedad y de estado de equilibrio, se desprende: 1.° que si la gravedad modificara el hilo, sería moviendo en su dirección al centro de gravedad, por razón de efecto ó causa, de modo que si por hipótesis no lo puede modificar, no lo podrá bajar. El teorema de d' Alambert sobre el movimiento del centro de gravedad de un sistema material y el teorema del trabajo virtual aplicados á este caso, son formas análogas de la misma proposición. 2.° Que si la gravedad no puede hacer bajar el centro de gravedad del hilo, como causa, no producirá efecto, y como se supone que el hilo no está sometido á ninguna otra causa modificadora, ó fuerza, el hilo permanecerá siempre en el mismo estado, al que llamamos forma de equilibrio. Son, pues, dos enunciados de un mismo principio; el usaal, ó como forma de equilibrio, es más sensible, el que parte del centro de gravedad, más ideal.

La posición del centro de gravedad pocos autores la tratan, Moseley en la obra citada, la determina para el caso particular de una catenaria cuya cuerda es horizontal. En general y para un arco cualquiera de ella, cuyas abcisas sean x'' x' sus coordenadas valdrán:

$$x_g = \frac{\int_{x''}^{x'} x\,d.s}{s' - s''} \qquad y_g = \frac{\int_{y''}^{y'} y\,d.s}{s' - s''}$$

ó sea poniendo en vez de y y de $d.s$ sus valores, en el supuesto de tomar el parámetro igual á la unidad:

$$x_g = \frac{\frac{1}{2}\int_{x''}^{x'} x\,(e^x + e^{-x})\,d.x}{s' - s''} \qquad y_g = \frac{\frac{a}{4}\int_{y''}^{y'} (e^x + e^{-x})^2\,d.x}{s' - s''}$$

ecuaciones que integradas por los métodos usuales dan los valores de las coordenadas que se buscan, pero para que sirva de muestra de la facilidad con que estos problemas referentes á la catenaria se resuelven por las funciones hiperbólicas, se integran aquí poniéndolas bajo esta forma, con lo que se reducen á:

$$x_g = \frac{\int_{x''}^{x'} x \cos.\,h.\,x\,d.x}{s' - s''} \qquad y_g = \frac{\int_{x''}^{x'} \cos.\,h^2.\,x\,d.x}{s' - s''}$$

que integrando por partes dan fácilmente:

$$\int x \cos.\,h.\,x\,d.x = x\,\text{sen.}\,h.\,x - \int \text{sen.}\,h.\,x\,dx = x\,\text{sen}\,h.\,x - \cos.\,h.\,x = xs - y$$

$$\int \cos.\,h^2.\,x\,dx = \text{sen.}\,h x \cos.\,h.\,x - \int \text{sen.}\,h^2 x\,d.x$$

y recordando que: $\cos\,h^2.x - \text{sen.}\,h^2.x = 1$ resulta:

$$\int \text{sen.}\,h^2 x\,dx = \int (\cos.\,h^2\,x - 1)\,dx = \int \cos.\,h^2\,x - x$$

que sustituída á la anterior da en seguida:

$$2\int \cos.\mathrm{h}^2 x\, \mathrm{d}.x = \mathrm{sen.\,h}\, x \cos.\mathrm{h}\, x + x = sy + x$$

lo que da para las coordenadas buscadas:

$$(36)\quad x_g = \frac{x's' - x''s'' - y' + y''}{s' - s''} \qquad (37)\quad y_g = \frac{s'x' - s''y'' + x' - x''}{2\,(s' - s'')}$$

que para el caso de una catenaria cuya cuerda sea horizontal, por ser $x'' = -x'$ $= \frac{d}{2}$, $s'' = -s'$ y también $y'' = y'$, siendo d la cuerda y poniendo $2s' = s$ resultarán:

$$x_g = o \quad ; \quad (38)\quad y_g = \frac{2s'y' + 2x'}{2(s' + s')} = \frac{y'}{2} + \frac{d}{2s}$$

llamando f á la flecha de la curva, que vale $y' - 1$ por haber tomado el parámetro igual á la unidad, y restando ésta de ambos miembros, el primero es la distancia del centro de gravedad al vértice y vale:

$$(39)\qquad \frac{f - 1}{2} + \frac{d}{2s}$$

En toda catenaria las tensiones del hilo en sus extremos, y en general en dos puntos cualesquiera, concurren en un punto de la vertical que pasa por el centro de gravedad del hilo comprendido entre dichos puntos. Cosa evidente desde el momento en que se supone el hilo en equilibrio bajo la acción de su peso y la de dichas tensiones, que en el caso de considerar los puntos extremos son las reacciones de los apoyos.

Como se ha indicado, fué esta la propiedad de que partieron los primeros geómetras que determinaron la forma de la catenaria refiriendo una de dichas tensiones, al punto más bajo de la línea.

De aquí, se puede deducir fácilmente la tensión del hilo en un punto cualquiera, pues tomando un trozo de hilo desde el punto más bajo en el que la tensión T_o se ha visto al principio que valía $p\,a$, hasta otro punto cualquiera en el que la

tensión es T, el triángulo rectángulo formado por las tres fuerzas en equilibrio T_0, ps, T (fig. I) da:

$$(40) \qquad T = \sqrt{(pa)^2 + (ps)^2} = p\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}$$

$$= p\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = py$$

propiedad notable y sencilla, la de que la tensión en un punto cualquiera sea igual á la de un peso de hilo de longitud igual á la ordenada correspondiente á dicho punto.

De la ecuación (20) resulta, que el área comprendida entre los ejes coordenados, una ordenada cualquiera, y el arco correspondiente, es proporcional á este arco y, en general, igual á este arco multiplicado por el parámetro, de donde resulta, que si en cada punto de la catenaria hubiera suspendido un peso proporcional al producto $y.d.x$ ó sea á un elemento vertical de área, por ser éste proporcional á $d.s$ sería como si este elemento pesara más por unidad de longitud y como la forma de equilibrio se ha visto al principio que no depende para nada de este coeficiente, resulta que la catenaria es la forma de equilibrio para una cuerda ó hilo así cargado. La ecuación (40) da la tensión en un punto cualquiera poniendo por valor de p, no solo el peso de la unidad de cuerda, sino además otro igual al peso cargado en la forma antes dicha sobre la misma unidad. Sería este caso, para darle una forma visible, aquel en que á lo largo de la cuerda se suspendieran otras cuerdas, de cualquier peso por unidad de longitud, si bien constante, cuyos extremos llegaran al eje de abcisas y que tuvieran un diámetro $d.x$.

Si la catenaria, sea en la forma usual, sea en la que se acaba de describir, se proyecta rectangular ú oblicuamente sobre un plano oblicuo al suyo, la proyección de todas las fuerzas que actúan en el plano primitivo forma en el proyectado un sistema de fuerzas en equilibrio también, formando la proyección una curva de la misma naturaleza que la primitiva. Esto se desprende, de que, siendo todas las abcisas rectas paralelas y las ordenadas también, las proyecciones de las unas y de las otras guardarán con las primitivas unas mismas relaciones, de modo que si se llama α la relación de una ordenada con su proyección y β la de una abcisa con la suya respectiva se tendrá, representando por x_1 y_1 las coordenadas de la curva proyectada:

$$y = \alpha y_1 \quad ; \quad x = \beta x_1$$

que sustituídas en la ecuación general de la catenaria darán:

$$\alpha y_1 = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{\delta x_1}{a}} + e^{-\frac{\delta x_1}{a}}\right)$$

y representando $\frac{a}{\delta}$ por c, la ecuación de la curva proyectada es:

$$y_1 = \frac{\delta}{\alpha}\,\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x_1}{c}} + e^{-\frac{x_1}{c}}\right)$$

es decir una curva cuyas ordenadas son iguales á las de una catenaria de parámetro c multiplicadas por la relación $\frac{\delta}{\alpha}$, que en el caso de ser $\delta = \alpha$, sería sencillamente una nueva catenaria de parámetro c.

En el caso en que la intersección de los dos planos fuera paralela al eje de abcisas, éstas se proyectarían en verdadera magnitud, δ c sería igual á la unida, y la ecuación de la curva proyectada sería:

$$y_1 = \frac{1}{\alpha}\,\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

es decir que solo las ordenadas de la curva proyectante vendrían modificadas por el factor $\frac{1}{\alpha}$. Así mismo, todas las fuerzas paralelas al eje de abcisas no serán modificadas en la proyección, mientras que las paralelas al eje de ordenadas en la proyección serán las primitivas multiplicadas por el mismo factor $\frac{1}{\alpha}$

Si una catenaria sea usual, sea en la forma de curva cargada que antes se ha descrito, se considera invertida colocando arriba el eje de abcisas y la curva abriéndose hacia abajo, es decir, tomando hacia abajo los valores de las ordenadas, el hilo en vez de estar tenso estará comprimido, pero sin que varien en nada sus condiciones de equilibrio, lo único que habrá será que estará, por razón de su absoluta flexibilidad, en estado de equilibrio inestable. De aquí que la ca-

tenaria sea la forma de equilibrio de un arco sometido á la acción de su propio peso ó, por las razones dichas antes, á la de una carga vertical sobre cada elemento de arco proporcional á éste ó, lo que es lo mismo, á la superficie comprendida entre él, sus ordenadas, y el eje de abcisas.

Igual consideración puede hacerse respecto á las curvas obtenidas transformando las catenarias por proyección sobre un plano oblicuo al suyo.

Así, pues, la catenaria es la forma de equilibrio que permite construir un arco con el mínimum de espesor de sus dovelas y también la forma de equilibrio de un arco sometido á cargas solo verticales (sin que produzcan ningún empuje horizontal), cuya intensidad fuera proporcional al arco ó á la superficie comprendida entre éste y el eje de abcisas colocado ahora en la parte superior. Así mismo la catenaria transformada por proyección, es la forma de equilibrio de un arco sometido á un sistema de fuerzas paralelas de intensidad proporcional á la superficie comprendida entre el arco, la proyección del eje de abcisas y la de las dos ordenadas extremas del arco. Estos casos son sensiblemente iguales á los de los muros de sillería descansando sobre arcos cuyas dovelas reciban la carga verticalmente sin empujes laterales.

Un problema de utilidad, se presenta en la determinación de los esfuerzos sobre una cuerda ó cable sujeto por sus extremos y sometido á una fuerza en un punto intermedio y que obra en un plano vertical. Se presenta esta cuestión en los transportes aéreos por cable fijo.

Las condiciones de equilibrio pueden establecerse observando que la primitiva cuerda formará ahora dos catenarias, una desde uno de los puntos extremos al punto de aplicación de la fuerza y otra desde éste al otro punto extremo, en la misma forma que si el punto de aplicación de la fuerza fuera un punto fijo de la cuerda.

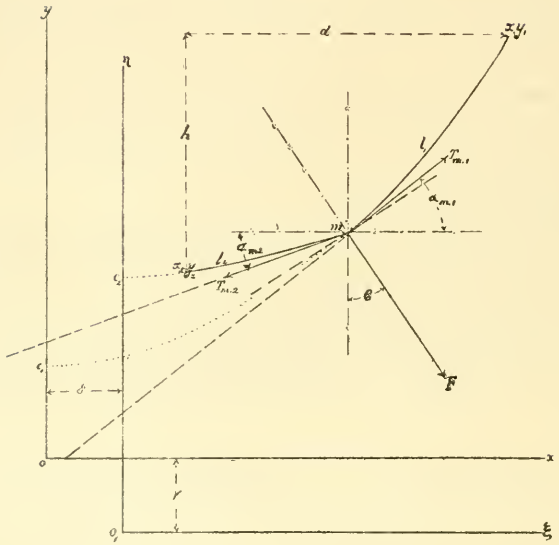
Sea m este punto fig. III y F la fuerza que actúa sobre él formando con la vertical el ángulo δ. Sean $(x_1\ y_1)$ y $(x_2\ y_2)$ los puntos fijos ó extremos de la cuerda cuyo desnivel sea h y d su distancia horizontal y represéntese por l_1 la longitud de cuerda $m\ (x_1\ y_1)$ y por l_2 la longitud $m\ (x_2\ y_2)$. El primer trozo de cuerda formará una catenaria cuyos ejes serán $o\ x$, $o\ y$, y llámese a á su parametro; igualmente el segundo trozo formará otra cuyos ejes serán $o_1\xi$ $o_1\eta$ y se representarán por γ y δ sus distanciay á los ejes $o\ x$, $o\ y$, siendo paralelos unos á otros, el parámetro de esta segunda catenaria se representará por a_2. Además sean $\alpha_{m.1}$ y $\alpha_{m.2}$ los ángulos que las tangentes á cada una de las dos catenarias que concurren en el punto m forman con los ejes de abcisas y $s_m\ \sigma_m$ las longitudes de catenaria $c_1\ m$, $c_2\ m$ contadas desde el punto m á los respectivos ejes de ordenadas.

El punto m se halla en equilibrio bajo la acción de las tres fuerzas F, $T_{m.1}$ tensión de la cuerda superior dirigida en la dirección de la tangente á la catenaria superior, en el punto m, y $T_{m.2}$ tensión de la cuerda inferior en las análogas condiciones. Proyectando estas fuerzas en la dirección de F y en otra perpendicular á ella resultan como condiciones de equilibrio:

$$T_{m.1} \text{ sen. } (\alpha_{m.1} - \theta) + T_{m.2} \text{ sen } (\theta - \alpha_{m.2}) = F$$

$$T_{m.1} \cos. (\alpha_{m.1} - \theta) - T_{m.2} \cos. (\theta - \alpha_{m.2}) = 0$$

fig. III



en las que, según la ecuación (40) $T_{m.1} = py_m$: $T_{m.2} = p\eta_m$ y según las (4), (5) introduciendo en ellas los parámetros a_1 a_2:

$$\text{sen. } \alpha_{m.1} = \frac{s_m}{y_m} \text{ : } \cos. \alpha_{m.1} = \frac{a_1}{y_m} \text{ : sen. } \alpha_{m.2} = \frac{\sigma_m}{\eta_m} \text{ : } \cos. \alpha_{m.2} = \frac{a_2}{\eta_m}$$

que sustituídas en las ecuaciones de equilibrio anteriores, desarrollando y reduciendo dan:

$$\text{(a)} \quad s_m \cos.\,\beta - a_1 \text{ sen. } \beta + a_2 \text{ sen. } \beta - \sigma_m \cos.\,\beta = \frac{F}{p}$$

$$\text{(b)} \quad a_1 \cos.\,\beta + s_m \text{ sen. } \beta - a_2 \cos.\,\beta - \sigma_m \text{ sen. } \beta = o$$

Para completar las condiciones del problema, además de las dos condiciones expresadas por las anteriores ecuaciones falta establecer que el punto m pertenece indistintamente á cada una de las dos catenarias y que de éstas, la una ha de pasar por el punto $(x_1\, y_1)$ y la otra por el $(x_2\, y_2)$, á un desnivel h y distancia horizontal d.

Las relaciones de unas coordenadas con las otras vienen dadas por las ecuaciones:

$$\eta = y - \gamma \quad : \quad \xi = x - \delta$$

siendo negativo el valor de γ en la figura.

La ecuación (6) aplicada al caso presente dá las siguientes ecuaciones:

$$y_1 = \sqrt{a_1^2 + (s_m + l_1)^2} : y_m = \sqrt{a_1^2 + s^2_m} :$$

$$\eta_2 = y_2 - \gamma = \sqrt{a_2^2 + (\sigma_m - l_2)^2} \; : \; \eta_m = y_m - \gamma = \sqrt{a_2^2 + \sigma^2_m}$$

y el pertenecer el punto m á ambas catenarias exige que:

$$y_m = \eta_m + \gamma \quad \text{ó sea que} : \sqrt{a_1^2 + (s_m + l_1)^2} = \gamma + \sqrt{a_2^2 + \sigma^2_m}$$

$$x_m = \xi + \delta \qquad \text{»} \quad \text{»} \; : a_1\, l._n \frac{\sqrt{a_1^2 + s^2_m} + s_m}{a_1} = a_2\, l._n \frac{\sqrt{a_2^2 + \sigma^2_m} + \sigma_m}{a_2} + \delta$$

(poniendo en esta última, por x. sus valores dados por la ecuación (7) y las anteriores).

La posición de los puntos extremos $(x_1\, y_1)$ $(x_2\, y_2)$ establece:

$$y_1 - y_2 = h \quad : \quad x_1 - x_2 = d$$

ó sea:

$$\sqrt{a_1^2+(s_m+l_1)^2}-\gamma-\sqrt{a_2^2+(\sigma_m-l_2)^2}=h\ :$$

$$a_1\, l.n\,\frac{\sqrt{a_1^2+(s_m+l_1)^2}+s_m+l_1}{a_1}-a_2\, l.n\,\frac{\sqrt{a_2^2+(\sigma_2-l_2)^2}+\sigma_m-l_2}{a_2}-\delta=d$$

en las que sustituyendo por $\delta\,\gamma$ los valores deducidos de las dos anteriores dan:

(c) $$\sqrt{a_1^2+(s_m+l_1)^2}-\sqrt{a_1^2+s^2m}-\sqrt{a_2^2+(\sigma_m-l_2)^2}+\sqrt{a_2^2+\sigma^2m}=h$$

(d) $$a_1\, l.n\,\frac{\sqrt{a_1^2+(s_m+l_1)^2}+s_m+l_1}{\sqrt{a_1^2+s^2m}+s_m}-a_2\, l.n\,\frac{\sqrt{a_2^2+(\sigma_m-l_2)^2}+\sigma_m-l_2}{\sqrt{a_2^2+\sigma^2m}+\sigma_m}=d$$

que junto con las (a) (b) resuelven el problema, pues estas permiten sustituir en las (c) (d), s_m, σ_m en función de a_1 a_2 y determinar estos parámetros que junto con las ecuaciones generales dan todos los demás valores.

Un caso particular, relativamente fácil de resolver, sea directamente, sea por reducción de la solución general anterior, es aquel en que una cuerda suspendida por sus extremos en puntos á igual nivel se carga con un peso P en su punto medio. En este caso las dos catenarias son iguales y simétricas con respecto á la vertical que pasa por el punto medio de la cuerda, que es donde actúa el peso, por lo que, la proyección de la tensión de una de ellas sobre la vertical será igual á la mitad de dicho peso, ó sea:

$$T_{m.1}\ \text{sen.}\ \alpha_{m.1}=\frac{P}{2}$$

que teniendo en cuenta las ecuaciones (40) y (4) resulta:

$$ps_m=\frac{P}{2}$$

que dá inmediatamente el valor:

$$s_m=\frac{P}{2p}$$

lo mismo que para el punto $(x_1\ y_1)$ daría:

$$s_m + l_1 = \frac{P}{2p} + l_1$$

la ecuación (7) dá:

$$\frac{d}{2} = x_1 - x_m = a\, l_{.n} \frac{y_1 + s_m + l_1}{y_m + s_m}$$

y poniendo los siguientes valores deducidos de la (6):

$$y_1 = \sqrt{a^2 + (s_m + l_1)^2} \quad ; \quad y_m = \sqrt{a^2 + s^2_m}$$

dá definitivamente:

$$d = 2\, a\, l_{.n} \frac{\sqrt{a^2 + (s_m + l_1)^2} + s_m + l_1}{\sqrt{a^2 + s^2_m} + s_m}$$

El mismo resultado se encuentra por deducción de las fórmulas generales (a) (d) si se tiene en cuenta que en este caso $\theta = o$; $\cdot - \sigma_m = s_m$ y que por ser $-x_2 = x_1$, en la (d), los dos términos son del mismo signo y su suma igual á d.

La solución de los casos en los que una cuerda está sometida á una serie de fuerzas en su plano vertical puede resolverse, como método, por el mismo principio, si bien resulta extremadamente complicado por pocas fuerzas que haya. En las aplicaciones es preferible hallar una solución aproximada asimilando el problema al caso de un sencillo polígono funicular y si acaso se quiere mayor exactitud, tomar esta solución como primera aproximación siguiendo el método general de aproximaciones sucesivas.

Como al principio se ha indicado, son en la actualidad numerosas y de gran importancia las aplicaciones de cables suspendidos como conductores eléctricos, los que en caso de ruptura, ocasionan, además de pérdidas materiales, algunas veces heridas y la muerte de las personas. Una de las causas que seguramente ha contribuído algunas veces á la ruptura de dichos cables, ha sido el colocarlos en tiempo de calor con demasiada tensión, á fin de que presenten buen aspecto, con lo que, al descender la temperatura al llegar el invierno, aumenta todavía la tensión poniendo en peligro la resistencia de los mismos. En los ferrocarriles, ya desde las primeras vías que se colocaron, se tuvo en cuenta esta circunstancia de la dilatación, colocando los railes con cierta pequeña separación, mayor en invierno, que permitiera la libre dilatación sin producir en consecuencia sobre la

vía esfuerzos notables de deformación, y si bien en la actualidad se ensaya en los Estados Unidos del Norte de América el rail continuo (cosa que aun la experiencia no ha decidido si resultará ventajosa) hay la notable diferencia de que el rail está apoyado mientras que los cables, lo mismo que los hilos telegráficos, están suspendidos.

Es pues interesante examinar las condiciones de resistencia de los cables eléctricos sujetos á cambios de temperatura. En su forma de aplicación más usual, el problema se presenta en las siguientes condiciones. Un cable de cuerda horizontal y de longitud dada y por consiguiente colocado á tensión determinada, se enfría de un número de grados determinado; hallar el aumento de tensión que sufrirá. ó sea la tensión final. Parece que sería más general tomar un cable cualquiera, mas no sería de utilidad práctica esta generalización, primero porque los cables son usualmente de cuerda poco inclinada y segundo porque cuando ésta es horizontal es cuando se desarrollan los esfuerzos de mayor tensión.

Para resolver esta cuestión, se supondrá que la tensión del cable es sensiblemente igual en toda su longitud, cosa que en las aplicaciones dichas se aparta poco de la realidad y que de tomarla variable complicaría extraordinaria y sobre todo inutilmente la resolución. Debe notarse, que así como el descenso de temperatura acorta el cable, el aumento de tensión que esto produce lo alarga, por razón de elasticidad. Así, pues, un cable de peso p por unidad de longitud y cuya cuerda horizontal es d, se coloca á una tensión inicial T_0 en su punto más bajo (que es casi igual á la que le da el montador al colocarlo con el aparejo de tesar) y esto se verifica á la temperatura t_0. Cuando la temperatura desciende al valor t_1 el cable que tenía una longitud inicial l_0 se habrá acortado por este descenso de una cantidad:

$$\lambda_t = k l_0 (t_0 - t_1)$$

en donde k es el coeficiente de dilatación que vale sensiblemente 0.0000170 para el cobre y 0.0000144 para el alambre de hierro. Pero como la tensión del cable aumenta, llamando T' al aumento de tensión, éste producirá sobre la longitud primitiva del cable un alargamiento elástico:

$$\lambda_e = \frac{T' l_1}{A_1 E}$$

siendo A_1 la superficie transversal del cable y E el módulo de elasticidad, que vale, tomando por unidades el metro y el kilogramo, 13×10^9 para el cobre y 20×10^9 para el alambre de hierro.

Así, pues, el cable colocado á la tensión T_0 estará sujeto á las condiciones, deducidas de las ecuaciones (3) y (40).

$$l_0 = a_0\left(e^{\frac{d}{2a_0}} - e^{-\frac{d}{2a_0}}\right) \quad ; \quad T_0 = pa_0$$

y al fin de su contracción térmica y alargamiento elástico á las:

$$T_1 = pa_1 \quad : \quad l_1 = a_1\left(e^{\frac{d}{2a_1}} - e^{-\frac{d}{2a_1}}\right) \quad : \quad T_1 = T_0 + T'$$

en donde la tensión final T_1 es igual á la inicial T_0 más la producida por el alargamiento elástico. La variación de longitud entre la catenaria final y la inicial es igual al acortamiento producido por la contracción térmica menos el alargamiento producido por el aumento de tensión, luego:

$$l_0 - l_1 = \lambda_t - \lambda_e \qquad \text{ó sea:}$$

$$l_0 - a_1\left(e^{\frac{d}{2a_1}} - e^{-\frac{d}{2a_1}}\right) = kl_0(t_0 - t_1) - (T_1 - T_0)\frac{l_0}{A_1E}$$

que atendiendo al valor de T_1 antes mencionado, resulta:

$$(41) \quad a_1\left(e^{\frac{d}{2a_1}} - e^{-\frac{d}{2a_1}}\right) - pa_1\frac{l_0}{A_1E} = l_0 - kl_0(t_0 - t_1) - T_0\frac{l_0}{A_1E}$$

de aquí puede hallarse ya el valor de a_1 que resuelve el problema, pero como en el caso de una catenaria de poca flecha, del que ahora se trata, el valor de a_1 es muy grande, puede fácilmente hallarse una primera aproximación, ya muy aproximada, desarrollando en serie, lo que da:

$$a_1\left[2\frac{d}{2a_1} + 2\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{d}{2a_1}\right)^3 + \cdots\right] - pa_1\frac{l_0}{A_1E} = l_0 - kl_0(t_0 - t_1) - T_0\frac{l_0}{A_1E}$$

que limitada al primer término da:

$$(42) \quad a_1 = \frac{d - l_0\left[1 - k(t_0 - t_1) - \frac{T_0}{A_1E}\right]}{pl_0}A_1E$$

y también se puede hallar la tensión final T_1 de la anterior, que da:

$$(43) \quad pa_1 = T_1 = \left[\frac{d}{l_0} - 1 + k(t_0 - t_1) \right] A_1 E + T_0$$

teniendo en cuenta las relaciones (34) y (35) resulta:

$$\frac{l_0 - d}{d} = \frac{1}{24} \frac{d^2}{a_0^2}$$

y como la diferencia entre d y l_0 es muy pequeña, con pequeño error se podrá sustituir en el valor de T_1 la cantidad $\frac{d}{l_0} - 1$ ó sea $\frac{d - l_0}{l_0}$ por $\frac{d - l_0}{d} = -\frac{1}{24}\left(\frac{d}{a_0}\right)^2$ que da para la tensión buscada:

$$(44) \quad T_1 = T_0 + \left[k(t_0 - t_1) - \frac{1}{24}\left(\frac{d}{a_0}\right)^2 \right] A_1 E$$

con lo que queda resuelto el problema.

Aplicándolo, para que sirva de ejemplo, á un cable de alambre de cobre de $10^{m}/_{m}$ de diámetro sostenido por postes á 30^{m} de separación y colocado con una flecha de $0^{m}20$, con lo que quedará con una tensión de 394^{k} ó sean de 5^{k} por milímetro cuadrado de sección, si se supone colocado en estas condiciones un día de verano en que la temperatura al sol sea de 30°, cosa que no tiene nada de exagerada, al llegar un dia de invierno á 0°, quedará el cable sometido á una tracción de 794^{k} ó sea más de 10^{k} por milímetro cuadrado, más del doble de la inicial y que teniendo en cuenta el aumento que todavía introducirán las oscilaciones debidas al viento y á los troleys de los carruages que circulen, explica bien que dicho cable encontrándose en condiciones de resistencia muy precarias, llegue á romperse por pequeños defectos ó algún punto débil que presente y que sin aquéllas no habrían determinado la ruptura. Se impone, pues, como medida de seguridad, colocar los cables todos, y especialmente los conductores eléctricos, con una flecha suficiente para no desarrollar en ellos tensiones demasiado elevadas y dársela mayor en verano á fin de impedir aumentos de tensión en los mismos, que por el ejemplo acabado de mencionar, pueden fácilmente elevarse del simple al doble.

El resúmen de las fórmulas generales y las particulares antes tratadas, y la pequeña tabla puesta á continuación, podrán ser de alguna utilidad en los cálculos referentes á problemas de esta naturaleza.

RESÚMEN

Notación general con referencia á la fig. III, en la que las líneas de trazo seguido pertenecen á la catenaria y la curva punteada es la parábola aproximada de la ecuación (21):

x. . . abcisa de un punto cualquiera de la catenaria.
y. . . ordenada de un punto cualquiera de la catenaria.
s. . . longitud de arco de catenaria comprendido entre el punto más bajo de esta m, y un punto cualquiera $(x\,y)$ de la curva.
α. . . ángulo que forma la tangente en un punto cualquiera de la catenaria, con el eje de abcisas.
ρ. . . rádio de curvatura en un punto cualquiera de la curva.
x_c, y_c . . coordenadas de los puntos de la evoluta y de los centros de curvatura de la catenaria.
x_e, y_e . . coordenadas de los puntos de la evolvente.
x_g, y_g . . coordenadas del centro de gravedad de un arco de catenaria.
A. . . área comprendida entre los ejes coordenados, la catenaria y la ordenada correspondiente á la abcisa x.
l. . . longitud de cuerda ó cadena pendiente de dos puntos cuyas coordenadas son $(x'\,y')$ y $(x''\,y'')$.
d. . . distancia horizontal entre los dos puntos anteriores.
h. . . distancia vertical entre los dos puntos anteriores.
f. . . flecha de una catenaria de cuerda horizontal.
a. . . parámetro de una catenaria cualquiera.
T. . . tensión de la cuerda en un punto cualquiera.
T_o. . . tensión de la cuerda en su punto más bajo.
p. . . peso de cuerda ó cadena por unidad de longitud de la misma.
k. . . coeficiente de dilatación lineal del metal de un alambre, cuerda ó cadena suspendida.
E. . . módulo de elasticidad del metal anterior.
A_1. . . área transversal de un alambre suspendido.

Todas las ecuaciones referentes á las propiedades geométricas generales se refieren á una catenaria cuyo parámetro a sea la unidad, en los demás casos se toma con cada valor particular de este parámetro. Para transformar estas ecua-

ciones en las usuales, cuyo parámetro sea a, basta sustituir en todas ellas, todas las distancias, por el producto de las mismas por el coeficiente $\frac{1}{a}$

(1) $y = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) = \text{cos. h. } x$

(2) $\frac{d.y}{d.x} = \text{tan. } \alpha = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) = \text{sen. h. } x$

$$\frac{d^2.y}{d.x^2} = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) = y = \text{cos. h. } x$$

(3) $s = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) = \frac{d.y}{d.x} = \text{tan. } \alpha = \text{sen. h.} x$

$$d.s = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) d.x = y\, d.x = \text{cos. h. } x\ d.x$$

(4) $\text{sen. } \alpha = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \frac{s}{y} = \text{tan. h. } x$

(5) $\text{cos. } \alpha = \frac{2}{e^{x} + e^{-x}} = \frac{1}{y} = \frac{1}{\text{cos. h. } x} = \text{sec. h.} x$

(6) $y^2 - s^2 = 1 \quad ; \quad \text{cos. h}^2.\, x - \text{sen. h}^2.\, x = 1$

(7) $x = l.n\,(y + s) = l.n\,(\text{cos. h. } x + \text{sen. h. } x)$

(8) $\text{Tangente } np = \frac{\left(e^{x} + e^{-x}\right)^2}{2\left(e^{x} - e^{-x}\right)} = \frac{y^2}{s} = \frac{\text{cos. h}^2.\, x}{\text{sen. h. } x}$

(9) $\text{Normal } pk = \frac{1}{4}\left(e^{x} + e^{-x}\right)^2 = y^2 = \text{cos. h}^2.\, x$

(10) $\text{Subtangente } nq = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}} = \frac{y}{s} = \frac{\text{cos. h. } x}{\text{sen. h. } x} = \text{cot. h. } x$

(11) Subnormal $qk = \frac{l}{4}(e^{2x} - e^{-2x}) = ys = \text{cos. h. } x \text{ sen. h. } x = \frac{l}{2}\text{sen. h. } 2x$

(13) $\rho = \frac{l}{4}(e^{x} + e^{-x})^2 = y^2 = \text{cos. h}^2. x$

(14) $x_c = x - ys = x - \text{cos. h. } x \text{ sen. h. } x = x - \frac{l}{2}\text{ sen. h. } 2x$

(15) $y_c = 2y = 2 \text{ cos. h.} x$

(16) Evoluta: $x_c = \text{arc. cos. h. } \frac{y_c}{2} - \frac{y_c}{4}\sqrt{y_c^2 - 4}$

Punto de intersección de la catenaria con su evoluta $\begin{cases} x_1 = 2.04846 \\ y_1 = 3.94247 \end{cases}$

(19) Evolvente: $x_e = l.n\left(\frac{l + \sqrt{l - y_e^2}}{y_e}\right) - \sqrt{l - y_e^2}$

(20) $A = \frac{l}{2}(e^{x} - e^{-x}) = s = \text{sen. h.} x$

Parábola aproximada á una catenaria de parametro a.

(21) $y = a + \frac{x^2}{2a}$

Catenaria de longitud total l y cuyos extremos están á una distancia horizontal d y á un desnivel h:

Solución exacta:

$$\begin{cases} (29) \quad l^2 - h^2 = a^2\left(e^{\frac{d}{2a}} - e^{-\frac{d}{2a}}\right)^2 \\ (30) \quad x' + x'' = a\, l.n\, \frac{l+h}{l-h} \\ \qquad x' - x'' = d \end{cases}$$

Solución aproximada:

$$\begin{cases} (31) \quad a = 0.204 \sqrt{\dfrac{d^3}{\sqrt{l^2 - h^2} - d}} \\ (32) \quad x' + x'' = 2{,}303\, a \log. \dfrac{l+h}{l-h} \\ \qquad x' - x'' = d \end{cases}$$

Caso particular de ser la cuerda horizontal:

$$(33) \quad a = 0.204\, d \sqrt{\frac{d}{l-d}} \quad ; \quad x' = -x'' = \frac{d}{2}$$

Catenaria de cuerda horizontal. Flecha en función de la cuerda y el parámetro:

$$f = \frac{a}{2}\left[\left(\frac{d}{2a}\right)^2 + \frac{1}{3.4}\left(\frac{d}{2a}\right)^4 + \frac{1}{3.4.5.6}\left(\frac{d}{2a}\right)^6 + \cdots\right]$$

aproximadamente:

$$\left.\begin{array}{l} (34) \quad f = \dfrac{1}{8}\dfrac{d^2}{a} \\ \qquad a = \dfrac{1}{8}\dfrac{d^2}{f} \end{array}\right\} \text{ valores aproximados casi á } \frac{1}{400}\left(\frac{d}{a}\right)^3 \text{ de } d, \text{ y por defecto.}$$

$$(35) \quad l - d = \frac{8}{3}\frac{f^2}{d} \text{ valor aproximado casi á } 2d\left(\frac{f}{d}\right)^4 \text{ y por defecto.}$$

Propiedades mecánicas.

Coordenadas del centro de gravedad de un arco de catenaria, siendo las de sus extremos $(x'\ y')$ y $(x''\ y'')$ y siendo $l = s' - s''$ la longitud de dicha catenaria

$$(36) \quad x_g = \frac{x's' - x''s'' - y' + y''}{s' - s''} \quad ; \quad (37)\ y_g = \frac{s'y' - s''y'' + x' - x''}{2(s' - s'')}$$

En una catenaria de cuerda horizontal:

$$(38) \quad x_g = o \quad ; \quad y_g = \frac{y'}{2} + \frac{d}{2l}$$

y la distancia de dicho centro al vértice (de este, hacia arriba) es:

$$\frac{f-1'}{2}+\frac{d}{2l} \tag{39}$$

$$l=py \quad ; \quad T_0=pa \tag{40}$$

Tensión final T_1 de un alambre de longitud inicial l_0, colocado á la temperatura t_0, al pasar á la temperatura t_1:

$$T_1=pa_1 \quad : \quad a_1\left(e^{\frac{d}{2a_1}}-e^{-\frac{d}{2a_1}}\right)-pa_1\frac{l_0}{A_1E}=l_0-kl_0(t_0-t_1)-T_0\frac{l_0}{A_1E} \tag{41}$$

y aproximadamente:

$$T_1=T_0+\left[\frac{d}{l_0}-1+k(t_0-t_1)\right]A_1E \tag{43}$$

ó tambien:

$$T_1=T_0+\left[k(t_0-t_1)-\frac{1}{24}\left(\frac{d}{a_0}\right)^2\right]A_1E \quad ; \quad a_0=\frac{T_0}{p} \tag{44}$$

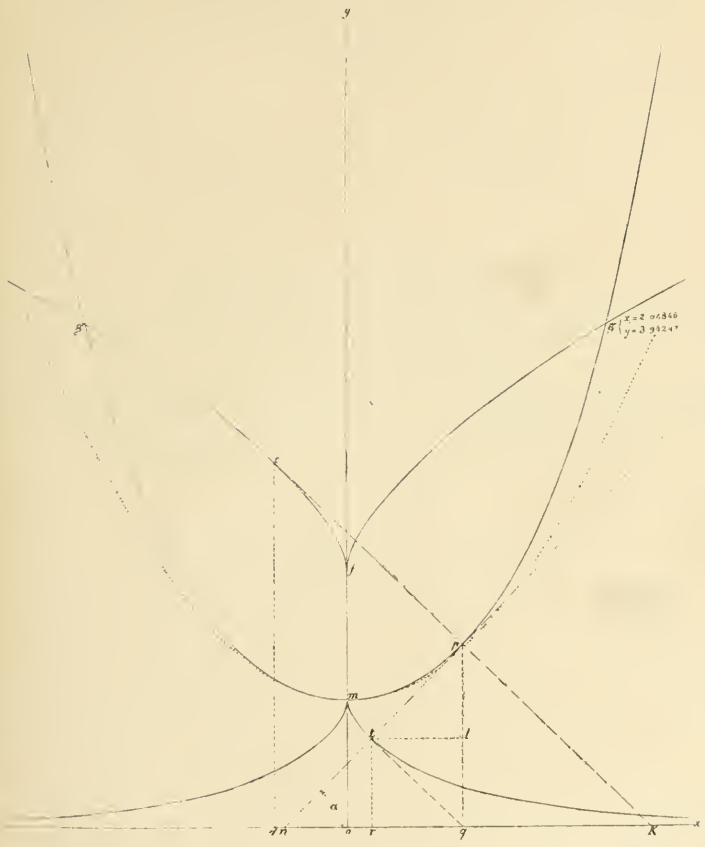
ó también si lo que se conoce es la flecha inicial de colocación:

$$T_1=T_0+\left[k(t_0-t_1)-\frac{8}{3}\left(\frac{f_0}{d}\right)^2\right]A_1E$$

TABLA AUXILIAR

$\frac{x}{a}$	$\frac{y}{a}$ = cos. h. $\frac{x}{a}$	$\frac{s}{a}$ = tan. α = sen. h. $\frac{x}{a}$	$\frac{x}{a}$	$\frac{y}{a}$ = cos. h. $\frac{x}{a}$	$\frac{s}{a}$ = tan. α = sen. h. $\frac{x}{a}$
0.005	1.000013	0.005000	0.20	1.020067	0.201336
0.010	1.000050	0.010000	0.25	1.031413	0.252612
0.015	1.000113	0.015001	0.30	1.045339	0.304520
0.020	1.000200	0.020001	0.40	1.081072	0.410752
0.025	1.000313	0.025003	0.50	1.127626	0.521095
0.030	1.000450	0.030005	0.60	1.185465	0.636654
0.035	1.000613	0.035008	0.70	1.255169	0.758584
0.040	1.000800	0.040011	0 80	1.337435	0.888106
0.045	1.001013	0.045016	0.90	1.433086	1.026517
0.050	1.001250	0.050021	1.00	1.543081	1.175201
0.06	1.001801	0.060036	1.20	1.810656	1.509461
0.07	1.002451	0.070057	1.40	2.150898	1.904302
0.08	1.003202	0 080085	1.60	2.577464	2.375568
0.09	1.004053	0.090122	1.80	3.107473	2.942174
0.10	1.005004	0.100167	2.00	3.7622	3.6269
0.12	1.007209	0.120288	2.50	6.1323	6.0502
0.14	1.009816	0.140458	3.00	10.0677	10.0179
0.16	1.012827	0.160684	4 00	27.3082	27.2899
0.18	1.016244	0.180974	5.00	74.2100	74.2032

fig II



9.15

MEMORIAS

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS Y ARTES

DE BARCELONA

TERCERA ÉPOCA — VOL. VII. NÚM. 4

MINERALES DE TUNGSTENO

EXPLOTACIÓN DE ESTOS MINERALES EN ESPAÑA. USOS Á QUE SE DESTINAN. POSIBILIDAD DE SER SUBSTITUIDO EL TUNGSTENO POR OTROS CUERPOS EN LA FABRICACIÓN DEL ACERO

POR EL ACADÉMICO

D. RAMÓN DE MANJARRÉS Y BOFARULL

Publicada en septiembre de 1908

BARCELONA

A. LÓPEZ ROBERT, IMPRESOR.—CONDE DEL ASALTO, 63.

1908

UNIVERSITY OF TORONTO

MINERALES DE TUNGSTENO

Explotación de estos minerales en España. Usos á que se destinan. Posibilidad de ser substituído el Tungsteno por otros cuerpos en la fabricación del Acero

por el Académico

D. Ramón de Manjarrés y Bofarull

Sesión del día 29 de mayo de 1908

No intento escribir una monografía del Tungsteno; metal que hasta mediados del siglo pasado figuraba tan solo en las colecciones de los gabinetes de Química como cuerpo raro y sin aplicación alguna. Voy sencillamente á hacer la historia del descubrimiento de las minas de este metal en España, para llamar una vez más la atención acerca del modo como se malbarata y desaparece la riqueza mineral de nuestro suelo.

El Tungsteno forma parte de varios minerales; todos ellos bien estudiados y descritos en las obras de Mineralogía:

El Tungstato de Cal ó Scheelita;

El Tungstato de hierro y manganeso ó Wolfram;

El Tungstato de plomo ó Schelitina;

y el ácido túngstico ó Wolframina.

La existencia del Tungsteno como cuerpo simple de naturaleza metálica fué anunciado por Bergman, después que Scheele aisló el ácido túngstico del tungstato de cal; por cuya razón se dió al metal el nombre de Scheelium. Barcelius, sin embargo, dice que esta denominación no es propia de la lengua Sueca; y no necesitando su compatriota esta prueba de consideración para inmortalizar su nombre, decide llamarle Tungsteno ó Wolfram. El tungstato de cal, Tungsteno ó piedra pesada de los suecos, fué llamada Schewerstein por los alemanes y bajo el mismo nombre de Tungstene fué conocida por los franceses.

Se encuentran estos minerales en varios puntos del globo. El ácido túngstito, trióxido de tungsteno ó *Wolfram*, se encuentra en pequeñas cantidades en Saint-Leonard, cerca de Limoges (Francia), junto al tungstato de hierro y manganeso.

El tungstato de plomo ó Scheelitina, existe en muchos criaderos de plomo. Hasta ahora no creo tenga importancia industrial y comercial.

El tungstato de cal, scheelita, scheelina calcárea, cal tungstada, Wolfram

blanco ó tungstein blanco, se encuentra junto al Wolfram ferruginoso, muchas veces en hermosos ejemplares. Su color, que varía desde el blanco lechoso al pardo amarillento, así como su lustre más ó menos brillante, pueden hacerlo confundir con otros minerales; por ejemplo el carbonato y sulfato de plomo; y quizás con algunos de barita. El ejemplar que he tenido en mi poder se parece mucho á la Barito-calcita de Vallcarca (Barcelona). Su reconocimiento es, sin embargo, muy fácil; pues atacado con ácido clorhídrico ó nítrico, dá inmediatamente el ácido túngstico amarillo.

El mineral de tungsteno más importante es hoy el tungstato de hierro, y manganeso, llamado Wolfram, Scheelin ferruginoso ó Eisenscheel.

Se encuentra en Inglaterra en los Condados de Cornuailles y Cumberland; en Amberg (Sajonia), en Zinwald (Bohemia), en Carinthia, en Limoges (Francia), en Chile, en la Carolina del Norte y en otros puntos de América.

Ningún autor extranjero ha citado hasta ahora la existencia del Wolfram en España.

Vilanova en su obra titulada «La Creación», publicada en 1876, cita los tungstenos de Orense, Pontevedra, Zamora, Salamanca, Asturias, Cáceres, Madrid, etc.

Acompaña á menudo este mineral á los minerales de estaño y durante mucho tiempo se ha confundido con el hierro oligisto y otros minerales negros y brillantes.

Su gran peso específico, su exfoliación y su forma cristalina, son caracteres que no dejan duda; por más que su forma cristalina ha sido muy debatida entre los mineralogistas.

Los cristales que en diversas ocasiones he podido observar, me han parecido prismas romboidales oblicuos, como asegura Decloiseaux y no romboidales rectos como afirma Rose.

El análisis de este mineral parece conducir á la fórmula de un tungstato ferroso-manganoso.

Duffrenoy dá el análisis comparativo de un mineral de Linoges hecho por Ebelmen y otro de Neuhaus, Stolberg (Prusia), en los cuales, si se considera como accidental la presencia de la cal y de la magnesia, resulta corroborado lo dicho antes acerca de su composición.

	DE LIMOGES		DE NEUHAUS
Acido túngtico.	76'20		76'87
Protóxido de hierro. , , , ...	19'19		16'48
Id de manganeso.	4'48		4'40
Magnesia.	0'80	Cal	0'70

Haré notar en corroboración de lo expuesto, que el mineral atacado con ácido clorhídrico, no dá ni indicios de cloro; lo cual indica que el manganeso, cuya

presencia se manifiesta por la conocida reacción del ácido nítrico y del bióxido de plomo, no existe en el mineral á un grado de oxidación superior al óxido manganoso.

El resultado final del ataque del mineral con el ácido clorhídrico es un residuo amarillo de ácido túngstico, como el que remito con el mineral; y un líquido en el cual se reconoce fácilmente una sal manganosa y una sal ferrosa no desprovista nunca de cierta cantidad de sal férrica.

Bajo dos puntos de vista es interesante la historia de este mineral.

1.ª Por haber sido la materia de la cual extrajeron el metal tungsteno por primera vez dos químicos españoles.

2.ª Porque á pesar de haber sido considerado el tungsteno durante un siglo como metal raro y sin aplicación alguna, haya sido, sin embargo, estudiado perfectamente, tanto por lo que atañe á sus propiedades físicas como en sus combinaciones con el oxígeno y otros cuerpos simples, así como en su combinación y mezcla ó disolución con otros metales, formando aleaciones de propiedades especiales.

1.ª Casi todos los autores de química convienen en que el descubrimiento del Tungsteno, cuerpo simple de naturaleza metálica, se debe á dos hermanos cuyo apellido por lo general no escriben correctamente; no dicen tampoco que dichos hermanos eran españoles; lo que sin embargo hace constar Wurtz, en su Diccionario de Química.

Testimonio fehaciente de esto tenemos en una obrita antigua, titulada «Lecciones ligeras de Química puestas en diálogo», por D. Valentín de Foronda, de la Real Academia de Ciencias y Artes de Burdeos, publicada en Madrid en 1791; cuya obra parece estaba destinada á algún Seminario Vascongado.

Dice Foronda que los resultados obtenídos por Scheele y Bergman, fueron comprobados por el sabio químico Sr. Angulo; dándose entonces por seguro que el mineral con que trabajaron estaba compuesto de cal y un *ácido particular*.

«Este ácido se saca de una substancia metálica llamada *Tungstenes*». según Foronda. El metal está en el estado de óxido, así en esta mina como en la de *Bolfran*, que es también una verdadera mina de *tungstenes*. Los Sres. D. Joseph y D. Fausto de Eluyar, jóvenes de talento y de conocimientos, descubrieron que el *Bolfran*, *que se miraba como una mina de fierro pobre, era una combinación del ácido túngstico*; y usando métodos de reducción (que no difieren esencialmente de los que usamos ahora) obtuvieron un régulo particular.»

2.ª La facilidad con que se separa el ácido túngstico contenido en sus minerales, favoreció el estudio del Tungsteno y de sus combinaciones. Así es que en la obra de Foronda, donde se hace mención detallada de los trabajos que dichos hermanos Eluyar practicaron en su pueblo natal (?) antes de partir para América, no solamente queda el Tungstenes clasificado entre las substancias simples metálicas oxidables y acidificables, sino que se clasifican también sus compues-

tos, así los conocidos como los hipotéticos; como si se presintiera la teoría de Mendeleef.

1.° El óxido de tungstenes, cuyo nombre antiguo dice era el de *cal de tungstenes*, como primer grado de *oxigenación*.

2.° Deja como hipotético un segundo grado.

3.° A este tercer grado de oxigenación corresponde el ácido *túngstico* ó *tungstínico*, que de mucho tiempo ya se consideraba como un ácido del Tungstenes.

4.° Al cuarto grado de oxigenación le dá el nombre de ácido Timgstínico oxigenado; ignorando su nombre antiguo.

Hace notar el Sr. Foronda que el ácido del Tungstenes es uno de los diez y siete ácidos metálicos poco conocidos, *sobre cuyo análisis estaba trabajando Berthollet*.

Los resultados obtenidos posteriormente han dado la serie de compuesto Tu V, Tu O^2, Tu $^2O^3$ y Tu O^3 con los ácidos iso, meta y paratúngstico, citándose además Wurtz un poli-túngstico y la serie correspondiente de tungstatos, entre los cuales figuran los tungstatos alcalinos solubles, el ferroso y un ferro-mangaganeso, que dice en el Wolfram natural (1).

Apesar de haberse encontrado el tungsteno en varios puntos del globo y apesar de ser conocidas y estudiadas sus propiedades y las de sus sales, puede decirse que ni aquél, ni éstas han tenido aplicación alguna hasta mediados del siglo pasado. Limitábase su consumo al que hacían los laboratorios de Química, y hasta la aleación de hierro y tungsteno que describe Bercelius, se consideraba sin importancia antes que las aplicaciones de la electricidad á la metalúrgica facilitaran la obtención de aquella aleación en grandes cantidades, aplicándolas á la fabricación del acero.

En vano se recomendó la inmersión de los tejidos en disoluciones de tungstatos alcalinos para hacerlos incombustibles ó inflamables. El invento no prosperó. Sobre resultar caro, no ofrecía ventajas prácticas sobre el alumbre y otras sales de ácido ó de base fija recomendados y usados para este objeto.

A mediados del siglo pasado empieza la evolución que en pocos años ha hecho la fabricación del acero; motivada por la demanda creciente de esta masa metálica y favorecida modernamente por el horno eléctrico.

---

(1) Entre los que se dedicaron en España á las ciencias físico-químicas á fines del siglo XVIII además de los hermanos Elhuyan, figura D. Antonio Martí, de Tarragona; cuyos trabajos sobre la composición del aire atmosférico constan en una Memoria que presentó á esta Academia en 12 de mayo de 1790. En aquella época teníamos á Proust en el colegio de Segovia y á Gutiérrez Bueno en el R. Colegio de S. Carlos de Madrid; mientras la Junta de Comercio del Principado de Cataluña dotaba á esta Ciudad de unas escuelas populares en la casa Lonja; á las cuales debe Cataluña empuje que recibieron las artes y las industrias. La serie de desdichas que vinieron sobre nuestra desgraciada Patria paralizó un movimiento que parecía iba á hacernos marchar al compás de las demás naciones más adelantadas.

En la Exposición Universal que tuvo lugar en Londres en 1862, figuraron objetos de acero tungstado procedentes de diversos países.

Comisionado por la Excma. Diputación de Sevilla, junto con otros compañeros de profesorado, para estudiar aquel certámen, dí cuenta de mis observaciones en la Memoria que redacté en colaboración del Profesor D. Germán Losada, referente á los aceros tungstados presentados por algunos fabricantes austríacos. Estos mejoraban la calidad de los aceros destinados á herramientas, fundiendo el acero ordinario con un régulo obtenido con el Wolfram procedente en bastante cantidad, de Bohemia.

También las fábricas de Sajonia y del Hartz trabajaban ya entonces con aceros tungstados, no quedando rezagada en esta campaña la colosal casa de Krupp de Essen, cuyos procedimientos no se conocen fácilmente por más que sus productos gozan de fama universal.

Mientras tanto, nadie pensaba en explotar los tungstenos de España. Las fábricas de acero de las provincias Vascongadas empezaron á usar con éxito el procedimiento Bessemer, que consiste en descarburar la fundición por medio de la injección de aire ó gran presión en el hierro fundido contenido en un gran crisol. Por otra parte se hacían ensayos de fabricación del acero en la fábrica y altos hornos del Pedroso, provincia de Sevilla; ensayos que produjeron excelentes muestras, que pueden verse en el Museo de la Escuela de Ingenieros Industriales de Barcelona, á la cual en 1867 regalé una colección completa

La fabricación del Pedroso no prosperó; y apagando sus altos, se dedicó aquella sociedad industrial á vender minerales y minas á los ingleses.

Este sistema de explotación de minerales ha sido fatal para España; pues aun cuando ha producido pingües beneficios á ciertas empresas y á algunos particulares, este beneficio representa para el país tan solo una parte del que se hubiese obtenido beneficiando el mineral en el mismo.

Así se malbarató en pocos años la riqueza de manganesos de las provincias de Huelva, Cádiz y Sevilla, sin que se utilizara una sola tonelada en la industria del país.

Allá por los 1858 al 68 se desarrolló, tanto en el mediodía de España, como en Portugal una verdadera fiebre de exportación de manganeso para las fábricas de sosa que funcionaban en el extranjero por el sistema Leblanc y en las cuales se aprovechaba las grandes cantidades de ácido clorhídrico, producto secundario de la fabricación del sulfato de sosa, para la obtención del hipoclorito de cal, para lo cual se consumían grandes cantidades de peróxido de manganeso.

Apenas denunciadas las primeras minas de esta substancia en dichas regiones, acudieron agentes extranjeros haciendo importantes pedidos y contratas.

Mientras la demanda fué mayor que la oferta, pagaron á buen precio minerales en los cuales se exigía un 60 % de peróxido como minimum, ensayando por el método de Fresenius: pero tales trazas se dieron compradores y vendedores, quo muy pronto la oferta fué mayor que la demanda; creciendo las exi-

gencias de los compradores de tal modo, que al mismo tiempo que bajaba el valor del mineral por unidad de peróxido, ya no se contentaban con minerales del 60 % sino que exigían el setenta y más de peróxido.

Nadie se preocupaba por la falta que pudiera hacer este mineral en el país el día que se estableciera la gran industria de la sosa, tan indicada en esta zona, rica en materias primeras, sal común y piritas. Inútil fué presentar un proyecto desarrollado y calculado de dicha fabricación. El negocio de exportación de minerales continuó hasta dejar agotados los criaderos de manganeso, donde quedaron como olvidados y despreciados minerales del 30, 40 y hasta 50 % de peróxido.

Posteriormente se han vendido también estos minerales al extranjero para la obtención de fundiciones manganesíferas, propias para la fabricación del acero ó para la previa obtención del ferro-manganeso que se usa para el mismo objeto (1) en vez del ferro-tungsteno.

La fabricación de la sosa hace cuarenta años que ha variado de rumbo. Esto ha limitado mucho el uso del manganeso y por lo tanto es probable que la demanda de este mineral, rico ó pobre tenga hoy por objeto la obtención de una de las varias clases de acero que harán la competencia al acero tungstado (2).

Mientras tanto, los que poseen en España minas de Tungsteno hacen un buen negocio vendiendo el mineral que hasta hace poco puede decirse que no era conocido mas que de las personas científicas.

He aquí como se inició el movimiento comercial del Tungsteno.

La muestra de Wolfram que tengo el gusto de remitir para el museo de la Academia, indica la existencia de un filón bastante potente de este mineral. Débese ésta muestra al Sr. D. José Domingo de Irureta Goyena, propitario de varias minas, á quien bastó que le comunicara mi deseo de mandar una buena muestra á esa Academia, para que me ofreciera una de las mejores de su colección.

---

(1) No puedo dejar de consignar que la primera tentativa de la fabricación de la sosa que se hizo en España, antes de desaparecer de nuestro suelo los manganesos fué obra del Académico el P. Arbós y Tort, de grata memoria.

No vestia todavía Jaime Arbós los hábitos sacerdotales, cuando llevado y guiado por su amor á la química y por el cariño que profesaba á sus hermanos, montó una pequeña fábrica, en la que aprovechando el sulfato ácido ó *caput mortum* procedente de la fabricación de los ácidos clorhídricos y nítrico, lo transformaba en barrilla artificial.

(2) Convenien:ias arancelarias dificultaron la obtención de dichos ácidos en el país y por lo tanto el desarrollo de la industria de la sosa, para cuya marcha se necesitaba disponer de un gran capital. Si alguna esperanza alimentaba de ver establecida esta fabricación acabé de perderla cuando en 1862 visité la gran fábrica de Hutchinson and Earle, en St. Elens (Lameaschire). Durante los ocho dias que permanecí en ella presencié todas las operaciones tomando cuantosdatos podia desear. El mismo propietario me acompañaba y no cesaba de repetir: «Tengo la seguridad de que no pueden ustedes en España hacerme la competencia!!!»

Dicho señor, como es natural, está en relaciones con ese ejército de buscadores de minas; gente infatigable que arrostra por lo más fragoso de la Sierra los temporales, sin arredrarles ni el frío, ni el calor, arrancando muestras de los minerales que se presentan á flor de tierra, guiados tan solo por una especie de instinto y por la práctica.

Encontróse cierto día el Sr. Goyena, uno de esos hombres; el cual, como de costumbre, le enseñó varias muestras que traía en la faja. Durante esta operación cayósele al suelo un fragmento del tamaño de una moneda de diez céntimos, de forma plana, color negro, esfoliable, de un brillo especial, que dicho señor no confundió con el del hierro oligisto. Según dijo el buscador, dicha muestra procedía de Montoro, provincia de Córdoba. Adquirida por el Sr. Goyena, fué remitida al Director de la Escuela de Minas de París quien certificó que era un mineral de Tungsteno. Pronto se hizo público el descubrimiento y pronto se supo la importancia del mineral. Diéronse los buscadores tal maña, que después de mil ensayos inútiles de minerales con los cuales á primera vista puede confundirse el Wolfram con el hierro oligisto, se encontró en varios puntos y principalmente en el pueblo de Campanario, provincia de Badajóz.

De este punto se exportaron por de pronto cargamentos de 15 toneladas para Inglaterra y Alemania. Posteriormente se han hecho exportaciones de 60 toneladas y más.

El precio de este mineral ascendió en los primeros cargamentos hasta 2.500 francos la tonelada; variando como es consiguiente por unidad, según la riqueza.

Sufrió después una baja considerable; coincidiendo ésta con el aumento en la demanda de minerales de hierro manganesífero; lo cual bien pudiera ser que los fabricantes de acero, ante el exorbitante precio del Wolfram se decidieran por el acero de manganeso. Pronto, sin embargo, se rehabilitó el nuevo mineral de Tungsteno, cuyo precio llegó á pagarse hasta 3.000 francos la tonelada.

Dos importantes casas extranjeras solicitaban este mineral; la casa Krupp, de Prusia y el Creusot, de Francia. Tenía la primera tal empeño en comprar Wolfram, que mandó á Sevilla un hijo del propietario, para contratar todo el mineral que se arrancara y hasta para adquirir las minas.

Continúa hoy en explotación en la provincia de Badajóz la mina «San José», de donde procede el ejemplar que remito, cuya ley es del 69 al 71 °/₀ de anhídrido túngstico, habiéndose denunciado posteriormente otros terrenos próximos á aquélla, que explota una compañía extremeña, concentrando el mineral por el el lavado; operación á la cual se presta aquél por su gran densidad.

No se dejó pasar la ocasión de preguntar al Sr. Krupp á que uso destinaban en aquella fábrica el acero tungstado, habiendo contestado que no solamente lo empleaban para la fabricación de útiles y herramientas, sino que lo destinaban con gran éxito á la obtención de planchas de blindaje para los buques; asegurando que, según las pruebas hechas en el campo de experiencias de aquella casa,

podía reducirse el grueso de las planchas, y por consiguiente su precio, á una tercera parte del que se daba á las planchas de otras clases de aceros, conservando igual resistencia al choque de los proyectiles.

Aquí podría dar por terminado mi trabajo; pero en la probabilidad de que sea éste el último que dedico á la Academia á que tanto me honro pertenecer, voy á exponer por vía de apéndice el porvenir del tungsteno como componente del acero y la posibilidad de ser reemplazado por otros metales, alguno de los cuales existe en España.

Las principales propiedades que caracterizan el acero son su dureza y el ser suceptible de recibir el temple.

Estas propiedades las debe á pequeñísimas cantidades de materias extrañas que contiene el hierro.

¿Cuáles son éstas?

Hé aquí el problema que se presenta para poder obtener las grandes cantidades de acero que necesita la industria y que por ser grandes y por los variados usos á que se destina esta materia ha de ser barata.

Muy cómodo y sencillo era considerar el acero como un protocarburo de hierro, suponiendo que la plombagina era el correspondiente percarburo; y aventurado era, como vemos en algunos autores de la primera mitad del siglo XVIII formular la composición del acero.

Sin necesidad de considerar el acero como un compuesto químico definido, Dumas dice que desde el momento en que el hierro contiene uno por ciento de materias extrañas consistentes en Silicio, Carburo ó diferentes metales aleados accidentalmente con él, adquiere las propiedades del acero.

Por primera vez allá por los años 1844 ó 45 oí en la clase de Química, que daba el Dr. D. José Roura en las Escuelas de la Junta de Comercio, que el acero era un estado de carburación intermedio entre la fundición y el hierro dulce (1).

En este principio se funda la obtención del acero Bessemer.

Anterior á la adopción de este sistema, es la teoría Química de Fremy sobre la constitución química del acero; anunciada antes por Sanderson y por Caron.

En vista de que el análisis de los aceros daba siempre pequeñas cantidades de nitrógeno, creyó Fremy que el acero contenía siempre en combinación con el hierro, un radical compuesto análogo al Cianógeno; teoría que desarrolló y sostuvo calurosamente en la Academia de Ciencias de París.

---

(1) Algunos de los profesores de las clases que sostenía la Ilustre Junta de Comercio del Principado iban á París durante el verano con el objeto de estar al corriente de los adelantos de las ciencias. Explicaban éstas de un modo que se hacía agradable indicándonos al propio tiempo las aplicaciones que á la industria se hacían y despertando el deseo de poner en práctica aquellos conocimientos. De allí nacieron verdaderos industriales, que durante el siglo XIX han contribuido á la prosperidad de Cataluña. Sensible es que esta región no haya pensado en erigir un monumento conmemorativo á tan bienhechora Corporación.

Apesar de esto la opinión de la mayoria de los químicos se mantenía en suspenso; y en cuanto á los fabricantes de acero y metalurgistas prácticos se afirmó entre ellos la creencia de que el acero debía sus propiedades no solo al carbono y silicio, sino también á pequeñas cantidades de fósforo, de sodio, de aluminio, de arsénico, de rodio, de magnesio, de manganeso, de plata y de otros metales más ó menos raros. No pudiendo dejar de convenir en que influye en sus propiedades el sistema empleado en su fabricación. Sistemas que si bien están descritos en obras y periódicos técnicos, continúan secretos en una porción de pormenores de fábrica, estando éstas completamente cerradas á los curiosos ó visitantes.

En poco más de medio sigló se ha visto variar estos sistemas desde el primitivo método de las forjas catalanas, donde á voluntad se obtenía hierro dulce ó acerado (*corroyé* de los franceses), al de cementación y fusión, que fué la especialidad de Krupp, al Bessemer que ha facilitado el empleo de grandes masas de acero en la industria, así como el de Uchatius, Martín, Siemens y otros, hasta llegar al acero tungstado, cuya fabricación encontramos ya en 1860 en Kaptenberg (Styria).

En 1855 por recomendación de nuestro inolvidable D. Magín Bonet, tenía yo entrada en el Laboratorio del «*Jardin de Plantes*» de París, en ocasión en que Mr. Fremy daba en aquel anfiteatro un curso público de «Metales, óxidos y sus sales». Le oí defender su teoría, y confieso que no me convenció. Habiase sin embargo extendido de tal manera que hasta en los pequeños talleres ó fraguas donde se trabajaban ciertas herramientas, se templaban éstas en agua que tenía en disolución unos cristales de prusiato de potasa. Yo mismo había practicado esta operación algunos años antes, cuando haciendo mi aprendizaje industrial en una de las primeras fábricas de Barcelona me ejercitaba algunos ratos en trabajos de fragua á las órdenes de un *forgerón* (1).

Más tarde en 1862, de paso para la exposición de Londres, me detuve unos días en Paris para abrazar á nuestro malogrado Vallhonesta, que estaba trabajando en el laboratorio «des Gobelins» bajo la dirección del célebre Chevreul. Este profesor, que en la época á que antes me refiero, daba también un curso de Química Orgánica en el *Jardin de Plantes*, cariñoso y complaciente con todo el mundo, recordó el año que asistí á su curso y al de Fremy. Preguntado acerca de cuál era su criterio sobre la composición del acero, díjome: «El acero debe considerarse, en general, no como un cuerpo definido químicamente por la naturaleza de sus partes constituyentes, sino como un estado particular del hierro, producido por la unión de este metal con algunos cuerpos cuya naturaleza es variable».

Esta es la definición que desde entonces he dado en mis cátedras de química

(1) De esto á la creencia que había de que las armas fabricadas en Toledo, debían su bondad al temple especial que recibían en las aguas del Tajo, no hay mucha distancia.

industrial; no dejando de advertir que el acero está sujeto á otras modificaciones que le imprime y modifica el sistema de fabricación.

Siendo pues hoy la cuestión puramente técnica industrial ha sido preciso para entenderse en el comercio, establecer denominaciones especiales para las diversas clases de acero, propias para cada uso; cosa que ha ocupado muchas sesiones y conferencias en el *Instituto del hierro y del acero* que radica en Londres.

Poco difieren entre sí las conclusiones formuladas en los últimos congresos y exposiciones que han tenido lugar en Inglaterra, Alemania y Estados Unidos; y para no entrar en detalles, impropios de este momento, me limitaré á hacer mención de la clasificación propuesta por D. Manuel Malo de Molina, en vista de las conclusiones formuladas en el último Congreso Metalúrgico de Filadelfia.

Clasifica dicho señor los aceros en dos grandes grupos. Corresponden al 1.º todos los aceros obtenidos por soldadura ó aglomeración de partes blandas. Pueden llamarse *aceros soldados*; y comprenden, el que en España se ha conocido siempre por acero natural ó de forja, el acero de pudler y otros.

La segunda clase llamada *acero fundido* comprende todo el que sea obtenido por fusión ó ha pasado por este estado. Se precisan las calidades de los aceros añadiendo al nombre de la clase, el específico, sea aludiendo al sistema de fabricación, sea á su composición: así se expresará si es manganesado, cromado, tungstado, vanadiado, titanado, etc.

Lo dicho basta para comprender que el tungsteno podrá ser sustituído en la fabricación del acero, sea por agotamiento de sus criaderos, sea porque se prefiera otro metal que dé aceros más baratos. Así es que á pesar de las minas de tungsteno que se van descubriendo en diferentes puntos del globo, las oscilaciones del precio del Wolfram reconocen por causa el éxito de los experimentos hechos con otros metales en los grandes centros metalúrgicos, más que la cantidad de mineral de tungsteno disponible.

En estos momentos el Vanadio es el metal que con más probabilidades de éxito sustituirá al Tungsteno en la fabricación del acero; mientras que los electricistas, con el anuncio de las nuevas lámparas de tungsteno contribuirán á sostener los elevados precios de éste.

Apesar del poco tiempo que hace que empezaron los estudios de las propiedades y caracteres del Acero de Vanadio, se han hecho ensayos comparativos con los otros aceros, habiéndose ya formado juicio exacto acerca de su alargamiento y límite de elasticidad, tratándose del acero de barras; así como de su resistencia al choque, tratándose de planchas y del mayor ó menor grado de facilidad para el taabajo; sobre todo para cortar por medio de la sierra las planchas de blindaje incandescentes, operación que es una de las más sorprendentes que hoy se efectúa en los talleres industriales.

El ferro-vanadio se obtiene ya en el horno eléctrico con una ley media de 55 % de vanadio con menos de 2 % de impurezas; utilizándolo los Estados Unidos para dicha fabricación de planchas de blindaje.

Para que todo contribuya á la competencia que los nuevos aceros están haciendo al acero tungstado, se anuncia el descubrimiento de un gran criadero de Vanadio en el Perú.

El metal está bajo la forma de un sulfuro; especie mineralógica no descrita hasta ahora.

Este mineral lo explota una sociedad titulada «American Vanadium Company», la cual ha exportado por el Callao á fines del pasado año la cantidad de 1.000 toneladas de mena, con una riqueza en vanadio, que representa de 25 á 33 % de anhídrido vanádico.

No falta tampoco este metal en España. Hace más de un año tuve ocasión de reconocerlo al estado de Vanadita en un mineral de plomo procedente de la provincia de Badajóz.

La febril actividad que reina hoy en los talleres metalúrgicos y las facilidades que dá para esta clase de trabajos el horno eléctrico, adoptado ya en todos los países productores de acero, son la causa de que cada día se presenten al comercio nuevos productos metalúrgicos obtenidos con gran economía de carbón; cuya composición fijará el químico cuando los metalurgistas entreguen á los laboratorios de ensayo las muestras de acero obtenidas con los ferro-manganesos, los ferro-cromos, los ferro-tántalos, los ferro-uranos, los ferro-tungstenos, los ferro-vanadios y los ferro-títanos obtenidos con las arenas titanadas de las costas de Nápoles ó de Tarana, en la Nueva Zelanda, después de ensayados en los grandes campos de experimentación de que dispone Krupp y otros establecimientos extranjeros, en los cuales los tubos de ensayo de nuestros laboratorios, son sustituídos por cañones, nuestros reactivos por la pólvora y las reacciones, apreciadas por los resultados del choque de los proyectiles contra las planchas de blindaje.

El resultado definitivo de tantos trabajos, quizás no se pueda apreciar hasta que sobrevenga un conflicto entre dos naciones marítimas; y si ha de ser así, quiera Dios, que tardemos muchos años en poder formar juicio exacto de cuál es el mejor acero para planchas de blindaje.

Sevilla, abril de 1908.

378

MEMORIAS

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS Y ARTES

DE BARCELONA

TERCERA ÉPOCA — VOL. VII. NÚM. 5

INVESTIGACIONES DE HIDROLOGÍA SUBTERRÁNEA EN LA COMARCA DE BAÑOLAS (PROVINCIA DE GERONA)

POR EL ACADÉMICO NUMERARIO

ILMO. SR. D. LUIS MARIANO VIDAL

Publicada en septiembre de 1908

UNIVERSITY OF TORONTO

BARCELONA

A. LÓPEZ ROBERT, IMPRESOR.—CONDE DEL ASALTO, 63

1908

INVESTIGACIONES DE HIDROLOGÍA SUBTERRÁNEA

EN LA COMARCA DE BAÑOLAS (PROVINCIA DE GERONA)

Nota presentada por el académico numerario

ILMO. SR. D. LUIS MARIANO VIDAL

en la sesión del día 25 de junio de 1908

En la parte central de la provincia de Gerona, y dentro de un radio de unos 7 kilometros hay tres localidades que son Bañolas, San Miguel de Campmajor y Espolla, donde se manifiestan fenómenos notables de hidrología subterránea. No han sido hasta ahora estudiados y descritos, y esto es lo que me ha decidido á dedicarles durante breves días mi atención, con objeto de que, si no lograse resolver los problemas que presentan, por lo menos sirviesen mis datos y observaciones más adelante para quien con más tiempo ó más fortuna repitiese y completase su estudio.

Bañolas, villa importante de la provincia como centro agrícola é industrial, está situado al lado oriental de un lago al cual debe principalmente su prosperidad. Este lago tiene una figura alargada de Norte á Sur, siendo su mayor longitud de 2208 metros. Su anchura que llega á 568 metros en la parte del lado Sur, alcanza 774 mts. en su parte Norte, de modo que el perimetro ofrece la figura de un 8 que en el punto más angosto solo tiene 264 mts. de ancho (fig. 1).

(1) Su superficie es 995.381 metros cuadrados, ó cerca de 100 hectáreas.

Casi podría decirse que forma parte de él otro lago de 8390 mts. cuad. de superficie que está al S.O., y tan cercano, que apenas hay paso entre ambos. Se llama *Estanyol del Vilar*.

Varios otros pequeños lagos mencionaremos en los alrededores, pero de unos y otros diremos que excepto uno que tiene agua estancada, todos dan agua corriente, producto de ocultos manantiales, cuyo caudal les hace rebosar por escotaduras del perímetro casi horizontal de su borde, afluyendo todas al lago mayor que viene á ser el receptáculo de las aguas de esta parte de la comarca.

Por el lado Noroeste hay el *Estanyol de la ribera Castellana*, que es circular y tiene 16 mts. de diámetro. Sus aguas no rebosan nunca los bordes. Su profundidad es 7'40 mts.

Más al Sur, á unos 300 mts. al S.O. de la iglesia de Porqueras hay otro *Es-*

(1) Tomamos estos datos de la memoria *Aguas de Bañolas* publicada por el Municipio en 1907, y del plano que la acompaña levantado por D. Ramón Gussinyer.

Fig. 1.

Líneas bathimétricas del lago de Bañolas.

tanyol de figura circular de unos 10 mts. de diámetro en el centro de un campo. Aunque dá agua limpia de ordinario, cuando lo ví en abril último era turbia y de color ceniciento. Su caudal era de 1 litro por 1''. La temperatura era la de la atmósfera: 20° Centig.

En la parte Sur del lago y á distancia de unos 400 metros hay;

El *Estanyol gran de Montalt*, de 40 metros de diámetro:

El *Estanyol petit de Montalt,* de 10 metros, y

El *Estanyol de la Cendra*, de 50 metros de diámetro.

Además de las aguas que éstos aportan al lago de Bañolas, hay otras procedentes de varias fuentes que brotan al rededor del mismo por el lado occidental y por el extremo Sur.

La fuente llamada *Dèu de la riera Castellana*, sita en propiedad del Sr. Margarit, á la derecha de este torrente, es un manantial ascendente que aparece entre juncales en un terreno llano á través de un suelo margoso de color ceniciento, que es como se presenta la formación numulítica en todo este país. Dá unos 4 litros por 1'', ó sea 345'600 metros cúbicos al día, y está situado unos 2 metros más alto que las aguas del lago. La temperatura de este caudal es 17° siendo la del aire 9°.

Entre este manantial y la iglesia de Porqueras, brota otro en el paraje llamado *Els Tenyers* en un reducido espacio de 2 metros en cuadro, cerrado entre losas, y que se destina al riego. También rinde unos 4 litros por 1''.

A poco mayor distancia entre Porqueras y el pequeño lago de su nombre, nace en otro juncar un manantial de 1 litro por 1'' aproximadamente, el cual no se utiliza; y dentro de la acequia de desagüe que lo recibe brota con fuerza otro manantial que no dá menos de 2 litros por 1''. Su temperatura era 19° cuando la de la atmósfera era 20°.

Finalmente, entre los *estanyols de Montalt* y el lago de Bañolas, aparece en lo alto del estrecho márgen que separa los campos de la acequia de desagüe, un manantial ascendente en un círculo de 1 metro de diámetro, que dá muy poco caudal, pero que es una verdadera rareza por su posición elevada sobre las tierras que lo rodean.

A estos manantiales de aguas poco potables todas, pero utilizadas para el riego, hay que agregar uno de agua potable llamado *Font de la ribera Castellana* que rinde 1 litro por 1'', y algunos de aguas minerales, como son uno ferruginoso junto á Porqueras, llamado *Font del ferro* que, según noticias, dá cerca de 1 litro por 1'' y á poca distancia del cual brotaba hasta hace poco tiempo uno sulfuroso que hoy está cegado; y al Sur del lago, el conocido con el nombre de *Font Pudosa,* manantial *hidrosulfuroso frio* declarado de utilidad pública, y cuyo aprovechamiento en medicina data de muy remota antigüedad. Su caudal es 4'27 lits. por 1''.

Son, pues, muchos los puntos en que el llano de Bañolas dá paso á aguas subterráneas, y puede estimarse aproximadamente su caudal total,

Estanyol gran de Montalt.	95'040 m.³ al dia
Estanyol petit de id.	48.
Estanyol de la Cendra.	50.
Estanyol de Porqueras.	86'400.
Dèu de la riera Castellana.	345'600.
Dèu dels Teñers.	345'600.
Dos manantiales al Sur de Porqueras. . .	259'200.
Font Pudosa.	369'408.
Font de la riera Castellana.	86'400.
Font del ferro.	86'400.
Total. . . .	1772'048. m.³ diario aproximadamente.

Pero este caudal que en último término va á parar al lago de Bañolas, dista mucho de ser el que rinde éste: pues de su borde oriental parten 5 acequías que atraviesan la población, 4 de las cuales alimentan en repetidos saltos varias fábricas escalonadas, y una se destina exclusivamente al riego. Sus caudales respectivos son los siguientes:

Acequia n.° 1.	98'74 litros por 1″
» » 2.	82'25
» » 3.	157.
» » 4.	197'68
» » 5.	87.
Total.	622'67 litros que representan 53798'69 mets. cúb. al dia: más de 30 veces al que le llega del exterior.

Idea general es en la comarca, que el lago está principalmente alimentado por ocultos manantiales: pero se ignoraba cuantos eran, y los puntos por donde emergen estos afluentes sublacustres: por lo cual procedí á practicar numerosos sondeos, á fin de adquirir conocimiento, no solo de la configuración interna del lago, sino de la naturaleza de sus paredes y de la temperatura del agua en varios puntos del fondo, porque supuse que este último dato sería muy importante para descubrir las bocas de emergencia del caudal. Con efecto, como las experiencias empecé á practicarlas en febrero, y la temperatura del agua en la superficie oscilaba entre 8.° y 9.° C., era de creer que el agua subterránea, procediendo de regiones más profundas, acusaría mayor temperatura que la del lago.

Dispuse, pues, en una lancha un pequeño torno en el cual arrollé un alambre de acero llamado *de piano*, de 1 m. m. de diámetro (1). que pasaba por una polea colgada de una sencilla cábria, y del cual pendía un peso de fundición de

(1) Su resistencia á la ruptura es de 200 kg. por 1 m. m. cuad.

2 kilogramos cuando se trataba de sondear, ó bien una draga, cuando se quería sacar muestra de los materiales del fondo.

La temperatura se tomaba con un termómetro de máxima y mínima encerrado en un tubo de hojalata provisto de agujeros para que entrase el agua y no pasase el fango.

Al principio el sondeo de la profundidad lo intenté con una cinta de medir llevando un peso de 2 kg. al extremo: pero el contacto del agua y la torsión la inutilizaron pronto, y resultó más práctico y expedito contar el número de vueltas que daba la polea, cuya circunferencia era exactamente medida. Además, aun tratándose como en este caso, de profundidades que no llegaron á 100 m., la ventaja de emplear un alambre de acero en vez de una cuerda, se hizo evidente en muchas ocasiones en que hubo que vencer fuertes atascamientos.

Así fueron tomándose las cotas del fondo del lago, mientras con una brújula de alidadas sistema Lebon, que permite parar muy bien la aguja á cada visual, iba fijando los puntos de observación por respecto á otros notables de las cercanías del lago.

Fig. 2

Sonda para tomar muestras del fondo del lago.

La draga que utilicé para levantar muestras del fondo fué del sistema usado por Delebecque en sus experiencias sobre los lagos de Francia. (fig. 2) Es un cono de palastro, invertido, de unos 20 centímetros de diámetro, fijo á una espiga central de unos 40 c.m. de longitud que lleva en su extremo superior un peso de unos 4 kg. á fin de que se pueda hundir el cono en el légamo del fondo, y al cabecear, pueda el borde cortante de éste hincar bien y arrancar muestra de los materiales. Además, y esto es muy esencial, puede deslizar fácilmente á lo largo de la espiga un disco de madera poco mayor que la boca del cono, cuya tendencia á flotar lo mantiene alto, mientras la sonda va bajando: pero al remontarla, la resistencia del líquido le obliga á adaptarse á la boca del cono, impidiendo así que el agua arrebate las materias alojadas en su interior.

El resultado de las cotas tomadas se consigna por medio de las curvas de nivel que se ven en el plano (fig. 1) demostrando que el interior del lago no constituye un depósito único, sino que está formado por dos cavidades distintas por su forma y por su profundidad. (fig. 3)

La mayor, que es la del Sur, es de figura cónica más regular que la del Norte, y su profundidad alcanza (1) 62'50 metros.

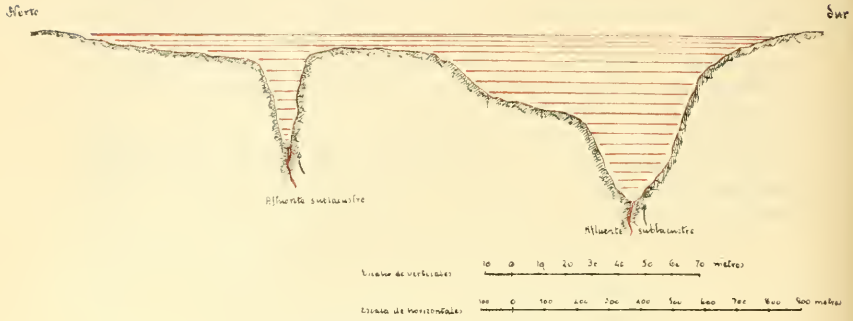
La menor, ó sea la del Norte, tiene una configuración muy irregular: es en general poco profunda, pero en un sitio cercano al borde occidental llega á tener

(1) Hace algunos años, un rápido sondeo que hizo en este mismo punto D. Pedro Alsius, dió 60 metros.

42 mts., con la particularidad de que, es tan reducido el circuito en que puede sondearse esta cota máxima, que viene á constituir un verdadero pozo, y se hace muy difícil situar la lancha en su vertical para poder explorarlo.

En el estrecho que separa ambas porciones del lago, las cotas no pasan de 4 á 6 metros.

Fig. 3.



Perfil longitudinal del lago de Bañolas.

En cuanto á la naturaleza de los materiales del fondo, si se exceptúan dos sitios, uno al Nordeste y otro al Sur en que hay roca, el resto acusó siempre lodos, con la diferencia que, mientras no se alcanzaron las mayores profundidades eran arcillosos, finos, muy adhesivos, del color ceniciento dominante en las margas numulíticas del país: pero los dos sondeos más profundos dieron lodo arenoso y arena de grano fino.

Esta diferencia de constitución, unida á la circunstancia de que el termómetro acusó 17° en el fondo mayor del lado Sur y 12° en el del Norte, siendo 9.° y 8.° la temperatura ambiente, permitió deducir que son ambos puntos las bocas de emergencia que buscamos. Es en efecto natural, que el agua en su corriente ascensional efectúe un verdadero lavado mecánico en los materiales finos de que las margas numulíticas se componen; y al perder su velocidad cuando penetra en los depósitos del lago, suelte en las inmediaciones del punto en que brota las arenas y materiales más pesados, y esparza por la masa del recipiente las partículas más tenues, las cuales en forma de finos lodos van á depositarse en las paredes del mismo.

La composición de dichas arenas, según exámen que ha hecho al microscopio mi amigo D. Ramón Adán de Yarza, consiste en granos de cuarzo y algunos de caliza y de limonita, sin que se vean minerales de orígen volcánico. Accidentalmente he encontrado en estas arenas, microscópicos granos de *chara* de las

especies que viven en el lago, y fragmentos de conchas de *Lymnæa* y de otros moluscos que en él habitan.

Los lodos finos solo constan de arcilla y caliza, y son del todo solubles en los ácidos.

Es digno de notarse, en comprobación de que por los dos puntos que he señalado, penetra el agua en el lago, la coincidencia de que los dos manantiales *Dèu de la riera Castellana* y *Dèu dels Tenyers* que hemos dicho brotan ascendentes cerca del costado Oeste del mismo, me han dado la misma temperatura de 17° que tiene el agua en el fondo de mayor profundidad. Puede muy bien admitirse que unos y otros son manifestación de una misma corriente oculta.

Entre los pequeños lagos *(Estanyols)* que bordean el lago de Bañolas, hay dos que ofrecen una particularidad muy interesante. El *Estanyol de la Cendra* está casi del todo lleno de lodos: cuando lo exploré, la quilla de la lancha que al efecto había hecho transportar cargada en un carro, surcaba la superficie del fango. Pero esta superficie no se mantiene siempre á un mismo nivel: en muchas ocasiones, que no coinciden todas con lluvias en la comarca, sube hasta rebosar los bordes del lago: el agua queda cercada y reducida á la parte central, y entonces, si permanece dias en este estado, llega á secarse la superficie del fango en sus bordes, tomando el aspecto pulverulento de la ceniza, lo cual le da nombre, y sería peligroso aventurarse á pisarlo.

No se conoce la profundidad que alcanza esta masa movible de lodos, cuya naturaleza es la misma que la de todos los del pais. Sumergí un peso cilíndrico de hierro de 3 kg. y acusó 24 m. en el centro del lago y 12 m. á poca distancia: pero no dudo que, á causa de la resistencia que ofrece la masa, un peso mayor hubiera ganado mayor profundidad. La temperatura del fondo fué de 13 $^1/_2$ grados, siendo 10° la ambiente.

En el *Estanyol petit de Montalt* que está cerca de este, y tiene solo 4 metros de profundidad, observé la misma particularidad de ser movible la masa de lodos la segunda vez que lo visité, notando también que no coincide el aspecto ó estado del agua en ambos lagos, puesto que la primera vez el *de la Cendra* daba agua turbia y el *petit de Montalt* la daba clara, y tres meses más tarde sucedía lo contrario.

En el *Estanyol gran de Montalt*, cuya profundidad resultó ser 19 metros en el centro y 10 en el resto, el agua también salía turbia en Abril y dejaba algo de poso ferruginoso en el desagüe, por lo cual se llama también *Estanyol del Ferro*.

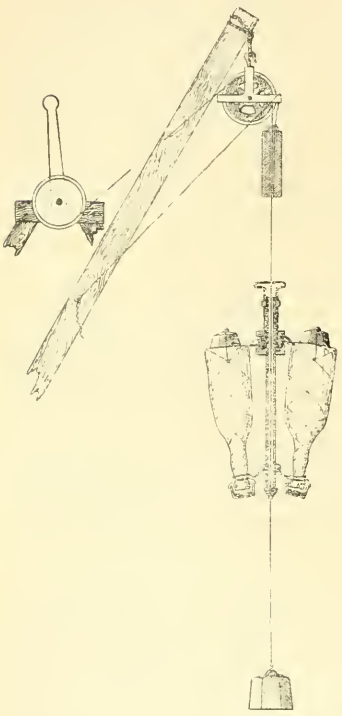
En el *Estanyol del Vilar*, que dijimos estar muy cerca del Lago de Bañolas, no se nota particularidad alguna. El aspecto de sus aguas es el mismo de las del lago grande: no fué posible descubrirle ningún afluente, y los sondeos acusaron poca profundidad que osciló de 5 á 6 metros en todos sus puntos. Su fondo lo constituye un lodo fino ceniciento igual al de todos estos lagos, y su temperatura en el fondo y en la superficie era de 6 á 7 grados siendo 8 la de la atmósfera.

Se ve por lo que acabo de exponer, que estos lagos grandes ó pequeños, no

vienen á ser otra cosa que las bocas de corrientes ascendentes, de un agua termal, que no debe proceder de regiones muy profundas de la corteza terrestre, puesto que no es muy elevada su temperatura; y circunstancias puramente locales pueden haber influido en su mayor ó menor caudal, en el modo de surgir y hasta en su composición particular.

De suerte que era interesante adquirir una idea de la composición química de estas aguas para tratar de establecer entre ellas una comparación: y para ello dispuse un aparato que permitiese tomar muestras á la profundidad que conviniese.

Fig. 4.



No adopté el aparato llamado *botella de Mill*, que se considera el mejor, por lo complicado y costoso, prefiriendo proyectar un sistema sencillo que me ha dado un resultado excelente (fig. 4).

Encima del peso de la sonda, va un tubo de latón de unos 40 centímetros de longitud, de cuyo extremo inferior cuelgan, atadas por el cuello, dos botellas de vidrio de un litro cada una. Van revestidas con alambre galvanizado, lo cual permite que, tomándolas por una anilla que hay en su base, puedan colocarse en posición invertida y suspenderse así cada una en un gancho movible que lleva la parte alta del tubo de cobre. Este gancho, que no es más que un fuerte alambre de latón retorcido, y formando *cabeza* en su parte superior, puede resbalar 3 centímetros á lo largo del tubo de latón cuando convenga: y para ello, se halla sostenido con un cordel debajo de la polea donde pasa el alambre de sonda un peso ó *mensajero*, de unos 2 kilógs. agujereado en su centro, á través del cual pasa dicho alambre. Cuando el aparato ha llegado á la profundidad deseada, se suelta el cordel del *mensajero*, y éste cae por su peso deslizándose á lo largo del alambre, y va á dar un golpe en la cabeza de los ganchos que sostienen las botellas. Se sueltan así las anillas, y las botellas se vuelcan tomando la posición natural y llenándose de agua: el vuelco se facilita cargando cada botella con un peso de 1 kilog. para vencer la tendencia que tienen á flotar. Aunque éstas, mientras

descendían no era fácil que tomasen agua al paso, por impedirlo el aire de su interior, he tenido la precaución de ponerles en la boca un obturador automático para evitar que la presión hidrostática les hiciese entrar algo de agua antes de llegar á la profundidad deseada. Este sencillo obturador es una ligera cápsula ordinaria de estaño, teniendo dentro una rondela de corcho, y sujeta al cuello de la botella por 4 cordelitos que le dejan un juego de 3 ó 4 milímetros. La resistencia del agua obliga al obturador á ajustarse á la boca de la botella mientras baja invertida: y en cambio, al volcarse ésta, el obturador se separa por su tendencia á flotar, y deja escapar el aire y entrar el agua. Al subir las botellas ya llenas, la resistencia del agua exterior mantiene la cápsula adherida á la boca, y no deja que se mezcle la menor cantidad de agua á la que va recogida.

Más adelante expondré el resultado del análisis hidrotimétrico, y las consecuencias que se deducen.

El lago de Bañolas no tiene hoy la décima parte de la extensión que ha tenido en otros tiempos. Por el llano que se extiende en dirección á Gerona se ven señales del antigno lago: y es más, la naturaleza de las aguas del mismo ha debido cambiar, por cuanto no parece formarse hoy tan abundantemente en su seno la toba caliza muy esponjosa que antes se sedimentaba en toda la extensión del lago: forma bancos dentro de la población y cerca de ella, dando un material de construcción muy útil, porque se sacan losas de todos gruesos y dimensiones, y de muy poco peso; de suerte que se levantan las paredes con suma rapidez, siendo curioso ver que si conviene mudar de sitio un tabique, se le traslada entero de uno á otro punto dentro de una habitación.

Estos bancos de *toba* contienen restos vegetales, como son tallos de *chara* y otras plantas acuáticas, y hojas de roble y otras especies terrestres. En la colección del Dr. Alsus, se ve una impresión de una pluma de ave, y fragmentos de huesos humanos, habiéndose encontrado también al romper un banco una moneda de cobre romana.

Por el lado Sudoeste del lago se muestra esta roca en un sitio pintoresco que llaman *las Estunas*, donde los bancos de toba rotos en grandes peñascos, y dislocados, son indicio de haber ocurrido en la localidad una fuerte conmoción del suelo, y de ello son también demostración varias grietas que cerca de la población y aún dentro de ella existen, grietas llamadas *fenents*, que son notables porque engullen toda el agua que les llega.

El Fenent del Drach es el más importante; y gracias á ellas, todas las inundaciones que produce el lago al desbordarse, fenómeno frecuente en épocas de lluvias, cesan á las pocas horas.

Es, pues, evidente, que dentro de los tiempos históricos todos los *Estanyols* actuales formaban parte del gran lago; y ha debido por lo tanto ocurrir dentro del período histórico el fenómeno que puso en seco la mayor parte de su superficie, y que resquebrajó y dislocó la toba caliza de su fondo. Sin duda coincidió con alguna de las grandes conmociones símicas de que ha sido teatro la provincia de

Gerona. Pero no entra en el plan de esta Nota hacer la historia de la formación del lago y de las modificaciones que ha ido sufriendo.

Pasemos ahora á la localidad de San Miguel de Campmajor, que es una de las tres que he nombrado al principio.

Dista 7 kilom. escasamente de Bañolas, y está situado en un vallecito que da aguas al rio Cer, afluente derecho del Fluviá, y está enclavado en la vertiente septentrional de la sierra que cierra por el Oeste la comarca de Bañolas constituyéndola en gran parte la montaña llamada San Patllari.

En este valle hay varios pequeños lagos.

Estanyol de la Cendra: de 5 ms. de ancho por 10 ms. de largo y 2 ms. de profundidad, está lleno de un lodo ceniciento análogo al de los lagos de Bañolas, pero no presenta la movilidad que hemos notado en el del mismo nombre de este último punto. Da un pequeño caudal que vierte en el siguiente.

Estanyol de En Rovira: es circular, de 23 ms. de diám. y 3 ms. de profundidad. No parece recibir más agua que la del anterior y la de un abundante manantial inmediato que brota al pié de una peña y rinde 81'6 lit. al 1", ó sean 7°50 m^3 al día. Su temperatura en abril era 20°.

Estanyol de la Guardia: dimensiones $15^m \times 30^m$, profundidad 3 ms. Durante mi visita daba 232 ms. cúbs. al día; pero de ordinario está seco del todo.

Estanyol sin nombre: es otro que dista 300 ms. al N.O. del anterior y solo tiene 5 ms. de diámetro, dando muy poca agua.

Estanyol de la Sorra (de la arena). Es otro situado unos 100 ms. más abajo del anterior, con un diámetro de 5 ms., en una depresión de márgenes muy acantilados que hay por la ladera izquierda del torrente.

Tiene la particularidad de estar formado su fondo por arena algo grosera, á través de la cual y agitándola en forma de un hervor continuo, pasa una corriente ascendente de agua clara, no menor de 200 m^3 al día.

Todos estos nacimientos de agua se encuentran en el centro y parte baja del Valle. En la parte opuesta, ó sea la parte alta, hay un lago circular llamado *de En Corominas*, que ocupa el fondo de una sima de escarpados márgenes y bordes muy regulares con todo el aspecto de un cráter. El agua no tiene salida, y dicen en el país que nunca han visto variar su nivel. Es tradición que se formó por hundimiento, produciendo un fuerte ruído á modo de un terremoto. En su fondo hay varios robles sepultados en pié.

Esta tradición no es inverosímil, por cuanto á pocos metros antes de llegar á él ví un diminuto lago circular de 4 á 5 ms. de diámetro, producto de un hundimiento ocurrido hace pocos años, de cuyo fondo, 7 metros más bajo que el terreno, salen ó altos y rectos álamos que en él plantó su propietario, y que una parte del año viven inundados como lo estaban el día de mi visita.

Además, en el pueblo se recuerda que el año 1872 formóse con gran estruendo, al Sur de casa Planas, un lago circular, de mitad de cabida que el de Corominas, oyéndose repetidas detonaciones cada vez que se agrandaba por sí sola la

cavidad. Dió al principio un agua turbia, á pesar de ocurrir el suceso en un verano seco; pero más tarde un propietario vecino desvió hacia él el torrente, y hoy está en parte cegado por los acarreos. Este lago se llama de *En Camós* ó de *Plana Ferrana* (1).

A unos 300 metros de este hay el *Estany negre* que dicen ser el más antiguo de la comarca. Sus márgenes de unos 6 metros de alto no dan nunca salida al agua. Tiene unos 30 metros de diámetro y se ven robles sepultados en el fondo.

Resulta pues ser esta localidad muy notable, porque á la circunstancia de ser discontínuas las manifestaciones de hidrología subterránea, se une la de que estas corrientes deben producir en su oculto camino, desgastes en las rocas y arrastre de los materiales, con bastante intensidad para ocasionar el hundimiento del terreno y formarse pequeños lagos que unas veces permanecen siempre encharcados, y otras dan agua corriente más ó menos tiempo (2).

De este modo de formación de ciertos lagos hay numerosos ejemplos en Europa, demostrando la influencia que las corrientes subterráneas ejercen en la topografía de una comarca, cuando la constitución geológica de ésta se presta á que se operen en profundidad arrastres ó disolución de tierras, comprometiéndose así la estabilidad de la superficie. Delebecque, en su obra citada, menciona varios casos, debidos á la circulación de aguas internas por dentro de capas de *arena*, de *arcilla* de *yeso* ó de *sal común*. El lago de Clapes, á 4 kilom. de Draguignan se formó el año 1878 de repente en el terreno jurásico con 40 ms. de diámetro y 36 ms. de profundidad: los embudos llamados del gran Lantien y del petit Lantien, los dos lagos de Tourves, el lago de Besse en la misma comarca francesa, radican en las margas irisadas del Trías y reconocen un orígen análogo.

En cuanto á la procedencia de la corriente que, en nuestra comarca, determina los fenómenos que conocemos en San Miguel de Campmajor, diré que el Sr. Planas, propietario y vecino del pueblo, al preguntarle si había notado relación entre la aparición de estas aguas y la producción de lluvias en alguna comarca, me manifestó que tiene observado, que cuando llueve abundantemente

---

(1) Hallándose en prensa este trabajo, he tenido noticia por un artículo publicado en el «Diario de Gerona» por Mossén José Esteva con el título de *Un nuevo lago en San Miguel de Campmajor*, de que se ha producido recientemente otro pequeño lago en circunstancias parecidas á las de este último. El 25 de mayo de este año, en época de sequía viose enturbiarse el agua del *Estañol de En Rovira*; y seis dias más tarde, á doce metros de su borde S.O. hundiose el terreno con fuerte estruendo en una extensión circular de unos 18 metros de diámetro, sepultándose en parte cuatro árboles que allí había. El agua que enseguida llenó la depresión era turbia: pero á los pocos días fué bajando su nivel y aclarándose. Lo he visto á fines de julio, y aún se conservaba el nivel bastante alto: el agua era limpia y se veian los árboles en parte sumergidos.

(2) Por dificultades imprevistas no ha podido incorporarse al presente trabajo un plano que he hecho levantar de esta agrupación de lagos.

por el lado de Olot (Oeste), al cabo de 24 ó de 36 horas se ponen en actividad los manantiales de San Miguel de Campmajor.

Como Olot es el punto de Cataluña en que con más energía se han evidenciado las fuerzas endógenas, y el gran triángulo que sus manifestaciones abrazan en Cataluña, tiene en su centro aproximadamente la comarca que nos ocupa, no sería imposible que las grietas de la corteza terrestre que dieron paso á lavas y basaltos hoy ya consolidados, lo diesen ahora á las aguas atmosféricas: y no puede dudarse que estas grietas se prolongan por el valle de San Miguel, ya que á cosa de 3 kiloms. una erupción basáltica aparece en San Vicente de Falgons, entre Finestras y Rocacorva.

Fáltanos hablar del célebre manantial de Espolla.

Al norte, ó mejor al N.E. de Bañolas se extiende una vasta meseta surcada por un profundo barranco que desemboca en el Fluviá.

Su superficie está constituída por un *travertino* lleno de cavidades vermiformes, á veces muy voluminosas, que en épocas de grandes lluvias se convierten en conductos de ocultos manantiales que por ellos surgen en gran cantidad, llegando á inundar toda la grande y suave depresión que ocupa el centro de la meseta. Su fuerza es tal, que hay ocasiones en que brotan como surtidores de 20 c.m. y de 40 c.m. de alto, aún á través de la capa de agua que cubre el travertino. La temperatura era en abril 19°, siendo 18° la de la atmósfera. Una de estas cavidades, la mayor, fué ensanchada por un vecino que quiso en tiempo seco explorar á qué profundidad se encuentra el agua cuando no brota, pero el pozo no dió resultado y se abandonó á los pocos metros.

He visitado Espolla en plena época de aguas y cuando se estaban agotando, y aún en este último caso, era muy considerable el volúmen del caudal que sale y se precipita en el barranco con una caída de más de 70 metros.

¿De dónde procede una tan abundosa corriente?

Esto podría deducirse de la coincidencia que se hubiese observado entre su aparición y la producción de tormentas en regiones más ó menos próximas.

Por desgracia, aunque en los alrededores hay algunas masías, no pude adquirir datos concretos: limitáronse á decirme con la vaguedad con que los payeses saben contestar á las preguntas sobre el tiempo, que las *tramontanas* suelen traer *secas*, y que los *levantes* y *ponientes* hacen *venir* las aguas.

De un modo más preciso manifestóme el Sr. Margarit, propietario de Bañolas, que brotan las aguas en Espolla siempre que el lago de Bañolas está alto de nivel.

Aceptando esta coincidencia, se deduce para los manantiales de uno y otro punto una mutua relación que bien podría proceder de que ambos formen parte de una misma corriente, y aunque Espolla está 42 metros más elevado que Bañolas, puede explicarse el hecho de que mientras el lago *crece* en este último punto lleguen á brotar en lo alto de la meseta de Espolla, por las dificultades que acaso encuentren á lo largo de las escondidas vías por donde circulan hasta penetrar

en el lago de Bañolas, las cuales llegan sin duda á hacer imposible que penetre en éste el exceso del caudal ordinario, por lo cual se ve obligado á remontarse hasta la meseta de Espolla.

Análoga coincidencia se me ha indicado para los manantiales de San Miguel de Campmajor. Hemos visto que son inconstantes como lo es el de Espolla, y la misma explicación podría darse para ellos, tanto más cuanto que en todas vemos con poca diferencia la misma temperatura. Pero si además todas estas aguas presentasen una composición igual ó por lo menos análoga, las deducciones podrían tomar más validez.

Por esto he acudido, como antes he dicho, al análisis químico cuyo resultado consigno en el adjunto estado.

ANÁLISIS DE SEIS MUESTRAS DE AGUA, POR D. FRANCISCO NOVELLAS

PROCEDENCIA	Anhídrido sulfúrico	Cloruro de sodio	Oxido de calcio	Oxido de magnesio	Lodo en suspensión	Observaciones
Lago de Bañolas, á 51 metros de profundidad, ó sea 12'50 metros antes de llegar al sitio más profundo del lado del Sur.	0'41	0'031	0'28	0'05	50'50	Los resultados se dan en gramos por litro de agua.
Lago de Bañolas á 31 metros de profundidad, ó sea 10 metros antes de llegar al sitio más profundo del lado Norte	0'39	0'034	0'29	0'05	542'00	
Estanyol petit de Montalt..	1'02	0'046	0'77	0'08	119'90	
Estanyol de la Cendra (Bañolas).	0,43	0'046	0'33	0'08	0.	
Manantial *Dèu dels Tenyers* (Porqueras).. .	1'15	0'060	0'85	0'08	0.	
Estnyol de En Rovira San Miguel de Campmajor.	1'16	0'063	0'86	0'09	0.	

Aunque no figuran en este estado todas las muestras de aguas que tomé, por causa de un accidente ocurrido en el camino de hierro, rompiéndose algunas botellas, no deja de ser muy interesante el resultado, pues demuestra absoluta identidad entre el agua de la *Dèu dels Tenyers* y la que alimenta el *Estanyol de En Rovira*. Esta igualdad de composición entre dos manantiales

situados uno en una vertiente y otro en la opuesta de una misma sierra, á 7 kilómetros de distancia uno de otro, ambos ascendentes, ambos ligeramente termales y con la misma temperatura, aunque el uno sea constante y el otro no, son datos muy concluyentes para deducir que ambos proceden de una corriente común.

Las dos muestras de puntos profundos del lago de Bañolas son de composición idéntica. Ambas presentaron la circunstancia de llevar lodo en suspensión, cosa que no sucedía en otras muestras tomadas cerca de la superficie: pero este lodo tiene una explicación fácil. Procede, no solo del lavado mecánico que opera el agua ascendente en los sedimentos del lago, sino de los que van abandonando en la masa del mismo las aguas turbias que á él llegan desde los pequeños lagos afluentes y que, como es natural, se van acumulando en el fondo.

El *estanyol petit de Montalt* y el *de la Cendra* ofrecen una composición casi igual, como se explica dadas su proximidad y analogías en el régimen. La mayor cantidad de sulfato de cal en el primero tiene su razón de ser en la gran cantidad de lodos que enturbiaban el agua.

He de hacer constar además, que tanto las aguas que nos ocupan como los lodos de los lagos, tienen en general una marcada radio-actividad, como era de suponer, ya que es propiedad muy común en los manantiales termales. Así lo ha observado el distinguido químico especialista en esta materia, Sr. Muñoz del Castillo, á cuya competencia he sometido mis muestras, según expresa el siguiente cuadro:

Núm.	PROCEDENCIA	Resultado Voltios-hora litro
1	Agua del manantial sublacustre del lado Sur, del *lago de Bañolas*, en el sitio más profundo 62'5 metros.	1'50
2	Agua del mismo sitio á 10 metros antes de llegar al fondo..	3'30
3	Agua del manantial sublacustre del lado Norte del mismo lago, á 10 metros antes de llegar al sitio más profundo..	16'00
4	Agua del *Estanyol gran de Montalt*.	3'40
5	Agua del *Estanyol petit de Montalt*..	8'90
6	Agua del *Estanyol de la Cendra*..	5'61
7	Agua del *Estanyol de En Roxira* (San Miguel de Campmajor).	30'67
8	Agua de la *Dèu de la Riera Castellana*.	2'50
9	Agua de la *Dèu dels Tenyers*.	8'40
10	Lodo arenoso del sitio de la muestra de agua núm. 1..	19'60
11	Lodo arenoso del » » » » » » » 3.	0.
12	Lodo arcilloso á 10 metros menos de profundidad que el 11.	16'90
13	Lodo arcilloso del *Estanyol petit de Montalt*..	21'30
14	Arenas del fondo del lago de *La Sorra* (San Miguel de Campmajor). . . .	0.

Resumiendo, se ve que, á juzgar por las analogías de composición y por la

simultaneidad de las crecidas de estos manantiales, hay grandes probabilidades de que las aguas de las tres localidades procedan de una corriente común, por más que como diremos pronto, esta corriente no sea única en su orígen, sino suma ó reunión de otras distintas. La constancia en presentarse unas, y las irregularidades con que surgen otras, pueden explicarse por las diferencias de nivel de sus puntos de emergencia, combinadas con los obstáculos que ofrezcan los trayectos subterráneos.

La dirección de donde proceden, parece ser del lado de Occidente; pero al tratar de precisar el punto mismo donde toman orígen, nacen dos problemas: el del orígen de las aguas *continuas* del lago de Bañolas y de sus adyacentes, y el de las aguas *discontinuas* de San Miguel y de Espolla.

Para estas últimas, ó por lo menos para las de San Miguel, ya queda indicada indicada la idea de que se encuentre en la comarca de Olot.

Para las primeras, en Bañolas recogí la idea de que tienen su orígen en el río Ter, y tal vez en esta creencia se funda el nombre de *Terri* dado al río que nace en el lago. Pero quedaba por averiguar, en el largo curso de aquél, cuál es el punto donde se desvía subterráneamente parte del caudal para ir á alimentar el valle de Bañolas. Este importante dato acaba de proporcionármelo mi amigo el académico D. José M. Cornet y Mas, Director de la «Maquinista Terrestre y Marítima», diciendo que los aforos hechos años atrás con motivo del establecimiento de fábricas á lo largo del Ter entre Ripoll y San Quirse, arrojaron en muy poca distancia, una pérdida de 800 litros por 1″ coincidiendo este punto con uno de los sitios en que las capas geológicas se muestran trastornadas y que se llama *pas dels Carlins*. (1)

Este dato vierte mucha luz sobre el problema que nos ocupa. La disminución sufrida por el caudal del río, resulta superior al caudal (600 litros) aforado en Bañolas, por lo tanto la explicación es posible bajo el punto de vista de la *cantidad*.

Veamos si lo es también bajo el de la *calidad*.

La composición de las aguas hemos dicho que tenía grandes analogías en

---

(1) El curso del Ter entre Ripoll y San Quirse de Besora, por ser normal á la dirección de las capas geológicas, que es de E. á O., descubre en varios sitios estas irregularidades de la estratificación. Vése las areniscas y margas eocenas ponerse verticales junto á la fábrica de Grases (3 kilómetros de Ripoll). Vuelven á levantarse en Terradellas. En el Pas dels carlins junto á la riera de Vallfogona inclinan fuertemente y se llenan de diaclasas. Dóblanse en brusco pliegue en La Escorxada: y por fin, cerca de San Quirse, la sierra de Bellmunt es un bello ejemplo de pliegue francamente acusado por la inclinación contraria de los estratos en sus dos vertientes.

No es pues imposible que por resultado de los movimientos que atormentaron de tal modo estas formaciones, existan grietas y cavidades ocultas orientadas como los estratos, de O. á E. y es perfectamente admisible que ellas sirvan hoy de conducto á las aguas superficiales que pasen á ser subterráneas, sobre todo teniendo en cuenta que la posición geográfica de los puntos citados por respecto á Olot y á Bañolas, favorece esta explicación.

todas las que han podido ser ensayadas: podrá, pues, parecer difícil que unas aguas continuas, debidas á filtración del Ter como suponemos ser las de Bañolas, guarden semejanza con las discontinuas de San Miguel ó de Espolla, si éstas son producto de tormentas ocurridas en Olot (como parece probable). Pero no hay que olvidar que las aguas obedecen en su composición química, á los terrenos que atraviesan: que el Ter, oriundo de terrenos graníticos, pierde pronto la pureza de sus aguas al penetrar en las formaciones margosas del piso Numulítico, que son las que dominan en el largo y quebrado curso de dicho río; que en estas mismas rocas numulíticas que se extienden hasta Gerona, estará abierto el escondido camino por donde dicha filtración circula: y que las aguas pluviales de la región de Olot, si se pierden en el fondo de sus apagados volcanes, correrán por grietas abiertas en las mismas rocas numulíticas, y por ellas irán á mezclarse con las aguas derivadas del Ter, si como venimos suponiendo, suman las continuas y las discontinuas una misma corriente subterránea al acercarse al término de su recorrido: la composición, por lo tanto, de unas y otras, puede perfectamente ser la misma, ó muy parecida.

La termalidad y la radio-actividad que tienen, no son tampoco incompatibles con esta explicación, porque son en general propiedades adquiridas por las aguas de la superficie al pasar á ser subterráneas, y su intensidad depende de la profundidad á que lleguen éstas en su recorrido, y de la naturaleza de las rocas y minerales que encuentren á su paso.

Resulta de lo dicho, que si el problema presenta una solución para el orígen de las aguas de Bañolas, pudiendo afirmarse en el estado actual de nuestros conocimientos, que proceden del Ter, filtrándose subterráneamente á través de los estratos dislocados de la formación numulítica cerca de San Quirse de Besora, queda por demostrar el de las aguas de San Miguel de Campmajor, y es completamente desconocido el de Espolla.

Esto no llegará á averiguarse mientras no se hayan tomado por largo tiempo con precisión y constancia datos meteorológicos de las diversas comarcas catalanas, á semejanza de lo que inició años atrás siendo Alcalde de Bañolas don Pedro Alsius, académico correspondiente, quien hacía sentar en un libro la altura diaria del nivel del lago y el estado atmosférico. Si esta costumbre se hubiese seguido, y se imitase en Espolla y en San Miguel, hoy se tendrían elementos para aventurar una opinión. Se explicaría acaso también por fenómenos meteorológicas y por simples presiones hidráulicas, el hecho tan singular de la movilidad de la masa de lodos dentro de las aguas del *Estanyol de la Cendra* y del *E. petit de Montalt*, fenómenos que, guardando cierto parecido con los *salses* ó volcanes de barro de algunas regiones volcánicas, á primera vista hacen nacer la idea de que el volcanismo terrestre ha tenido gran parte en las manifestaciones hidrológicas de esta comarca.

De todos modos, aunque no sean bien terminantes algunas de las conclusiones que establezco en la presente Nota, creo haber podido dejar sentados varios

hechos que, como dije al empezar, han de ayudar á quienes con más aliento ó más fortuna prosigan estos interesantes estudios.

No puedo omitir al terminar este trabajo, la complacencia y buena voluntad con que me han acompañado proporcionándome toda clase de facilidades, los señores Alsius (padre é hijo), Butinyá (Teniente de Alcalde), Margarit, Hostench y Esteve, á quienes doy con este motivo la expresión de mi agradecimiento.

356

MEMORIAS

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS Y ARTES

DE BARCELONA

TERCERA EPOCA — VOL. VII. NÚM. 6

LA CIENCIA AGRÍCOLA

DISCURSO INAUGURAL DEL AÑO ACADÉMICO DE 1908 Á 1909

POR EL ACADÉMICO NUMERARIO

D. HERMENEGILDO GORRIA

Publicada en noviembre de 1908

BARCELONA

A. LÓPEZ ROBERT, IMPRESOR.—CONDE DEL ASALTO, 63

1908

956.

LA CIENCIA AGRÍCOLA

Discurso inaugural del año Académico de 1908 á 1909

por el Académico numerario

D. Hermenegildo Gorria

Sesión del dia 16 de octubre 1908.

Excmos. é Ilmos. Señores:

Señoras y Señores:

Designado por el M. Iltre. Sr. Presidente de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona, para ocupar este sitio en el día de hoy, reconozco que no tengo condiciones para presentarme ante un auditorio tan ilustrado, y se que todos mis compañeros pueden llenar este precepto reglamentario, mucho mejor que yo; pero antes que negarme á los deseos de la Presidencia, que para mi son mandatos, acepté el encargo, confiado en la benevolencia de cuantos me escuchan, y que solo verán en esto un acto de obediencia.

Debiendo elegir algún tema para esta sesión, dadas mis aficiones, la importancia y actualidad de las cuestiones agrícolas, la transformación que basándose en los adelantos modernos ha tenido la gran industria de la que depende la alimentación de la humanidad, y las primeras materias para casi todas las industrias, creí oportuno ocuparme de la *Ciencia agrícola,* es decir, la agricultura como ciencia, ya que no faltan aun quienes crean que es muy fácil y rutinario ese antiguo arte de cultivar la tierra, y que poco ó nada se necesita para ser agricultor, ni para el rudo trabajo del labrador; y para los que en presencia de muchas fábricas manufactureras les parece que son el súmum en la ciencia industrial, no viendo que la industria de la tierra es tan científica como cualquier otra, y que necesita una suma de conocimientos muy eterogéneos, y factores difíciles de apreciar y preveer, para realizar las empresas agrícolas.

La riqueza y felicidad de los pueblos van ligadas á los progresos de su agricultura; con el cultivo de la tierra, el labrador obtiene el alimento del hombre; es el trabajo más importante, la expresión más sublime de todos los esfuerzos sociales, y la mejor utilidad de todas las potencias latentes de la naturaleza.

Todo converge en el trabajo del labrador; los preceptos legislativos, las experiencias del físico, el trabajo del pobre, el capital del rico; y en su auxilio coadyuvan el calor y luz del sol, el agua, la electricidad, todas las energías. El fruto de su trabajo, es el sosten y alimento de la familia, de los pueblos y manantial inagotable de unión y concordia.

Si reflexionamos cuanto vale y cuanto representa un diminuto grano de trigo, comprenderemos la gran importancia de la agricultura, porque en todos tiempos ha sido objeto de preferente estudio, y que sus adelantos, y trabajos, son siempre paralelos, al estado de civilización é instrucción de los pueblos.

Conforme va progresando la agricultura, se multiplican sus relaciones con las ciencias, de las que obtiene los mayores auxilios y con la industria en general que le presta elementos necesarios. Con la base de algunas ciencias se llega á encontrar las reglas que deben guiar al agricultor en la diversidad de labores aplicadas sirgularmente á cada planta y á cada terreno; siendo botánicamente una sola la especie de una planta, se obtienen variedades para cada terreno, clima y gusto del mercado; y gracias á la especialización de las razas, se ha logrado por los medios zootécnicos, variedades de diversos animales domésticos, que cumplen con funciones económicas muy diferentes.

La relación de la agricultura con las ciencias la divide Moll en dos grupos: en el primero, las conexiones entre los conocimientos y la producción vegetal y animal, comprendiendo: las ciencias físico-químicas y naturales y la zootecnia general y especial; y en el segundo, los elementos constitutivos de la empresa agrícola, la propiedad, capital, trabajo y sistemas de cultivo.

La ciencia tecnológica agrícola comprende como secciones principales: la Agronomía, base científica de la agricultura, que se ocupa del suelo laborable ó agrología, la meteorología, la alimentación vegetal y la preparación de la tierra. La Fitología que examina para cada planta los medios terrestres y atmosféricos, organización de los vegetales y sus funciones como seres vivientes, su multiplicación y cultivo. La Patología vegetal, con la terapéutica, estudio muy moderno, que se ocupa de las enfermedades de las plantas y sus medios curativos. La Zootecnia que estudia la crianza, mejora y adaptación de los animales domésticos, á los servicios que han de prestar. La Mecánica y construcción agrícola, que comprenden el estudio de los instrumentos y máquinas empleadas, y la construcción de las obras y edificios rurales. La Economía rural, aplicación de la economía política ó social, que es hoy una ciencia de la mayor importancia, y que trata de ordenar los elementos que se refieren á la producción agraria, del modo más conveniente para que resulten lucrativas las explotaciones agrícolas.

Las ciencias en las que muy especialmente se basa la agricultura, son: la historia natural, la química, física, fisiología y la mecánica. La exactitud en las

leyes agrícolas, llega allí donde alcanzan las de estas ciencias, pues de su aplicación se forma la que ya boy podemos llamar *ciencia agrícola*.

La agricultura tiene por objeto obtener de la manera más económica la mayor cantidad posible de los vegetales y animales domésticos, los productos útiles al hombre y en las condiciones que más convengan al consumo.

Su estudio y práctica es muy superior y más difícil que ninguna otra industria, y exige en los que á ella se dediquen, conocimientos especiales y mucha perseverancia.

Hasta fines del siglo XVIII en que las ciencias físicas y naturales no tenían gran desarrollo, y los conocimientos agrícolas estaban basados solo en la práctica sin base fija mas que la observación ó la rutina, en esa época, se emplearon ya los nombres de *agronomía* y *agrónomo*, pues hasta entonces no se había sentido la necesidad de distinguir entre los procedimientos técnicos de la agricultura en que se basan las operaciones y manipulaciones agrícolas, y la explicación científica de los hechos observados y de los revelados ó comprobados por la experiencia.

No debe confundirse al *agricultor* que toma la agricultura como una industria de utilidad positiva, con el *labrador* en el que es un oficio, que ejecuta el trabajo sin tratar de su mejoramiento, es la rutina del trabajo, ni con el *agrónomo* que la estudia como ciencia, experimentación y ensayo en reducida escala, para deducir de las verdades científicas, consecuencias útiles que puedan llevarse á la práctica agrícola.

Muchos equivocan lo que es la *práctica* agrícola, confundiéndola con el *oficio* y con la *rutina*. El práctico que es el verdadero *agricultor*, ensaya prudentemente los datos del agrónomo; rehusa las utopias, rectifica errores y no acepta nuevos procedimientos sin su propia experiencia. Debe tomar la teoría como buena, pero no llevarla á los campos hasta que haya recibido la sanción de la práctica, y tener siempre presente el lema «*progreso con prudencia; práctica con ciencia*».

Ceen algunos que se puede ser *práctico* en agricultura sin ninguna instrucción científica, y que la *instrucción práctica* es fácil y sencilla, casi innecesaria; y es que se confunden lastimosamente la *práctica* con la *rutina*. El manejo de una azada, de una laya exige destreza y fuerzas físicas y con la rutina basta; pero la práctica en las labores y en el cultivo exige *instrucción*, que comprende: la *práctica manual*, que consiste en la ejecución de las operaciones que exige la agricultura y que ejecuta el labrador, gañán ú obrero, como son: la conducción de los instrumentos y máquinas, la aplicación de los abonos, la siega y trilla, los riegos, etc.; esta enseñanza es ruda y exige atención para conocerla y practicarla. La *práctica razonada* es un intermedio entre el oficio puramente mecánico y la ciencia agrícola.

Como dice Heuze; «la agricultura es un arte fácil en apariencia, pero muy difícil en realidad; si alguno quiere emprenderlo y enriquecerse se debe dedicar á él por completo y fijar su residencia en el campo; el acierto depende entre otras causas, de tener exacto conocimiento del suelo y clima, de la alternativa de cultivos, una gran actividad y economía de tiempo y trabajo, y una dirección y administración, que impongan en todo la mayor economía y previsión. El éxito de la empresa agrícola, depende muy principalmente de las condiciones del explotante. Con la instrucción práctica, razonada, se llega al buen éxito, con la rutina, todo lo contrario.»

Todos los pueblos han sido prósperos cuando la agricultura era su principal ocupación, y han venido á la ignorancia y á desaparecer, cuando se olvidaron del trabajo de la tierra. La historia de los pueblos antiguos lo atestigua.

El origen del cultivo de la tierra fué unido al de las creencias vulgares de algún personaje heróico ó religioso. Si de esas remotas épocas llegamos á los tiempos históricos, se encuentran prácticas agrícolas en los libros sagrados, en sus poetas y en sus historiadores. Después tratados especiales para guiar al agricultor en sus prácticas culturales.

Persia, India y China, tenían un cultivo floreciente desde muy remota antigüedad; muchos de sus preceptos se consignan en un libro que Ibu-Wah Schials tradujo del caldeo al árabe, dando conocimiento del estado agrícola asiático en la antigüedad.

La prosperidad de Egipto debió ser grande cuando se utilizaban en el riego las aguas del Nilo y se llevaron á cabo grandiosas obras, extendiendo sus conocimientos agrícolas y civilización á diversos países. El abandono de la agricultura por las guerras y conquistas hicieron concluir con aquel poderío.

Ya en tiempo de Homero debía estar muy adelantada Grecia, como lo significa su legislación agrícola; muchos conocimientos nos legaron los griegos, como se deduce de las obras de Theofrasto, Hesiode, Xenophon y los geopónicos, cuyos preceptos agrícolas se compilaron, (se cree que por Cassianus-Bassus, dedicada á Constantino VII), y cuya traducción griega fué impresa en Bale en 153, y después otras traducciones.

Los israelitas se dedicaron á la tierra desde que poseyeron Palestina, llevando de Egipto las buenas prácticas agrícolas, teniendo entonces abundancia, que después perdieron con el olvido á la agricultura.

La gran Roma debió principalmente su riqueza, á su amor y respeto á la agricultura; así como fué el primer día de su decadencia, aquel en que empezó á debilitarse ese entusiasta sentimiento. Todo era abundancia cuando la nobleza y magnates se dedicaban á la agricultara, así como comenzó la miseria cuando abandonaron los campos para vivir en la populosa ciudad. Los campesinos deja-

ron sus faenas para ir á la guerra ó tomar parte en las intrigas cortesanas. Los propietarios llevaron á Roma su gente y allí consumían los productos de la tierra; los vicios se enseñorearon de la ciudad y los pueblos rurales fueron víctimas del hambre y de la peste. Los patricios esquilmaban á sus colonos para sostener un lujo fastuoso, los colonos aborrecían á los patricios que los sacrificaban. Con el establecimiento de la República, la clase agrícola despreciaba el trabajo rural para tomar parte en las luchas del foro; la clase plebeya se igualó y dominó á la patricia; los campos quedaban incultos, la desolación extendiéndose y á la vez la indiferencia por el trabajo, la libertad y la patria.

La vida del campo era cada vez y cada día más odiada, siendo vanos los esfuerzos de Horacio por presentarla llena de encantos en sus célebres epístolas. Todo lo referente al cultivador envolvía un concepto denigrante, *Rusticus* equivalía á grosero, y los municipios rurales eran considerados casi como villas extranjeras. El Gobierno trataba al cultivador como bestia de carga; le quitaba sus mejores brazos para la guerra; exigía impuestos imposibles de pagar los pobres y ambrientos labradores, que preferían la exclavitud á ser propietarios. Se engalana la capital con mármoles, oro y lujo, ocupándose solo de la conquista de pueblos, redactar códigos, y á la vez se esterilizaba la tierra y se cubría de luto la humilde choza, para desaparecer el Imperio bajo una capa de lágrimas, sangre é inmoralidad. Este fué el fin de la gran Roma por desatender á su principal fuente de riqueza, y ese será en todos los pueblos, que desprecien el trabajo agrícola y el amor á la patria.

Los escritos de los autores latinos son la tradición tecnológica de la historia de la agricultura durante unos veinte siglos.

Catón el Censor, dos siglos antes de nuestra era, escribió é hizo experiencias propias, dirigiendo sus fincas á la vez que los asuntos públicos; sus escritos son preceptos que encierran verdades prácticas, ó verdaderos axiomas agrícolas.

Varrón, que murió 26 años (a. d. J.) menciona en sus libros más de 50 autores griegos y latinos, y dice piensa reasumir en tres libros los 26 libros del cartaginés Magon que supo hacerlo de los autores griegos. Dice que la agricultura es una ciencia y contiene principios que hoy se aceptan por la teoría y práctica agrícola.

Columela (Lucio Junio Moderato) ilustre agrónomo que nació en Cadiz á principios de nuestra era, y escribió la gran obra, sus doce libros de agricultura ó de «Re Rustica» de estilo elegante y nutrida de preceptos agrícolas. Se queja de la falta de enseñanza agrícola, que es precisa como ciencia y como arte; y á este efecto dice: «Tenemos escuelas donde se enseña cuanto hay que saber y algo que no debiera enseñarse, y sin embargo, la agricultura ni tiene discípulos que aprendan, ni maestros que la enseñen». También decía sobre esto mismo: «Yo veo por todas partes escuelas abiertas á los retóricos, bailarines, músicos; los cocineros y los barberos están en boga; pero para el arte de fertilizar la tierra, no hay nada, ni maestros ni discípulos.....» ¡Mucho de esto puede decirse hoy

después de 19 siglos! Ocupándose de la economía agrícola, dice que el que se dedique á la agricultura ha de reunir tres condiciones: conocimiento del arte, los recursos necesarios, y voluntad para ejecutar. En fin, la obra de Columela, monumento para honra de la agricultura española, es tal vez la mejor durante algunos siglos y que forma época en la historia agraria.

Palladius, que vivió á mitad del siglo v, escribió sus 14 libros de «De re rustica», que comprenden el resumen de los autores que le precedieron, latinos y griegos; es un almanaque agrícola que contiene reglas, sentencias y refranes agrícolas muy prácticos.

El estado á que llegó la agricultura en la época romana, se deduce de las obras de Caton, Plinio, Varrón, Palladio, Virgilio y sobre todo Columela, honor de España, «que fué el primero que ordenó bajo un sistema regular cuantos datos en su tiempo era posible reunir sobre agricultura».

Expulsados de España los romanos por los godos y éstos á su vez por los árabes, nuestro suelo estuvo convertido en teatro de guerras durante algunos siglos, sin que tal situación permitiese al agricultor dedicarse tranquilamente á sus faenas.

La raza árabe naturalizada en nuestro país, á la par que al arte se dedicó mucho á la agricultura, elevándola á un estado de adelanto que no tenía rival en ninguna otra nación. Las vegas de Valencia, Murcia, Granada y casi toda España, son muestras de riqueza que nos legaron los árabes, y que vienen claramente á demostrar los muchos conocimientos y laboriosidad que tuvieron. El «Libro de agricultura» de Abu-Zacaria, que forma época en nuestra literatura agrícola, debido á este agrónomo árabe español, que vivió en Sevilla, recopila cuanto supo de los agricultores coetáneos, de algunos griegos, romanos y árabes y muy particularmente de la agricultura caldea y nabatea. Importante obra publicada en el siglo XII, traducida en parte en 1751, y más completamente al castellano por D. José Antonio Banqueri, Prior de Tortosa en 1802.

Al terminar en Granada la lucha de reconquista, era tanta la diferencia entre lo que conocían de agricultura nuestros labradores á los del vencido, que se les dió á estos el permiso de permanecer en nuestro suelo, con cuya concesión los Reyes Católicos prestaron un gran servicio á la agricultura española.

Con la protección del Cardenal Jiménez de Cisneros, publicó en Toledo en 1513 su magnífica obra Gabriel Alonso de Herrera, natural de Talavera de la Reina, titulada «Tratado de Agricultura general», la que atendidas las circunstancias de la época y el estado del arte, es tambien uno de los más notables monumentos de la agricultura española. De esta obra se han hecho muchas ediciones y adiciones y ha sido el texto agrícola durante mucho tiempo.

Las obras de Columela, Abu-Zacaria y Herrera, forman época en la historia de la agricultura y son honra de nuestra patria; en ellas se comprende el adelanto que este arte tuvo en España durante los quince siglos de tiempo que hay entre la publicación de la primera á la última.

Durante algunos siglos los españoles se preocuparon mucho en los descubrimientos y conquistas de América, pensando en los galeones cargados de oro, abandonando la agricultura y adormecidos en la ignorancia; á la vez las expulsiones que ordenaron algunos monarcas, el divorcio entre la agricultura y la ganadería, y distracción de capitales para empresas no justificadas, produjeron gran retraso en la producción agrícola y la falta de brazos que se ocupasen en las faenas del campo.

El territorio español estaba vinculado en pocas manos, entre la corona, los títulos y comunidades religiosas comprendían una gran extensión, y si éstas cultivaban por sí mismo las tierras y se ocupaban de la agricultura, las otras muy poco ó nada; pero como de ningún modo el sistema que se seguía podía dar resultados en el cultivo, ni explotar las inmensidades de terreno que poseían, no se implantablan mejoras en los ya grandes estados que tenían y la agricultura en vez de avanzar como en otras naciones, se retrasaba y quedó estancada. Esto ha sucedido hasta hace un siglo; interin otras naciones de Europa, se ocupaban seriamente de sus intereses agrícolas, implantando todas las mejoras que el progreso de las ciencias y artes iban sucesivamente descubriendo. Inglaterra, Alemania, Francia, aplicaban al cultivo cuantos conocimientos en las ciencias físicas, naturales y económicas y en la maquinaria agrícola se descubrían ó inventaban, mejorando su agricultura y aumentando en producción; en una palabra, pensando y trabajando por su suelo que es su patria.

Aunque muchos agrónomos, se ocuparon escribiendo buenas obras de agricultura y ganadería, en general en cuanto á sus aplicaciones puede decirse estaban estancadas, hasta que á mediados del siglo pasado, la agricultura en todas las naciones, podemos decir, se elevó al rango de ciencia, aplicando los conocimientos ya muy extensos entonces de física, química, fisiología y economía, al cultivo y explotación de las fincas rurales.

En nuestro país se da poca importancia al estudio de la agricultura; de los escasos presupuestos que se destinan á la instrucción pública, por el Estado, Diputaciones provinciales y Ayuntamientos, poco va destinado á la instrucción, enseñanza, investigación y experimentación agrícola; se emplean en su casi totalidad en la instrucción literaria y artística.

Y ninguna otra profesión necesita más el concurso de la ciencia que la agricultura, querer sustraerse á ella es correr hacia una ruina cierta. Decía Bacon que «el hombre no puede vencer la naturaleza mas que obedeciendo á sus leyes», si el agricultor las desconoce mal podrá vencerlas, ni obtener utilidad de su industria.

Barral dirigiéndose á los agricultores les decía: «En cuanto á la instrucción á la vez teórico y práctica, debe ser muy extensa; no es necesario ser muy fuerte

en el manejo del arado, como se ha dicho muchas veces; no; pero sí es necesario conocerlo bien, á fin de juzgar las condiciones de los agentes y obreros que lo emplean. Lo que importa saber son las ciencias cuyas aplicaciones han hecho en el pasado y continuarán á asegurar en el avenir, todos los progresos de la agricultura; como son la química, física, mecánica, historia natural, sin contar los conocimientos generales que constituyen cada vez más en nuestras sociedades modernas, el fondo común de instrucción de todo hombre bien educado. Durante mucho tiempo se ha admitido que todo el que en una familia no podía llegar á una profesión liberal con posibilidad de éxito, sabía bastante para ser agricultor. Si se hubiera dicho un mal agricultor, tendría razón; pero para ser un buen agricultor, es necesario poseer una instrucción más variada y más profunda que para bien recorrer cualquier otra carrera; es necesario además, adquirir la instrucción, tacto y espíritu de decisión muy especiales».

Liebig decía, que: «no hay profesión que para ser ejercida de una manera lucrativa exija conocimientos más extensos, que la agricultura; y no hay ninguna en donde la ignorancia sea más grande.»

De estas grandes verdades deberían estar penetrados todos los agricultores, para que dedicándose al estudio, obtuvieran en la producción, la justa recompensa de su trabajo.

No hay que dudar que la enseñanza agrícola es la principal base de la producción y por lo tanto del bienestar y riqueza de la nación, y á ella deben converger todos los esfuerzos de las corporaciones y particulares que puedan así contribuir á esa obra nacional, «*la ilustración agrícola*». Esta debe extenderse desde el pobre labriego hasta el más rico propietario; esta enseñanza debe ir á la cabaña y al pueblo rural, lo mismo que á la gran ciudad.

Desde que Thaër en 1807 estableció en Mœglin, Alemania, la primera escuela de agricultura, que pronto fué elevada á Real Academia, se han ido allí fundando los Institutos agronómicos, las Escuelas superiores, entre ellas la principal de Berlín; existen multitud de Academias y Escuelas prácticas, además de las superiores y técnicas; hay muchísimas escuelas secundarias y agronómicas, granjas-escuelas, escuelas de invierno; muchas especiales de insdustrias rurales y la enseñanza agrícola esta extendida por todas partes y en todos los grados. Además hay en aquella nación gran número de estaciones agronómicas y laboratorios.

Austria y Hungría, tienen un régimen parecido.

Francia, aun impera un sistema centralizador en esta enseñanza, y en gran parte depende del Gobierno; tienen una Escuela Superior el «Instituto Agronómico Nacional», y tres escuelas regionales; hay muchísimas escuelas prácticas de agricultura subvencionadas, granjas-escuelas, escuelas primarias de agricultura, etc., y bastantes estaciones y laboratorios agrícolas.

Italia tiene la Escuela Superior de Milán, otras escuelas, varias especiales, escuelas prácticas, colonias hortícolas, y escuelas elementales de agricultura.

En Bélgica la instrucción agrícola está muy extendida y bien organizada, por las subvenciones que se dan á estos establecimientos instalados por las Corporaciones; existe el Instituto de Gembloux sostenido por el Estado; las escuelas medias y prácticas, las escuelas libres y profesionales, cursos en diversos establecimientos, conferencias en los patronatos y sociedades libres agrícolas, etc.

En Inglaterra la enseñanza agrícola es libre; la iniciativa individual y corporativa lo hace todo. Hay la Estación agronómica de Rothamsted fundada en 1834 por Lawes; su fama es universal y ha contribuído mucho á fundar la ciencia agronómica moderna.

Los Estados Unidos son modelo de enseñanza agrícola y experimentación, tal cual hoy se debe entender y practicar. La enseñanza es libre y las escuelas de todas clases y categorías, están muy difundidas; se especializan mucho en las Estaciones agronómicas, á veces solamente para un solo cultivo, existiendo además varias con igual objeto en diversas regiones; esto hace que se estudien bien los cultivos en cada comarca y los agricultores sepan qué variedades de cada planta les conviene allí cultivar. Según se lee en una Revista del mes pasado, el Ministerio de agricultura se procura que esté confiado á un rico agricultor, que haya hecho su fortuna en la agricultura, y que conozca todos los detalles de esta profesión. A todas las escuelas primarias se les da semillas para prácticas; para los Colegios agrícolas hay una subvención de 125 millones de dollars, á las órdenes del Ministro hay agrónomos y zootécnicos para cuanto se relaciona con las enfermedades y mejoras; se conceden grandes subvenciones á los Institutos de investigación, dedicados al mejoramiento de los cultivos; con objeto de que no decaiga ese trabajo particular y corporativo, si algún Instituto lo necesita, va un sabio agrónomo para dar conferencias y reanimarlos; además continuamente viajan por esos establecimientos, especialistas instruídos, pagados por el Ministerio. Las publicaciones de memorias se hacen por centenares y se reparten gratuitamente á millares; el anuario, que tiene unas 800 páginas, redactado por especialistas, se distribuye gratis en número de 500,000 ejemplares. En fin, el Gobierno impulsa á las Corporaciones, que subvenciona espléndidamente, para que establezcan escuelas de agricultura, y de esta manera las hay por todas partes y con todos los grados de enseñanza y de especialidades; así la instrucción agrícola se ha extendido por todas partes en la república, progresando la producción de una manera extraordinaria, y compitiendo con ventajas en los mercados de las naciones europeas.

Creemos, y los resultados lo demuestran, que el mejor medio de establecer la enseñanza agrícola, es como en Inglaterra y Estados Unidos, que el Estado se limite á proteger subvencionando las escuelas que establezcan las Corporaciones provinciales ó municipales, las Sociedades agrícolas y particulares entusiastas; con lo cual y con mucho menos gasto, habría muchas más escuelas de agricultura, ya generales, ya especializadas, según convenga á la comarca en que se establezcan.

En España hay muy poco en enseñanza agrícola: la Escuela Superior de Agricultura en Madrid, junto con las Estaciones agronómica, patológica y pecuaria, y las cátedras de los Institutos de 2.ª enseñanza. La Diputación de Barcelona sostiene la Escuela provincial de agricultura, (que con una ú otra denominación, data ya de más de cincuenta años); y una Escuela práctica en Vitoria, y algunas agregadas á Comunidades religiosas.

Se comprende, que esto es casi no tener instrucción agrícola, comparándonos con cualquiera nación europea, y que se impone de toda necesidad establecer ésta y en todos sus grados y con todas las escuelas que corresponden á nuestro territorio y población rural.

Entiendo que la enseñanza debe tener varios grados y cada uno depender de diferentes entidades y con diversas condiciones.

La enseñanza superior, ó sea la de Ingenieros agrónomos (y Doctores en agronomía, si así queria establecerse este grado Universitario), su organización y sostenimiento debe correr á cargo del Gobierno, pues su especialidad requiere condiciones científicas que solo precisan á determinado número; además porque se han de dedicar á la investigación y experimentación científica ó en los centros administrativos para cuanto sea necesario al cumplimiento de las leyes que con la agricultura se refieren, y trabajos que les confie el Gobierno.

Al que por cualquier concepto le convenga dedicarse á la explotación industrial agrícola, al propietario, al agricultor, al administrador de fincas rurales, le interesa tener conocimientos científicos y la práctica general y la especial agrícola de determinadas regiones, y necesita menos instrucción teórica que el Ingeniero, por eso corresponde formar un grupo de escuelas de enseñanza media agrícola. Estas escuelas por su carácter regional, deberían ser dirigidas y sostenidas por las Diputaciones provinciales y Ayuntamientos, con subvención del Estado, según la extensión de la enseñanza y resultados que se obtengan, como hemos dicho se hace en otras naciones. Además porque ya sea directamente por la Corporación ó por intermedio de un Patronato, se puede detalladamente en cada región, adaptar la enseñanza á las exigencias de la comarca ó de su comercio agrícola; también porque con mucho menos gasto, se puede sostener la escuela; en fin, y esto es muy esencial, para que dichas corporaciones tengan un motivo más de ocuparse de la producción y progreso agrícola provincial ó local que tanto les interesa, y sin que todo se espere á que lo haga y disponga el Gobierno.

Las escuelas de enseñanza elemental teórico-práctica, dedicadas al cultivador, al capataz agrícola y al obrero, deberían existir por lo menos una en cada provincia, sostenidas y dirigidas por las Diputaciones, Ayuntamientos y Sociedades agrícolas, con subvención del Estado, proporcional á los gastos que tuvieran y á sus resultados.

No basta que las nociones de agricultura se enseñen en los Institutos, es preciso que se extiendan también á los Seminarios y Escuelas normales, especializando la instrucción conforme corresponda.

Las escuelas especiales de horticultura, pecuarias, olivicultura, lechería, y diversas industrias rurales se deberían establecer en centros adecuados á cada una, y sostenidas y dirigidas por las Corporaciones y Sociedades, con subvención del Estado, como se ha dicho para las otras escuelas.

La enseñanza nómada ó ambulante ó sea en las poblaciones rurales, las escuelas durante los inviernos, etc., debían ser establecidas por las Corporaciones y Sociedades, así como también por el Gobierno, pues para tan beneficiosas instituciones todos deben cooperar.

En cuanto á la experimentación é investigación agrícola, que tan necesarias son en nuesto país y cuya utilidad se demuestra bien en otras naciones, creemos, deben ser dependientes del Gobierno y sin escasear los recursos para su trabajo esencialmente científico y de aplicación inmediata. Las estaciones agronómicas, patológicas, pecuarias, etc., y los laboratorios agrícolas, dan un gran beneficio á la agricultura, pues seguidamente al estudio teórico, se aplica á la experimentación práctica en la región, y se obtiene como resultado, una guía segura de mejora y progreso en la comarca agrícola.

El gasto del Estado para las subvenciones á las escuelas de agricultores, sumaría una pequeña cantidad, tal vez no tanto como gastaría para una sola, y así con mucha economía podrían existir varias con buena enseñanza, dirigidas y administradas por las Corporaciones y Sociedades á que más directamente les interesan esas escuelas.

Tal es en pocas líneas el plan que creemos debería seguirse en nuestra nación, y que está de acuerdo con lo que se hace en otras, descentralizando la enseñanza agrícola, que se avienen muy mal con fórmulas generales, ni tener los Jefes é Inspectores á largas distancias.

El estudio de la alimentación vegetal, es sin duda uno de los más importantes en agricultura, y del que se han ocupado célebres agrónomos, químicos y fisiólogos.

Los agricultores antiguos se preocupaban mucho de los barbechos, (que decian descansaban la tierra), de la rotación de cosechas, las fases de la luna, etc., hasta que ya se fijaron más en los efectos del abono orgánico, y durante mucho tiempo la teoría del húmus se siguió en todas partes; fundada en experiencias de Saussure y con hechos mal estudiados, que parecían verdades y puestos en honor de Thaër, uno de los agrónomos más eminentes de principios del siglo pasado, llegó á ser indiscutible, tal, que se deducían consecuencias de la esterilización de los terrenos por el agotamiento del húmus y por la insuficiencia del abono orgánico, presagiándose la miseria y el hambre por la imposibilidad de producir lo suficiente al aumento de población; hasta que á partir de 1840 la teoría mineral de Liebig hizo renacer nuevas ideas en la alimentación vegetal, porque con los abonos minerales se sustituiría al húmus.

Aunque al gran químico Liebig se le atribuye toda la gloria, bueno es citar como lo hace Grandeau, que otros antes, Lavoisier y Palissy, habían observado la alimentación mineral por los vegetales.

El gran problema de la restitución, de Liebig, había sido enunciado en 1563 por Palissy y en 1792 por Lavoisier; y ya era mucho más antiguo, pues nuestro agrónomo Abu-Zacaria en el siglo XIX, decía: «Es preciso restituir á la tierra en forma de abono, lo que élla nos presta en forma de cosechas». Y en más pocas palabras no puede expresarse mejor la ley de la restitución en los suelos laborables.

Entre los hombres eminentes á los que la agricultura debe muchos de sus progresos, hay cuatro en la primera mitad del siglo XIX: Saussure y Davy representantes ilustres de la química y Thaër y Mathieu de Dombasle que representan la alianza entre la teoría y la práctica en el arte de cultivar la tierra, y sus obras significan el estado de las teorías sobre alimentación vegetal antes de las de Liebig.

Saussure es el primero que atribuyó alguna importancia al residuo incombustible de los vegetales; Davy hizo los primeros trabajos sobre el amoníaco en la vegetación; pero ninguno hace indicaciones de la necesidad de restituir al suelo las materias minerales, levantadas por las cosechas, ni que tampoco sean indispensables á la vegetación.

Thaër fundador de la célebre escuela de Möglin en 1810, fué ardiente promotor de la teoría del húmus que consideró como la única substancia que en el suelo proporciona alimento á las plantas, y que los abonos minerales, si no contienen ninguna materia orgánica, operan por la facultad que tienen de favorecer la descomposición. Mathieu de Dombasle, les califica de enmiendas ó como estimulantes de los órganos vegetales.

Payen en 1837, poco antes de la publicación de la obra de Liebig, opina como Mathieu de Dombasle y los considera útiles por su conductividad y por las corrientes electro-químicas que ellos favorecen.

Tales eran en resumen las teorías que servían de base para explicar la alimentación de las plantas, que se suponía enteramente vegetal, hasta que en septiembre de 1840 publicó en Brumswick el gran químico Liebig su obra de «Química orgánica aplicada á la agricultura y á la fisiología», que dedicó á Alexandro de Humbolt y que en su primera página dice: «es la naturaleza inorgánica la que exclusivamente ofrece á los vegetales sus primeras fuentes de alimentación». Contrario á la teoría del húmus y del barbecho, estableció la *teoría mineral*, según la cual, para que un suelo sea fértil, es preciso que tenga á disposición de los vegetales, una cantidad de materias minerales suficientes y en un estado conveniente de asimilación, ya sea que el suelo las contenga ó que se le proporcionen como abono.

Esta nueva teoría destruye las del húmus, del cansancio de la tierra y necesidad del barbecho.

Sus teorías las reasumió Liebig en un opúsculo publicado en Brumswick en 1855, que es poco conocido, y explicando la teoría mineral de nutrición de las plantas en 50 aforismos, muchas de cuyas verdades aun se aceptan ahora. La teoría de la nutrición, del barbecho, de la alternativa de cultivos, el principio de los dominantes en el suelo y las plantas, el modo de analizar el terreno por los vegetales (que presenta Ville diez años después), lo expone con gran precisión Liebig en sus obras ya citadas y en otras dos tituladas: «Cartas sobre la agricultura moderna» y «Las leyes naturales de la agricultura».

Gran movimiento científico-agrícola, promovieron estas obras de Liebig y ya inmediatamente la Real Academia de Göttingue admirada de la novedad de la teoría mineral, abrió concurso con el lema: «Los elementos inorgánicos de los vegetales, ¿son útiles al desarrollo de la planta?» Esto valió un gran trabajo agronómico de Weigmann y Polstorff, que como conclusión dijeron: que la materia mineral es indispensable á la organización de los vegetales y á su desarrollo; que las plantas sufren cuando no encuentran una cantidad suficiente de materia mineral, presentando muchas experiencias en suelos artificiales para demostrarlo. Además de esta Academia, muchos químicos y agrónomos hicieron trabajos de cultivos en soluciones acuosas, como Duhamel, Hassurfrutz, etc., á los que siguieron otros como Sachs, Haudk, Knop y Stohman, y las del germinador Nobbe, todo lo que sería muy extenso describir; realmente en la historia de la agricultura las obras de Liebig marcaron una nueva época y elevó á ciencia, lo que antes era casi un arte, dando verdaderas bases científicas al gran problema de la alimentación vegetal.

Inmediatamente se extendió el uso de los abonos minerales, fundándose fábricas y dando gran horizonte al agricultor, viendo que podía conservar la fertilidad de sus tierras, y olvidar el terrible fin del agotamiento que se deducía por las teorías anteriores.

El imperio de la química fué desde entonces dueño del campo agronómico; el análisis químico de la tierra, el de las plantas y cosechas, determinan los elementos que se extraen y deben restituirse al suelo; las fórmulas de los abonos completos é incompletos, son las nuevas bases de la conservación de la fertilidad de los terrenos laborables. En tan inmensos descubrimientos se basa hoy cuanto en infinidad de obras se ha publicado sobre abonos y su fabricación, y que la industria de los abonos minerales sea actualmente, una de las principales y de mayor utilidad.

Pero en el suelo, en ese gran laboratorio, no solo tienen parte en la alimentación vegetal, las combinaciones que son del dominio de la química, hay también las propiedades físicas que debe reunir la tierra laborable, y precisamente el húmus, el abono orgánico, las favorece y de ellas depende en gran parte, viniendo á ser necesario ese elemento aun que contenga poca cantidad de sustancias nutritivas, pues comunica á las tierras cualidades físicas que le son precisas; así resulta que la combinación de los abonos orgánicos é inorgánicos, son los

mejores y precisos para obtener el máximum de productos ó cosechas, que es la finalidad que se propone el agricultor.

Los descubrimientos del sabio Pasteur, lumbrera del siglo XIX, han sido la base de nuevos horizontes en la agronomía, dando conocimiento de cómo las materias del suelo se descomponen, humifican, forman nitratos, el por qué el nitrógeno de la atmósfera concurre á la nutrición de los vegetales, explicando el carácter biológico ó microbiano de esas transformaciones antes desconocidas; en fin, que la fertilidad de la tierra no depende solamente de su constitución físico-química, sino que está además subordinada á la intensidad de las acciones biológicas, de multitud de seres microscópicos, que constituyen los fermentos del suelo, que en cantidad de millones viven en un gramo de tierra cultivada; en fin, que la tierra es en parte un ser viviente.

La demostración de Pasteur, que las combustiones lentas pueden ser debidas á la acción de micro-organismos, fué el descubrimiento fecundo para la investigación de los fenómenos de la acción vital, base de los modernos descubrimientos, que tanto han hecho progresar la agricultura.

Los trabajos de Schloesing y Müntz, de Winograsky y muchísimos otros sobre los fermentos nitrosos y nitrificación de las tierras; los de desnitrificación biológica, de fijación del nitrógeno atmosférico, los microbios de las leguminosas, la práctica de la inoculación del terreno, la descomposición microbiana de las substancias orgánicas, los microbios patógenos del suelo, las fermentaciones del azufre, del hierro, etc., á cuyo estudio han dedicado y actualmente se ocupan muchísimos microbiólegos, agrónomos y fisiólogos, han formado una teoría de gran alcance en agricultura, cuyas inmediatas aplicaciones no pueden ser ya más felices. Cuanto interviene en la alimentación vegetal, es ya conocido, se sabe de dónde se lo puede proporcionar el agricultor; y el elemento nitrógeno, que tanto preocupaba, ya se extrae del depósito inagotable, del aire, por medio biológico, (como se ha indicado), y por procedimientos químicos y eléctricos. La energía eléctrica que en todas las industrias se aplica, no podía dejar de prestar su apoyo á la agricultura; y efectivamente, es ya hoy un nuevo horizonte en la agronomía; sus múltiples aplicaciones biológicas, en los cultivos, y últimamente en la producción, por el horno eléctrico, del nitrato de cal, que dá este nuevo elemento de abono nitrogenado, viniendo á salvar la deficiencia ó agotamiento que pudiera resultar de otros que están hoy en uso.

Según las condiciones climatológicas y económicas, la explotación y sistemas de cultivos deben ser diferentes.

El cultivo á gran rendimiento ó *intensivo*, es la explotación del suelo á su más alto grado de actividad; saturar la tierra de trabajo y abonos hasta el límite para obtener á precio mínimo grandes cosechas, y así realizar el máximum de

producto neto; es el cultivo á gran capital, mucho abono y máxima recolección; en él el tiempo es dinero, y el gran provecho viene del gran capital; y cuanto éste es mayor, menos cuesta producir igual peso de recolección; la reducción del precio de coste se debe en parte al capital de explotación llevado al máximum; es la agricultura en su estado más avanzado.

En oposición está el cultivo *extensivo*, el más generalizado, que son los de terrenos y trabajos baratos, sometidos al barbecho, al sistema semi-pastoril, en los que la producción es remuneradora cuando esté en armonía con el suelo, clima y medios económicos. En el primero es necesario mucho capital; pues ha de concentrar la acción de las fuerzas, abonos, y todos los medios agrícolas de producción á fin de obtener cosechas máximas; en el segundo con poco es suficiente, pues han de predominar en la producción los agentes que le cuesten menos caros, el suelo y fuerzas naturales más ó menos gratuítas en vez de las fuerzas artificiales.

Aunque el cultivo intensivo «es y será siempre la expresión más elevada del arte de explotar el suelo», ambos llevan en competencia al mercado sus productos; ¿quién vence?; las condiciones económicas lo deciden.

El cultivo intensivo lo regula la población, pues su universalización daría una crisis de superabundancia que sería desastrosa para los productores; y al contrario su abandono daría la carestía ó crisis de la escasez; y hay que evitar esas situaciones, arreglando el cultivo y variedad de nuestra producción, basándola en nuestro consumo nacional y nuestra exportación, y para ello aprovechar las condiciones de nuestro suelo y población rural. Aprovechar las condiciones naturales elevándolas á su mayor utilidad, y con el capital menor que en ese caso sea posible emplear, es un intermedio, es el *cultivo mejorante*, cuyo objeto es, aumentar las aptitudes productivas del suelo, para hacer más abundantes y lucrativas las cosechas, en relación con los medios culturales y económicos con que pueda funcionar la empresa agrícola.

Mejorar el suelo con labores profundas y abono, para un cultivo extensivo, y según las condiciones, el barbecho, utilizar todas las circunstancias naturales que son favorables eligiendo la clase y selección de plantas, que den en ese caso mayores rendimientos; tal es el cultivo mejorante que puede aplicarse en los extensos territorios que hoy cultivamos, rascando la tierra, con malos arados y peores semillas y sin atender á las condiciones agronómicas y económicas, que son la base de la explotación; y así después con el aumento de utilidad y el ahorro, crear el capital para cultivos más intensivos, pues realmente la finalidad agrícola es lo que se gasta por hectólitro de producción, no por hectárea de cultivo.

Para adquirir el capital necesario al gran cultivo, hay; el empréstito, la división del suelo equilibrado con los recursos del cultivador y la creación del capital por el mismo agricultor, que aunque no tan rápido, es el medio transitorio y que se consigue, mejorando las labores, abonos, etc., de las tierras, y con el aho-

rro y aumento de producto llegar al cultivo intensivo á gran capital. Esto exige amoldarse á las fuerzas expontáneas de la naturaleza, fertilizar lentamente, contentarse con pequeños aumentos de producción, y con poco capital ir acumulándolo con el tiempo.

Hay que distinguir mucho lo que es la agricultura científica y la agricultura industrial; la primera es la base de la segunda, y ésta es el objetivo de la explotación. La primera absteniéndose de toda idea de lucro, dirige su trabajo á la investigación de lo incógnito, agrandando los horizontes de la ciencia agrícola, dando grandes servicios á las aplicaciones, marcando las rutas malas y buenas que puede encontrar el agricultor; la segunda ó agricultura industrial ó explotación agrícola, toma aquellos consejos y experiencias provechosas, tiene en cuenta todas las reglas científicas del cultivo y las evoluciones económicas que van sucediéndose en el mercado; es decir, obtener la mayor utilidad de las condiciones naturales y económicas del suelo. Como ejemplo diremos que del valor de las cantidades de nitrógeno y carbono que contienen las cosechas, dos terceras partes, las proporciona la naturaleza, el aire, con la condición de dar al suelo los elementos, labores y demás que son precisos; la luz y calor solar dan al terreno una inmensidad de calorías que el vegetal utiliza, con la nutrición; en estas bases pues se apoya el cultivo sideral ó por sideración, cultivo conjugado de plantas diferentes que pueden venir simultáneamente en el mismo suelo sin perjudicarse. Los abonos minerales son el gran auxiliar de este sistema tan conveniente de cultivo, y que recibe muchas combinaciones, incluyendo en ellas el llamado Solari, de que tanto se ocupan modernamente los agrónomos.

Muy especialmente en el cultivo sideral puede decirse, que el hombre, infinitamente pequeño, envuelto en la inmensidad de esa potencia, de las fuerzas naturales, su función no es producir, es dirigir esas fuerzas, con los medios que la ciencia le proporciona.

Ville dá mucha importancia á la sideración, que permite reducir los gastos de cultivo, fertilización barata del suelo y obtener buena cosecha; á ello dice se llega: por la sideración de agostamiento, que es cuando por un cultivo de otra segunda planta, se ahogan las malas yerbas; la sideración de fertilización por el uso de las leguminosas y complemento de abono mineral; sideración forrajera ó la asociación de los cereales y leguminosas; la sideración superpuesta ó de Gaudet, y la nitrogénica de Berthelot; todas partiendo del principio que ciertas plantas toman directamente gran cantidad de nitrógeno de la atmósfera.

Se ve, por lo tanto, cuán importante es el sistema de cultivo y el estudio científico que exige para que la explotación agrícola sea lucrativa.

De las 50.451,688 hectáreas de extensión total de la península, Baleares y Canarias, hay 21 millones de superficie cultivada, con producción de abono de

unos 37 $^1/_2$ millones de toneladas, pues nuestra riqueza pecuaria va en descenso; resultará si se tiene en cuenta las pérdidas, que no llegará á media tonelada, el abono con que naturalmente pueden contar los agricultores, por cada hectárea de cultivo. Cantidad insuficiente, pues son precisas unas diez toneladas; el resto hay que sustituirlo con los abonos llamados químicos ó minerales. Por eso en nuestro país, escaso en ganadería estante, la cuestión de los abonos, y de la fertilización de los suelos laborables, tiene una gran importancia.

Boussingault en términos generales decía que llamaba abono, á todos los agentes de que dispone el cultivador para reparar, conservar y aumentar la fecundidad del suelo; por eso incluía en ese grupo el yeso, la marga, abono orgánico y cenizas.

Los adelantos modernos, muy recientes, de la agronomía, hacen definir la fertilidad, como la resultante de las propiedades físicas, químicas y biológicas del suelo. Una tierra rica en principios fertilizantes es productiva, cuando sea activa, es decir, capaz de digerir sus propias reservas, cuya función varía según los medios, los fermentos y las condiciones climatéricas que exaltan ó paralizan su virulencia ó su trabajo. Si se tiene en cuenta la riqueza y productividad, diremos que un suelo naturalmente fértil es el que puede satisfacer integralmente á las necesidades de la vegetación, la más exigente, por sus propios recursos, es decir, sin que sea necesario recurrir á las aportaciones exteriores. Pero las cosechas agotan las tierras y la noción de fertilidad es relativa, y el suelo será relativamente fértil ó suelo activo, si posee una capacidad digestiva suficiente, tanto respecto á sus propias riquezas como á los materiales que se le incorporan, para poner siempre á la disposición de las plantas su racionamiento máximo.

La fertilidad se aprecia por métodos empíricos y científicos ó analítico. Poner un suelo en valor, es hacerle propio á la producción, darle los medios de proporcionar el máximum de materia vegetal aprovechando las facultades que tenga, acrecentándolas ó creando nuevas; y los esfuerzos del agricultor han de ser, exaltar la fertilidad y mantener la productivilidad; pues suelo rico, productivo ó fértil, no es lo mismo.

Estas indicaciones bastarán para comprender la diferencia del concepto y estudio de la fertilización de los al que hace bien pocos años se tenía; antes, á lo más con el análisis químico del suelo en nitrógeno, ácido fosfórico, potasa y aún la cal, y promedio de cosechas, se tenían los datos completos para formular un abono ó plan de fertilización; este concepto es más complicado y ha de tenerse en cuenta otras varias circunstancias. La eficacia de los abonos, su valor cultural, las influencias mejorantes, son estudios que no hacen tan sencillo, como solo químicamente se creía, el problema de la fertilización del suelo.

Los estudios de la capacidad digestiva de las plantas respecto á los abonos y la migración de los principios inmediatos; la actividad química y biológica de los suelos; la capacidad productiva de los mismos; lo que ya se llama raciones alimenticias para producir el máximum posible; la ley de los máximos y mínimos

y estado de equilibrio entre los elementos nutritivos; el agotamiento de los suelos, y su riqueza integral, utilizable y disponible; el coeficiente de productibidad; la compleja función de la arcilla, y otros muchos problemas bien modernos, son hoy objeto del estudio científico de los abonos y fertilización de los terrenos.

Se comprende, pues, el adelanto que en la aplicación y utilización de los abonos, ha tenido la Agronomía y que sin un estudio (no tan sencillo como algunos créen), no se llega á conocer esta parte tan importante de la alimentación vegetal, cuya resultante es la producción llegada al máximum ó la pérdida de capitales para fertilización de terrenos mal estudiados.

Otro de los estudios importantes en agricultura es la Meteorología agrícola, que se ocupa de la atmósfera y las leyes de sus movimientos, en cuanto interesa á la agricultura; ella ha de servir de guía al cultivador, para ejecutar en tiempo oportuno las labores, elegir los cultivos y la recolección de productos.

Como toda ciencia tiene su ideal, que es la investigación de las causas, y generalmente éstas se basan en el principio de Faye, que si dos series de fenómenos por desemejantes que sean, siguen exactamente el mismo período, deben estar relacionados con la misma causa.

Esta idea de los períodos ha sido muy fecunda en meteorología; el período de las manchas solares y perturbaciones magnéticas; el período de Brünckner fundado en las observaciones pluviométricas; los períodos lunares estudiada en la Estación climatológica agrícola de Juvissy, y en esta misma Flammarión estudió la absorción de los rayos caloríficos y luminosos por las plantas, las temperaturas del aire, de los vegetales, del suelo, de las aguas pluviales y subterráneas, la acción de las diversas radiaciones del espectro solar en la vegetación y seres vivos, las calorías recibidas y las transformaciones de la energía solar, de la que depende íntimamente la vida terrestre, son estudios de gran importancia.

La meteorología agrícola, rama de la meteorología general, estudia la acción que tiene cada meteoro sobre las tierras y los vegetales (fisiología vegetal); los medios para remediar los desastrosos efectos de algunos de éllos (práctica agrícola); empleo ó utilización gratuíta de la fuerza que pueden proporcionarnos (economía rural); conocer las épocas de esos meteoros, para prevenirse á su utilización, ó evitar sus efectos nocivos (previsión del tiempo); relación entre los cultivos y épocas en que deben efectuarse (climatología agrícola).

El estudio de la acción de los meteoros respecto á la agricultura, es muy importante. Por ejemplo: la influencia del calor sobre el suelo, los vegetales y los animales: en lo primero por la absorción y capacidad calórica de los suelos, que Phandler, Vogel y otros, han hecho valiosas experiencias; respecto á la marcha de la temperatura en la tierra Becquerel, y Edmoud; sobre desecación Masure, Maistre; de contracción Schluber, de la acción química Lefour, etc.

La acción del calor sobre la planta ó sea sus acciones fisiológicas y físicas, son de mucho interés, ya por la determinación de las temperaturas específicas, las máximas y mínimas, y la temperatura óptima; las integrales caloricas, la influencia de la temperatura sobre la respiración, la foliación, floración y fructificación y determinación de las regiones agronómicas. Sobre todo esto han hecho notables experiencias Deherain, Sachs, Vaulebell, Marie-Davy, Houzeau, Boussingault, Gasparin, etc. Es ley en Agronomía, que para una misma región y una misma variedad, cada vegetal llega á sus fases vegetativas cuando ha recibido una cantidad de calor que le es específica.

El tiempo que dura la vegetación, se expresa en fórmulas algebraicas, ó sea su velocidad evolutiva; la de Coutagne es algo complicada, y para su uso hay que construir una curva, desarrollo en función de las temperaturas, deduciéndose gráficamente la temperatura óptima. Otra fórmula más sencilla es la de Boussingault de la cual se deduce, que la duración vegetativa está en razón inversa de la temperatura media en la que se efectúa la vegetación, resultando, que el producto de la temperatura por la duración es constante; pero esta fórmula no es verdadera más que para una misma variedad y una misma región; Quetelet y Babinet, proponen también otras fórmulas.

El punto más interesante para muchos observadores en la práctica de la meteorología es la previsión del tiempo, es decir, que será mañana!; respecto á lo que con gran optimismo dice Dollet: «Hay meteorologistas que se ocupan especialmente de la discusión general de una gran masa de observaciones, compulsando numerosos documentos, estableciendo la marcha de un fenómeno y penetran hasta su constitución intima. No estamos tan lejos (dice) de esto como podría creerse; los grandes centros meteorológicos recogen innumerables observaciones y ya leyes fijas permiten conocer algunos de los resultados del complicado problema cuya solución es la previsión del tiempo». Ya Lavoisier en unas notas sobre meteorología, indicó la posibilidad de preveer el tiempo estableciendo gran número de instrumentos que dén resultados comparables.

No podemos entrar á indicar los diversos medios en que se basan la previsión del tiempo á corto y largo plazo; son muchos los procedimientos más ó menos aproximados y muchísimos los metereologistas que de ello se ocupan; podríamos citar la organización que tiene el servicio meteorológico de los Estados Unidos, Inglaterra, Francia y de otros países en los que se dá la importancia que merecen estos estudios y trabajos. En España solo podemos citar los del infatigable Sr. Arcimis, que publica el Boletín del Instituto Central meteorológico, en el que además del estado general atmosférico, dá las notas sobre el tiempo probable para diferentes regiones de España. También el Observatorio Astronómico de Madrid, se ocupa de las observaciones meteorológicas de muchos observatorios y resúmenes mensuales, que se publican anualmente en un tomo.

Uno de los adelantos modernos más importantes que ha tenido la Agricultura, son las máquinas, por cuyo concurso se ha llegado al gran cultivo, producción y explotación de que hoy disfrutan muchos países.

Si reflexionamos que es muy corta la fecha en que se usaban los toscos arados de madera, la hoz y el látigo, para remover la tierra, segar y trillar, á los modernos arados eléctricos, las segadoras atadoras y las trilladoras mecánicas; ¡qué diferencia tan inmensa!; el pobre gañan, de motor de fuerza que era, por las máquinas se ha elevado á cultivador á dirigir y ejecutar sin ningún esfuerzo esas rudas operaciones.

A la mecánica y construcción de máquinas, debe la agricultura en gran parte su progreso y desarrollo. Esa ciencia redimió al obrero agrícola, haciendo que los animales ejerciesen la fuerza que á él se le exigía; la misma va redimiendo á éstos, por medio de la aplicación del vapor ayer, de la electricidad mañana. A la mecánica debe la agricultura las labores profundas que son tan beneficiosas; el aumento de producción y la baratura de las labores del campo.

En el cultivo extensivo, que es el generalizado en casi todas partes, las máquinas, los arados, rastras, estirpadores, desterronadores, etc., son principal elemento, para aplicar con utilidad el sistema de sideración, y como consecuencia el cultivo mejorante, el cual deberían estudiar y poner en práctica nuestros agricultores, para aumentar los productos de sus fincas.

La agricultura, como toda industria, tiene por finalidad el beneficio de la empresa; para el agricultor su objeto al explotar el suelo, es obtener una buena utilidad á su trabajo y capitales; es diferente al agrónomo, que en sus estudios examina cuanto puede ser útil al agricultor y efectúa las experiencias para probar la utilidad ó no, de determinados procedimientos de cultivo.

Sería inútil producir mucho si la venta no es remuneradora; las leyes de la producción y del mercado han de ir acordes; la importancia de la buena venta de los productos, domina todo cuanto se refiera á la empresa agrícola. La economía rural, tiene por objeto precisamente el estudio de los elementos que influyen en la producción agrícola y la manera de que resulten más lucrativas las explotaciones; es una parte importante de la ciencia agrícola, y muy diferente de la Agronomía y Zootecnia; es hoy una de las ciencias que merecen mayor estudio, pues al fin la Agricultura, en general, es una empresa industrial y mercantil que exige administración y capital, y sin éstos no se puede aplicar con éxito las ciencias á los trabajos rurales.

La economía rural es muy moderna; actualmente se dá una dirección á su estudio bastante diferente al que tenía á mediados del siglo pasado; entonces (como es la Economía de Boussingault impresa la segunda edición en 1851), se ocupaban de lo que es dominio de la Agronomía y algo respecto á la propiedad

territorial, trabajo y capitales, refiriéndose á determinado país, como el tratado de Economía rural de Inglaterra, Escocia é Irlanda de Leonce de Laverque, impresa la 1.ª edición en 1854; esta obra tiene por tema, el de Montesquiu: «los países no son cultivados en razón á su fertilidad, sino en razón de su libertad». El curso de Economía rural española de Hidalgo y Tablada impresa en 1898, también tiene ese objeto especial, aplicado á nuestra nación.

El antiguo profesor de agricultura, Morquecho y Palma, en su Economía rural publicado en 1858, ya presenta otro plan de estudio muy distinto; se ocupa primero de la economía rural analítica, y después de la organización de las empresas rurales; ya va al sistema de estudio analítico y sintético.

Londet en 1863 publicó su magnífica obra «Tratado de economía rural», que aún sirve de texto en muchas escuelas, y en ella demuestra, los medios analíticos de evaluar todos los agentes que intervienen en la producción agrícola y su relación entre éllos; lástima que no se haya publicado la parte sintética. Su obra lleva el lema: «La Economía rural tiene por objeto enseñar al cultivador á producir con utilidad».

Muy notable es la obra impresa en 1879 «Curso de economía rural» de Lecouteux, Profesor del Instituto agronómico nacional de París, y lleva por lema el de Levergue: «No hay buena práctica agrícola sin una buena situación económica»; el 1.er tomo lo dedica al estudio de la situación económica, especialmente de Francia, y el 2.º á la constitución de las empresas agrícolas. En el año 1903 Foncier, ha publicado su obra de Economía rural, que trata de los capitales; factores externos é internos, tierra, combinaciones elementales y economía comparada; Bahier en sus elementos de economía y administración rurales, impreso en 1864, empieza por las nociones elementales de Economía pública, aplicación de ésta á la economía rural como de interés general; después la economía rural privada y la administración rural; y así podríamos citar otros muchos.

Hoy la economía rural tiene en nuestro concepto mayor extensión; además del estudio de los capitales agrícolas, trabajo y tierra ó economía analítica de la agricultura, ha de ocuparse de la Administración y contabilidad, organización de las empresas rurales, situación comercial y económica agrícola de las naciones, su tráfico mercantil, las crisis agrícolas, la estadística de producción, consumo y exportación, la legislación que afecte á la agricultura y comercio agrícola y el estado social de cada país.

Ante la situación económica actual, se presentan los siguientes problemas: ¿Hasta dónde la agricultura progresiva debe elevar sus cosechas para obtener la máxima utilidad á sus capitales? ¿Son las grandes cosechas las que dan los mayores beneficios, y en qué límite debe fijarse para obtener el mayor tanto por ciento al capital? ¿En qué situaciones económicas conviene cada clase de cultivo, intensivo, mejorante y extensivo? ¿Hasta qué límites pueden llegar el valor de todos los capitales agrícolas empleados en la explotación? ¿Qué síntomas pueden indicar la proximidad de las crísis agrícolas y cómo disminuirlas ó evitarlas?

¿Cómo contrarrestar los efectos de los nuevos mercados, los progresos agrícolas, y los centros de gran producción que amenacen los de nuestro país?

Además hay necesidad de que la alimentación sea barata, y tan vital problema depende de la agricultura, ¿qué puede hacerse en esta cuestión de gran interés nacional? ¿Cómo se ha de alimentar el país por el país mismo? ¿Cómo competir en nuestro mercado con los productos agrícolas extranjeros y exportar los productos españoles? ¿Cómo conseguir el sistema de residencia en la explotación agrícola, que tanto contribuye á la prosperidad, y hasta para vigorizar nuestra raza? ¿Qué se ha de hacer para extender el cultivo á los inmensos terrenos que aún tenemos incultos y aumentar así la riqueza y población rural? ¿Cómo establecer el crédito agrícola, que es realmente el crédito nacional? ¿Cómo se puede aumentar la enseñanza agrícola y la asociación?

Estos problemas y otros muchos, son objeto de la Economía rural, así como lo que en legislación se relaciona con la agricultura; y en fin, corresponde también á su estudio las relaciones entre la tierra y el capital, para realizar el máximum producto neto, y en esto entran los sistemas de cultivo, que dependen de los dos factores que hay que tener en cuenta en la agricultura practicada industrial y comercialmente (que es como únicamente es hoy posible); el uno que es el valor relativo de los diversos agentes de la producción que la agricultura pone en vigor según los medios económicos, y el otro es el valor de los productos que se llevan al mercado, en donde la concurrencia universal está sostenida por el progreso agrícola y la facilidad económica de los transportes.

Uno de los asuntos económicos que actualmente llaman más la atención, es la crisis agrícola actual, la cual depende de circunstancias técnicas, económicas, políticas y sociales, entre las que pueden indicarse las siguientes:

El utilage mecánico moderno si bien ha influido en el aumento de producción, no ha disminuido el trabajo, como prueba Leonce de Lavergue, presentándose la paradoja económica de Lavasseur (información económica americana 1894), que: «el precio en venta de un producto dependiendo del salario de los obreros, precio de las materias primeras, interés de los capitales y utilidad del agricultor, es posible, gracias á la ciencia, crear un producto más barato con materias más caras, salarios más elevados, interés mayor del capital, y mayor utilidad para el agricultor.

El exceso de producción influye económicamente en la crisis agrícola, por más que Mr. Imbart no opine así y diga finalmente, que el equilibrio entre la producción y el consumo se restablece; sí, pero es después de grandes pérdidas.

La falta de industrias rurales, las enfermedades de las plantas y apizootias y las malas cosechas, son también causas de la crisis.

Entre las circunstancias económicas, la baja de los precios, tiene gran importancia; León-Beaulieu dice, que esta disminución de los precios es una manifestación de una ley económica, la tendencia á una menor inigualdad de condiciones; y Gregory King presenta como ley económica que la disminución ó aumento de

las cantidades está en razon aritmética, y determina un aumento ó disminución de los precios en razón geométrica.

La concurrencia en los mercados por la facilidad y baratura de los transportes, que dán una desigualdad en la balanza comercial de importación y exportación; así como la exportación americana de productos, son todas causas, especialmente esta última, de la crisis y que merecen detenido estudio.

Las admisiones temporales, los depósitos (reales ó ficticios) y las mercancías vendidas á plazo, los intermediarios y la alza de los salarios, son también causas que influyen en la crisis, aunque algunas de éllas no estén establecidas en nuestro país; la inestabilidad gubernamental, falta de representación agrícola, y los impuestos, son circunstancias de orden político, que así como la disminución de población, absenteismo, falta de enseñanza agrícola, socialismo agrario y crédito agrícola, son circunstancias que influyen todas en la crisis actual.

Los remedios para aminorar ó evitarla, dependen de multitud de circustancias y actividades, en las que el Gobierno, las Corporaciones oficiales, las Sociedades agrícolas, industriales y mercantiles, y cuantos se interesan por la producción, tienen que estudiar en su respectiva esfera, no esperando que con barreras fiscales, con aranceles, que son solo paliativos, pueden evitarse las situaciones económico-agrícolas que originan las crisis, pues no hay agricultura sin buena situación económica, y ésta es lo primero que tiene que mejorarse.

Nuestra agricultura atraviesa un período poco próspero y todos estamos obligados á procurar su mejoramiento. El problema es difícil, pues durante el último siglo, las naciones europeas y América, han progresado mucho, llevando á la agricultura, la ciencia, el arte y los capitales, y nosotros, aunque en algo hemos seguido ese camino, ha sido con poca velocidad, encontrándonos hoy menos pertrechados para la lucha económico-agrícola con que empieza el siglo XX; esta distancia entre el recorrido científico y económico que nos falta para igualarnos, exige un mayor esfuerzo que el que paulatinamente vayan desarrollando aquellas naciones.

Nuestros recursos se mermaron con las guerras civiles y coloniales del siglo que terminó, absorviendo en ellas y en perpetuas discusiones políticas, tiempo y grandes capitales, desatendiendo los intereses agrícolas.

La inestabilidad de los gobiernos y aún de los sistemas político-administrativos, han sido también de consecuencias fatales para la agricultura.

El dedicarse la juventud á las carreras universitarias y profesionales, á los destinos del Estado y á lo que llamamos política, ha hecho desaparecer del campo y de los pueblos rurales, los que después, ya hombres, formando familias, hubieran sido inteligentes agricultores, buenos administradores de su propiedad,

procurando gran progreso en la producción y de fecunda enseñanza para sus obreros y labradores.

El sistema absenteista es fatal para nuestra agricultura; á ningún industrial se le ocurre que sea un buen sistema administrativo y de explotación el vivir lejos, en otra población, de donde él tiene su fábrica; lo natural es vivir en ella, ó muy próximo, y estar siempre á la vista de su industria y de sus operarios. ¿Cómo queremos buscar ganancias en la propiedad rural, cuando se abandona la fábrica (la tierra), no se ven á los operarios (parceros, colonos, arrendatarios ó jornaleros), ni se vive en la propiedad casi nunca durante el año? ¿Cómo desde la populosa ciudad, con vida holgada y llena de necesidades, se quiere que por sí solas las tierras den mucho, y éllos por manos ajenas ó mercenarias, reciban en su residencia (ó de su administrador), grandes productos de su propiedad? ¡Cuántos hay que casi no conocen los linderos de algunas de sus fincas! No se dirá lo mismo del industrial manufacturero.

Si en nuestro país hay gran afición á los estudios del Médico, Abogado, Sacerdote, Militar, etc., no sucede lo mismo para la agricultura, y son escasos los que á su estudio teórico-práctico se dedican. Hay más, tenemos ilustradas personalidades que sobresalen en el Foro, en las Ciencias y en las Artes, pero no se ven de igual modo en la Agricultura.

Es muy satisfactorio para Cataluña recordar, que si en muchas de nuestras capitales se ven estatuas inmortalizando estadistas, sabios, militares y artistas, no las hay para los agricultores, sin embargo de que muchos las han merecido; solo puedo citar, para honra de esta tierra Catalana, y orgullo de sus buenos y entusiastas agricultores y amigos, la eregida en San Sadurní de Noya al gran agricultor, al buen patricio, D. Márcos Mir, en la que sus convecinos han escrito esta merecida dedicatoria: «Els pagesos á son Mestre»; tengo una satisfacción hoy poder recordar ante esta Academia al que fué tan ilustrado agrónomo Catalán; mi buen amigo.

En agricultura no basta producir y producir mucho y barato, es preciso vender; es necesario mercados de segura y útil salida á nuestra producción; es preciso regular en el interior nuestro mercado, á las condiciones productivas de nuestro suelo; mejorar el precio de coste de los productos que puedan sostener la competencia con sus similares en el extranjero; en fin, estudiar como lo hacen Alemania, Inglaterra, Suiza y Francia, todas las cuestiones que se relacionan con su *economía rural nacional*, para alcanzar gran exportación y disminuir la importación, para armonizar todos los intereses interiores, no llegando casos como los actuales del vino y del alcohol, que leyes que acababan de discutirse y se creian favorecedoras para los agricultores, resultan ahora que éstos mismos las consideran perjudiciales. Tal vez sea falta de estudio de nuestra economía rural; estudios que hoy tanto preocupan en todas las naciones y á los que se dedican estadistas y sabios; ciencia difícil complicada y de soluciones muy circunstanciales, pero que prevée ó atenúa muchas crísis agrícolas y equivocaciones como

la que citamos; pero desgraciadamente en España á élla se dedican muy pocos.

Si examinamos las condiciones en que hoy se desarrolla nuestra explotación agrícola, veremos, que son muchas las causas de su mal estado, y principalmente las siguientes: la falta de instrucción y costumbres agrícolas; el absenteismo, indiferencia y descuido en que tienen sus fincas muchos propietarios; la falta de afición á las lecturas agrícolas; el poco fomento de la población rural y la emigración; la aglomeración de las fincas en grandes extensiones difíciles de administrar, ó en pequeñas y distantes que impiden las mejoras agrícolas; la falta de vías de comunicación y mucho precio en los transportes; impuestos muy elevados y no equitativos ni basados en una estadística; falta del crédito y capitales agrícolas; poco desarrollo de la asociación para fines puramente agrícolas; y falta de estudio de las condiciones de cultivo en cada comarca, para aumentar beneficiosamente la producción y la exportación.

Para evitar estas causas y mejorar nuestra agricultura, es necesario el esfuerzo de todos; en primer término el Gobierno y las Corporaciones provinciales, municipales y agrícolas, y las personas versadas en las ciencias para que las apliquen y enseñen en bien de la agricultura, y para que muchos se dediquen á las explotaciones rurales; que á los hijos de los propietarios territoriales, se les convenza de las ventajas que obtendrán dedicándose á la explotación de sus tierras; y á los labradores que no piensen encontrar en lejanas tierras, lo que con el trabajo hallarán en la suya y enmedio de sus familias y convecinos. Coadyuvando todos en bien de la Agricultura, cada uno en la medida de sus aptitudes y medios de que disponga, conseguiremos con constancia y trabajo, elevar la producción agrícola de nuestra patria, para que sea rica y feliz.

HERMENEGILDO GORRIA

Barcelona 16 de octubre de 1908.

MEMORIAS

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS Y ARTES

DE BARCELONA

TERCERA ÉPOCA

VOL. VII. NÚM. 7

SESIÓN SOLEMNE

DEDICADA

á honrar la memoria del

SR. D. ANGEL DEL ROMERO Y WALSH

ACADÉMICO NUMERARIO

Y PRESIDENTE QUE FUÉ DE LA MISMA CORPORACIÓN

26 de mayo de 1900

Publicada en enero de 1909

UNIVERSITY OF TORONTO

BARCELONA

A. LÓPEZ ROBERT, IMPRESOR. — CONDE DEL ASALTO, 63

1909

382

M. Iltre. Sr. D. ANGEL DEL ROMERO Y WALSH

SESIÓN PÚBLICA EXTRAORDINARIA

del día 26 de mayo de 1900

en honor del académico difunto

Sr. D. Angel del Romero y Walsh

Bajo la presidencia del Excmo. Sr. D. Silvino Thós y Codina, Presidente de la Corporación, y con asistencia del Dr. D. Ramón Codina Länglin en representación de la Excma. Diputación de esta provincia, del Sr. D. Juan Mutgé en la del Excmo. Ayuntamiento constitucional de esta ciudad, del Dr. D. José Casares en la del Ilmo. Sr. Rector de la Universidad literaria, de D. Francisco de Bofarull en la de la Real Academia de Buenas Letras, de D. Joaquín Puigferrer, decano del Colegio de Abogados, en la de dicha Corporación, de D. Rómulo Menta en la del Fomento del Trabajo Nacional, de D. Pelegrín Casades y Gramatxes en la de la Asociación Artístico-arqueológica, etc., etc., ocupando sitios de preferencia los hijos del difunto académico, cuya memoria se trataba de honrar, la señorita D.ª Carmen del Romero y el Sr. D. José del Romero, juntamente con los Sres. Académicos y llenando el salón de actos una distinguida concurrencia, dió comienzo á las nueve y media de la noche la sesión, y previa la venia de la Presidencia, el Sr. Académico doctor D. Santiago Mundi pasó á leer la siguiente memoria necrológica:

NECROLOGÍA DEL Sr. D. ANGEL DEL ROMERO

leida por el académico numerario

Dr. D. Santiago Mundi Giró

Excmo. Sr.:

Señores:

Enalteciendo las cualidades, que durante la vida adornaban á un finado, ciertamente que le honramos; mas casi siempre, por reflexión recae el honor sobre el autor de la necrología. Tal sucede, en el caso actual, pues, son de tal valía las dotes que integraban á Romero, que me considero agradecido á vosotros, ya que permitís que en este momento pueda reseñároslas. La honra que me concedeis es de las mayores que me habeis otorgado. Comenzaré indicándoos á que debí la suerte de haberle conocido. Habíame encargado, esta Real Academia, la comisión de explicar, durante los dos cursos de 1876 y 1878 una cátedra de Geometría analítica á la altura de las entonces casi desconocidas obras de Salmon, Hesse, Painvain y Carnoy. Al estudio que tuve que hacer para salir airoso de mi compromiso, atribuyo la gloria de haber obtenido, por unanimidad en rigurosa oposición la cátedra que desempeño en nuestra Universidad. Entre los numerosos oyentes, que asistían á mis explicaciones, recuerdo aún hoy con orgullo, á mis queridos amigos y sabios compañeros D. Carlos Ferrer, D. Ramón de Manjarrés, D. Francisco de P. Rojas, á nuestro querido actual rector D. José Ramón de Luanco y al malogrado D. Francisco Dunand. Entre tan ilustre auditorio, excitóme poderosamente la atención, por el interés y concentración con que seguía mis lecciones, un caballero ya algo canoso, que tomaba sus notas y que me hacía discretísimas observaciones, terminadas las explicaciones. De tal peso fueron éstas, que movieron mi curiosidad, por cuya causa pretendí saber cuáles eran sus condiciones personales; fué entonces, cuando supe su nombre, apellidos y profesión diciéndome que era coronel retirado del cuerpo de Ingenieros.

Como, á la sazón, se había presentado una vacante en nuestra corporación, parecióme que podía llenarla dignamente, pues que demostraba entusiasmo para la ciencia, y descubría en él, un criterio claro y exacto; por lo que preguntéle, si aceptaría, en caso de ser nombrado académico. Siempre recordaré que su contestación fué: que con ello alcanzaría él la mayor honra á que podia aspirar, pues jamás podia tener la esperanza de poder ostentar el título de individuo de una corporación á la que debía sus primeros conocimientos en Matemáticas y en la que habían brillado tantos ilustres varones, entre ellos alguno pariente suyo. Pro-

púsele pues, á la Academia y ya sabeis, si fuí afortunado en mi pretensión, pues no encontró resistencia ninguna para ser admitido. De como cumplió, después, en su nueva vida académica lo declararán, en alta voz, los trabajos, que hoy se leerán en esta sesión y en el fondo de nuestro corazón lo tenemos grabado, todos los académicos, pues á cualquier parte, donde dirijamos nuestras miradas vemos huellas profundas de su benéfico paso por esta casa. Exigióme que le apadrinara en su ingreso, no podeis imaginar con cuanta alegría satisfice su deseo y con cuanto orgullo lo recuerdo actualmente.

Comencé, pues, considerando á Romero como uno de mis alumnos predilectos; mas luego el caudal de conocimientos que en él vislumbré, el atrevimiento que demostraba para toda clase de reformas y su laboriosidad á toda prueba hicieron que se trocara aquel epiteto por el de verdadero amigo y que le tomara alguna vez, como consejero en las cuestiones que se me presentaban. Por su mediación, principié á comprender á Steiner, á Staudt y á Desargues, así como acabé de conocer mejor á Chasles, á La Gournerie, al gran Abel y á varios otros sabios más; pues su magnífica librería, por cierto muy bien provista, á todas horas estaba abierta á mi disposición. El favor que más debo agradecerle, y me complazco en declararlo, fué el haberme aconsejado que sustituyera las teorías complementarias de la obra de Ronché que yo explicaba en mi cátedra de Geometría por la «de posicion ó der Lage» de Staudt que con un método y sencillez incomparables, sin mezcla ninguna de cálculo, alcanza los mismos conocimientos que su hermana la «analítica» de Descartes, con no menos generalidad y con mucha más rapidez. Los resultados obtenidos en mi cátedra han evidenciado la certeza de sus aseveraciones.

Por todo lo referido, ¿no es natural, que me considerase obligado delante los académicos, en presencia de su familia y del público que nos escucha, á rendir hoy un tributo de justicia y de admiración al que fué mi alumno, mi ahijado, mi amigo y mi consejero? Cumplo con ello, un deber de conciencia, muy grato á mi corazón; solo deploro que, quizás, mi pluma no sabrá trasmitir cuanto yo le dicte. Si tal acontece os pido me dispenseis el atrevimiento; fijaos, solo, en la buena intención que me guía. Reclamo, pues, vuestra benévola atención, por lo que os quedo á priori profundamente agradecido. Como, para nosotros, el hecho más interesante de la vida de Romero, fué su ingreso en la Academia, no extrañareis que divida el presente trabajo en dos partes: la primera, relato del período anterior al nombramiento de académico; y segunda, reseña de cuanto hizo en esta corporación, hasta su fallecimiento.

I

Fácil es comprender, que siéndome casi del todo desconocido durante el primer período, no he tenido otras fuentes que su brillante y limpia hoja de servicios en el ejército y alguno que otro dato que pude recoger del mismo interesado

en íntima conversación. Así he podido averiguar que vió la luz en esta ciudad el 7 de mayo de 1823 y que sus padres eran el capitán de caballería D. Angel Romero Sánchez Navarrete y la Sra. D.ª Matilde Walsh de Hotsenths. Las buenas cualidades de los hijos constituyen la principal gloria, la que más enaltece á sus ascendientes; así es, que me basta haber sabido las dotes que adornaban á mi amigo, para deducir que sus progenitores atesoraban toda clase de perfecciones.

Consta además, que la cuna de sus conocimientos matemáticos fueron las lecciones que recibió en las cátedras que de antiguo tenía establecidas nuestra Academia. Habíame D. Angel enseñado, un ejemplar de las tablas de logarismos de Lalande, que guardaba con religioso respeto, que consideraba como una verdadera joya; fué el primer premio, que con su aprovechamiento conquistó en este recinto.

Por regla general, los hijos de los militares, siguen la profesión de las armas, probablemente debido al respeto y veneración natural, que profesan á aquéllos á quienes deben su ser. No podía, por lo tanto, mi amigo, faltar á esta costumbre, que por lo generalizada, podríamos considerar casi como ley; mas queriendo armonizar su inclinación á la milicia con su naciente afición á la matemática, dirigióse al distinguido cuerpo de ingenieros, que, sin pretender causar ofensa á los restantes del ejército, consideramos como el más científico. Los conocimientos que aquí, había adquirido, sirviéronle, para poder entrar sin dificultad en la Escuela de Guadalajara. Después de brillantes exámenes fué declarado cadete el 10 de septiembre de 1839, á la edad de diez y seis años.

Los colegios militares, tienen la buena costumbre, con el afán de estimular á sus alumnos, de calificarles, en cada curso según su mérito relativo, designándolos por un número de orden, tanto más bajo, cuanto mayores son sus conocimientos. Pues bien, á pesar de haber tenido por compañeros al sabio físico don Ildefonso Sierra y al general D. Carlos Ibáñez, de envidiable reputación europea; conquistó de momento el número uno de su promoción, lo que significaba que sus profesores le consideraban el más inteligente de todos sus condiscípulos. A los dos años justos de su ingreso ascendió á subteniente y continuó sus estudios con igual éxito. En el último curso, sin embargo, presentóse empate en la calificación entre Sierra y Romero y como éste era más joven que aquél, otorgaron al primero el número uno y á D. Angel el dos. Más lógico, según mi criterio, hubiera sido, el procedimiento inverso, pues si dos alumnos alcanzan igual resultado, es mayor el mérito en el más joven y merece, por lo tanto, mayor recompensa, Salió pues teniente con el honroso número dos y al abandonar la escuela vióse lo que le querían y consideraban sus profesores. Buena prueba de ello fué que el brigadier San Pedro, director de aquel establecimiento, propúsole con viva insistencia que permaneciera en la escuela como ayudante profesor, con la pretensión de que más tarde adquiriera en París los necesarios conocimientos para convertirlo en profesor de Física y Química. Tales deseos del jefe, significaban evidentemente marcado aprecio y estimación á mi querido amigo; mas á

éste, en su juvenil ardor parecióle muy científico, pero demasiado tranquilo y poco militar, el porvenir á que se le destinaba y rehusó tan honroso ofrecimiento.

Bien pudo el novel teniente saciar su entusiasmo guerrero, pues tomó parte en gran número de combates, durante los cuatro años siguientes á su salida del Colegio, ya que desgraciadamente nuestra nación estaba á la sazón sumamente revuelta. Resultado de su negativa destinósele á la primera compañía de pontoneros, que en nuestra ciudad, se ocupaba de la rectificación de su ciudadela. Prontamente debieron abandonar esta tarea para marchar á Madrid con el general Serrano é incorporarse luego á la división de Roncali que se dirigió á Córdoba. Después de este paseo militar por Castilla y Andalucía regresó en el mismo 1843 á nuestro principado para encontrarse durante octubre y noviembre en el sitio y asalto de Gerona y en diciembre en el bloqueo y rendición del castillo de San Fernando en la capital del Ampurdán. En ambas luchas demostró Romero gran valor y extremada serenidad, en particular en las alturas de Aviñonet, donde los sublevados se habían hecho fuertes, pero que tuvieron que desalojar después de sufrir una tremenda derrota. Por su heróico comportamiento diéronsele las gracias en nombre de S. M. y ganóse la cruz laureada de San Fernando y el grado de capitán de infantería.

Casi, sin descanso en el febrero del siguiente año (1844) se embarca para Alicante á fin de rendir aquella interesante plaza. Varios fueron los hechos de armas en que demostró su valor, para alcanzar la victoria definitiva, siendo el combate de Las Palmas, el que decidió el éxito de la campaña. Terminada ésta, marcha á la importante plaza de Cartagena, que estaba asimismo sublevada y contribuyó eficazmente á su rendición completa, después de un encarnizado bloqueo. No podemos dejar de mencionar el arrojo que tuvieron él y toda su compañía, contribuyendo muy eficazmente á sostener la retirada del barrio de San Antón. Por todos estos servicios obtuvo la efectividad de capitán de infantería á la edad de 21 años. En los cuatro sitios de Gerona, Figueras, Alicante y Cartagena pudo aunar sus conocimientos científicos de Ingeniero á su pericia militar, serenidad y valor y esta congruencia de aptitudes es lo que caracterizaba á nuestro Romero.

En septiembre de aquel mismo año regresa á Barcelona por haberle destinado á la dirección subinspectora de Cataluña. Ocupóse entonces en los estudios preliminares del ensanche de nuestra ciudad que á la sazón impulsaba el Barón de Mer y que tan rápido incremento debía luego alcanzar, desarrollándose el plano que tan magistralmente presentó posteriormente nuestro sabio D. Ildefonso Cerdá. Complacíale este trabajo, pues se ajustaba á su carácter reformador, no obstante tuvo que abandonarlo al siguiente año (1845) por haberle confiado, no siendo sino teniente en el cuerpo, el mando de la compañía tercera de minadores, para que marchara á Manresa á fin de fortificar su recinto. Mientras estaba en esta tarea ascendió en 30 mayo de 1847 á capitán de ingenieros por rigurosa antigüedad como se asciende en todos los cuerpos facultativos.

Como si no bastara el movimiento vertiginoso á que se le había obligado, nueva real orden destínale á la dirección subinspectora de la Isla de Cuba, otorgándole en recompensa de su traslado á Ultramar la efectividad de comandante de infantería. Embarcó, pues, en este puerto el 28 de octubre del mismo 47 y no llegó á la Habana hasta el 6 de diciembre. Todavía en aquella época, no estaba establecido el servicio directo del cuerpo de ingenieros de caminos, canales y puertos, así es que mi amigo tuvo que verificar funciones de ambos institutos, ocupándose en un sinnúmero de proyectos y dirección de toda clase de obras. Fueron tantos y de tal valía, los servicios prestados en la gran Antilla, que será difícil referirlos todos sin olvidarme alguno; procuraré, sin embargo, dar noticia de los principales que pude averiguar.

A su llegada á la perla de las antillas, como la llamábamos todos los españoles, cuando no se nos había hecho pasar por la deshonra de su expoliación, fué nombrado en comisión con el capitán de navío D. Ramón Acha para reconocer la costa, preparar su defensa y proponer un medio fácil de transmitir las noticias de un punto á otro. En particular lo que realizaron para establecer un apostadero marítimo en el viejo canal de Bahamá y alumbrar la costa Norte de la isla, dió orígen á una célebre memoria en que se hacía aplicación del sistema catadióptrico de Fresnelt y que mereció elogios y distinciones del general Carrillo, subinspector de la isla. Más tarde fué designado para relevar al comandante López en la dirección del camino de San Diego de los baños, que debía construirse, invirtiendo solo los escasísimos recursos pecuniarios y personales que podía proporcionar la Junta de Fomento de la Habana. Comprenderemos la importancia y dificultad de esta obra, si nos fijamos no solo en la falta de recursos sino en la sobra de dificultades de su ejecución; pues, se trabajaba en un terreno pantanoso, tenían que ir á buscar á más de dos leguas de distancia la piedra que debían emplear; y la madera estaba doblemente lejos que la piedra.

Pasó posteriormente á la ciudad de Trinidad por habérselo encargado la comandancia de aquel departamento. Realizó entónces los siguientes trabajos. Proyectó una carretera militar entre el pueblo de Albares y la villa de Santa Clara, en el centro, pues, de la isla. Tuvo bajo su dirección el estudio y ejecución de un muelle en el puerto de Casilda, que es el correspondiente á Trinidad. Logró la conducción de agua potable á esta última población y un crecido número de anteproyectos de varias vías de comunicación. Toda esta multitud de trabajos los desempeñaba al mismo tiempo que atendía al servicio del cuerpo en todas sus vastas ramificaciones; ya sea en los cuarteles, ya en los hospitales, tanto de Trinidad como de Santi-Espiritus, que pertenecía al mismo departamento.

A pesar de cuanto hemos relatado, solo seis años, permaneció Romero, en la Isla de Cuba. Durante su estancia, vióse colmado de honores superiores á los que podía esperar, atendiendo su juventud. Solo contaba 29 años cuando se le concedió el grado de coronel de infantería. Luego fué nombrado jefe de la brigada que se constituyó para formar el proyecto de defensa del Departamento. Pos-

teriormente recibe un voto de gracias, que el Congreso de los Diputados acordó conceder al pueblo, autoridades, ejército y marina por su conducta fiel y valerosa en las tentativas de invasión que pretendían realizar numerosos piratas. No obstante, el exceso de trabajo, y las malas condiciones climatológicas del archipiélago antillano lograron alterar su salud viéndose precisado, en consecuencia, á regresar á la península. Al despedirse mereció de su jefe el general Carrillo una honrosísima comunicación por los servicios prestados en aquellos países que hasta nuestros tiempos han sido dominios españoles.

Casi no tenía tiempo de desembarcar cuando se le nombra en comisión facultativa para explorar las dilatadas costas de Africa y hacer un reconocimiento de todos sus presidios. El resultado fué la publicación de una interesante memoria en la que se hacían atinadísimas y profundas observaciones, de las que seguramente pudieron aprovecharse los caudillos que llevaron nuestras huestes á la gloriosa guerra, que luego se desarrolló en el imperio marroquí.

Fué comandante militar de Lérida, cuyo destino desempeñó, no mas que algunos meses, los suficientes para verse sorprendido por los acontecimientos del año 1856, producidos por rivalidades entre Espartero y Odonnell. Con su tacto y diplomacia, pudo lograr que la ciudad permaneciera fiel á las órdenes del gobierno. Destinado luego á la provincia de Tarragona, designósele también para la comandancia militar de tan importante plaza, cuando mayor era la exaltación de los ánimos. La fortuna fuéle asimismo propicia en Tarragona, pues logró mantener el orden público, á pesar de las cortas fuerzas de que disponía. Durante este mando hubo un hecho de armas en Reus (19 de julio), donde si los contrarios demostraron gran valor, no fué inferior el que demostró Romero y su gente, ya que logró derrotarlos. En recompensa de los servicios prestados en ambas provincias se le concedió la encomienda de Isabel la Católica. Posteriormente pasó á la comandancia de nuestra plaza, confiándole además la dirección del parque de campaña y la jefatura del Detall general. En 10 marzo de 1857 ascendió por antigüedad á comandante en el cuerpo.

Junto con el distinguido coronel Casanova fué nombrado para emprender un viaje científico, á fin de estudiar prácticamente las fortificaciones que desde el año 1815 hasta nuestros días se habían construído en la Europa central. Visitaron París, Lyon y las principales ciudades de Alemania, recorrieron las orillas del Rhin y del alto Danubio y formularon, en consecuencia, un proyecto, que caracteriza el sistema de las defensas permanentes de nuestra nación en la época presente. Inmediatamente pasaron á Madrid, para dar cuenta detallada de los trabajos de la comisión; aprovechando Romero la ocasión para participar asimismo cuanto había hecho respecto al ensanche y fortificación de nuestra ciudad condal.

El gobierno llegó á abusar de mi amigo, tal era la fama que iba adquiriendo. Ya le nombra, en comisión extraordinaria, para la formación de un proyecto completo con el objeto de fortificar la heroica Gerona; ya le destina á la coman-

dancia de ingenieros de Mahón para dirigir las obras del castillo de La Mola; ya, por fin, enviáronle á Ceuta, cuando la campaña africana había terminado, á fin de hacer un detenido estudio de su puerto y fortificaciones. Este último trabajo fué tan notable que el cuerpo de ingenieros creyó conveniente darlo á la estampa y sirve hoy día de estudio y consulta. Por todos estos servicios facultativos recibió la visita del Sr. Inspector, quien expresóle con grandes elogios el agradecimiento que por ellos se había conquistado y que S. M. en recompensa le otorgaba la encomienda de Carlos III.

Durante los 22 años y 9 meses que sirvió en el ejército, ya habeis notado la actividad que desplegó, llenando sus deberes militares de un modo tal, que pocos le habrán aventajado; sin embargo, su particular inclinación se dirigía cada día más al estudio de las ciencias que formaban la base de su profesión. Solicitó y obtuvo el retiro en 30 de junio de 1862; cuando acababa de ascender á teniente coronel de ingenieros (7 del mismo mes) y desde entonces su ocupación constante, su único objetivo fué el estudio de los múltiples adelantos de la matemática.

II

No puede negarse que es interesante la vida militar de D. Angel del Romero; pero para nosotros, para los académicos nos interesa aún más, los muchos servicios que en esta corporación prestó. Cuando su ingreso, nuestro Reglamento entonces vigente exigía los siguientes trámites para la admisión de un académico. La sección le proponía, la Junta de gobierno daba ó interceptaba el pase, la Academia en pleno votábale, necesitándose las dos terceras partes de los académicos para que le denomináramos electo y por último su memoria de entrada y discurso de presentación de su padrino eran tan necesarios que su falta destruía toda la elección. Cumplidos los anteriores primeros trámites, en 14 de febrero de 1878 verificóse su recepción. Después del extracto de los méritos que hice de mi apadrinado como presentación del novel académico, leyó éste su discurso cuyo lema era: «Memoria sobre la Historia é importancia de los estudios de la Geometría moderna». Visto el entusiasmo que por mi clase había demostrado, presumía que su disertación versaría sobre algún tema á ella referente; mas salí equivocado en mi presunción, pues por el contrario, resultó ser una entusiasta loa á la Geometría pura.

Con una modestia que le honra, empieza recordando que en esta Academia, vió las primeras luces de la ciencia matemática, siendo alumno de nuestro malogrado Armet. Declara asimismo que había escuchado con igual interés las lecciones de Geología que explicaba el sabio Llobet y Vallosera como las de Ideología que con tanta elevación de ideas vertía el profundo filósofo, nuestro Martí de Eixalá hermano político de mi ahijado. No se olvida tampoco de citarme por las lecciones que antes referí, de lo que le quedé profundamente agradecido.

En toda la memoria se vislumbra al sabio, al erudito, al práctico que con dicción clara y elegante, principalmente se dirige á lo que supone debe ser de alguna utilidad. Como en aquellos tiempos, la legislación sobre instrucción pública daba la merecida importancia al Análisis algebráico y no se la concedía á la Geometría pura, que sin embargo en varios otros países tomaba gran incremento, no vaciló en desarrollar su tema con el noble afán, de que le oyeran, no solo los Académicos, sino en las elevadas regiones del Gobierno.

Casi no es posible, que me atreva á extractar aquella interesante memoria, porque temo que mi torpe mano desvirtuara quizá alguno de sus hermosos conceptos. No obstante no podemos prescindir de fijar la atención en varios de los que contiene. Cita, hablando de las obras del gran Euclides sus Porismas, que á pesar de estar escritos algunos siglos antes de nuestra era cristiana y de haber sido objeto de curiosas investigaciones por Simson y otros notables geómetros, no han sido del todo descifrados hasta el siglo actual por el ilustrado geómetra francés Chasles.

Hace notar que entre las geometrías griegas, unas se dirigen principalmente á la cantidad, como la de Arquímedes, mientras que, otras, cual la de Apolonio, estudian el orden y posición de los elementos, encontrando en las primeras por el uso constante, que hacen del infinito, la remota simiente que más tarde debía producir el transcendente Cálculo de Newton y Leibnitz; y en las segundas, olvidadas durante largo período de tiempo, existe el orígen de la Geometría proyectiva moderna.

Explica luego la influencia poderosa que para el adelanto matemático tuvieron Descartes y Fermat. Observa que el entusiasmo producido por la generalidad del riguroso método cartesiano, logró que casi todos los matemáticos abandonaran la geometría pura (principalmente la del orden) yendo en pos de la analítica. Unicamente quedaron fieles al clásico plan de los griegos Desargues, Pascal, Mac-laurin, Stewart, Huygens y pocos sabios más.

En el siglo XIX ha vuelto éste á cobrar la debida importancia por los poderosos esfuerzos de Monge y de Carnot creando el primero la Geometría descriptiva y el segundo la importantísima teoría de las transversales. Corolarios de esta última son la Geometría superior de Chasles, la proyectiva de Cremona, la Geometría der Lage de Standt y la Estática gráfica de Culmann. Termina observando que la escuela alemana se distingue de la francesa en que ésta, en el fondo, es métrica; mientras que aquélla es esencialmente gráfica y por lo tanto más general. Como en nuestro país el movimiento geométrico á la sazón casi era nulo, se preguntaba: ¿ha llegado la hora de excitarlo, de promoverlo? ¿Debe este estudio formar parte de nuestros cursos universitarios? Con estas utilitarias preguntas terminaba su importante memoria.

El segundo trabajo que para llenar un turno leyó en 17 de marzo de 1880, fué nueva demostración de su afición á la Geometría proyectiva versando sobre sistemas polares. Entiende por sistema polar, adhiriéndose á Standt y á Cremo-

na, á dos planos que se hallan en posición involutiva, de modo que cada punto (antipolo) del uno se corresponde doblemente con una recta (antipolar) del otro En el caso de que un punto esté sobre su antipolar existe una cónica directriz, que á la vez, es lugar de puntos unidos y envolvente de rectas también unidas; tenemos entonces el sistema recíproco de Poncelet.

En este discurso hemos leído lo siguiente: el centro de un sistema es el antipolo de la recta al infinito; dos diámetros son conjugados cuando á la vez son rectas recíprocas, es decir que el punto en el infinito de la una sea antipolo de la otra. Los elementos situados en el infinito, cuyo conocimiento debemos á los grandes geómetras Desargues y Poncelet, no eran desconocidos de Romero; por el contrario, concordaban con su carácter reformador y utilitario que en todos sus trabajos patentizó.

Clasifica los sistemas polares en elípticos, hiperbólicos y parabólicos, estudiando las propiedades características de cada género. Fijóse en particular en los que existen entre puntos ó rectas colocados simetricamente respecto del centro. Define luego la cónica central y halla las relaciones que tiene con la directriz en los tres géneros. A continuación estudia cuales son los elementos determinantes del sistema y termina hablando de los cuadrángulos y cuadriláteros, que siguiendo á la escuela francesa, llama conjugados y que los ingleses, con más acierto, denominan autopolares, pues son polares de sí mismos.

La impresión producida por ambas memorias, fué sumamente profunda. Debida á ella y á las condiciones personales, que atesoraba mi apadrinado, y que muy pronto vislumbramos todos los académicos, resultó el hecho, que de otro modo sería anómalo, de ser elegido Director de la sección en 14 diciembre de 1878, á los diez meses de su ingreso. Probablemente por su reconocida entereza de carácter, fué designado para formar parte de una comisión, cuyo objeto era lograr del Dr. Nunell la terminación de las obras, que hacía en nuestro jardín, transformándolo en establecimiento balneario, conforme á las obligaciones contraídas con nuestra Academia, en virtud de un contrato bilateral. En su cumplimiento descubrió mi amigo, además de un carácter enérgico, una elocuencia persuasiva y una caballerosidad y finura á toda prueba; con lo que es inútil notar cuanto contribuyó al buen resultado que anhelábamos. Este éxito, reunido á sus conocimientos y entusiasmo por toda clase de reformas, verificó el milagro de que á los dos años de ser nuestro compañero, le eleváramos á la vicepresidencia de esta corporación (21 octubre 1880). Casi simultáneamente se le encargó la inspección unipersonal de las obras antes citadas, por la confianza en él depositada. Pródigos los académicos en demostrarle su agradecimiento y justos en reconocerle sus excelentes cualidades, nombrámosle, nada menos que para ocupar el elevado y honrosísimo sitial de la Presidencia en 11 octubre de 1882, cuando solo tenía cuatro años su vida académica. ¡Hecho el más raro, que se haya visto en esta casa, donde existen tantos varones ilustres unos por su talento, otros por su laboriosidad y encanecidos muchos de ellos por su antigüedad y constantes servicios presta-

dos! Sin embargo, esto mismo demuestra el singular aprecio y estimación, que hacíamos todos de las dotes que integraban á Romero.

Con el afán de lograr que cada académico se convirtiera en una especialidad, durante el bienio de su presidencia, propone, entre otras muchas reformas de los Estatutos y Reglamento, unificar el trabajo, dividiendo las antiguas secciones en comisiones de tres individuos logrando que nos dediquemos exclusivamente á asuntos, por completo congruentes á nuestros respectivos conocimientos. De aquella fecha data pues la creación de nuestras actuales secciones. Basta comparar nuestros Estatutos actuales con los antiguos para que se vea la poderosa influencia que Romero ha tenido en esta corporación. Súmase á esto las reformas de que con gran conocimiento del asunto nos hablará mi querido amigo el Dr. Domenech y Estapá, verificadas durante este período, y se comprenderá que nos complacía tanto su presidencia que hubiésemos querido reelegirlo. Por desgracia el reglamento anterior, entonces vigente, no permitía las reelecciones, así es que le nombramos vicepresidente en 6 octubre de 1884 y presidente á nuestro querido compañero el Excmo. Dr. D. Julián Casaña, que á sus méritos personales reunía una posición oficial que podía ser útil á la Academia ya que ejercía el rectorado de nuestra Universidad literaria. Inútil es consignar cuanto ayudó á éste durante su nuevo cargo. En las elecciones siguientes volvimos á nombrarle presidente, con lo cual se satisfacía nuestro deseo y ocupó pues durante el bienio de 1886 á 1888 el sillón presidencial. Durante los seis años comprendidos desde el 82 al 88 puede decirse que pasaba todo el día en la Academia, parecía que no tenía otro ideal que la utilidad de esta casa, atendiendo á todas sus mejoras y obligaciones con una asiduidad ejemplar.

Como á la sazón verificóse la Exposición universal, que tanta honra y provecho, proporcionó á nuestra condal ciudad; él, por el cargo que desempeñaba, en nuestra corporación, vióse obligado á formar parte de su junta directiva, cooperando eficazmente al buen éxito de aquel certámen universal, primero realizado en España.

A pesar de la incesante labor de esta casa, aumentada entonces con los preparativos de la citada exposición, quédale aún tiempo para dedicarse á trabajos científicos. En efecto, en 16 abril de 1888 nos presenta un discurso que él llamó nota y que versaba sobre «el fundamento del Cálculo de Leibnitz». Para que no abandonara la presidencia y por indicación suya, leí el trabajo, en la sesión correspondiente.

Así como en los dos anteriores había disertado sobre su ciencia predilecta, quiso en éste demostrarnos que sus conocimientos y su erudición no eran inferiores en el Cálculo infinitesimal, que en la Geometría proyectiva. Explica que los verdaderos fundamentos del primero son las dos ideas de límite y de continuidad que estudia con bastante detenimiento. Al final procura hacer patentes los errores ó tropiezos en que han caído algunos grandes matemáticos por haber desconfiado de la certeza del Cálculo de Leibnitz.

Para que se comprenda la laboriosidad de Romero, modestia de su carácter y cariño que sentía por la Academia, conviene observar que en 4 de octubre de 1888, admitió el cargo de secretario general, que es sin duda alguna el más pesado de todos los que podamos desempeñar en cualquier corporación y especialmente en ésta por la lozanía de su vida interior y por las múltiples relaciones con los centros científicos de las restantes provincias y del extranjero.

Durante el bienio de su secretaría, como si no le bastara el ímprobo trabajo que sobre él pesaba encargóse de dos sucesivos inaugurales,

La primera leída en 18 de noviembre de 1889 tenía por lema: «Consideraciones sobre el estado actual del servicio horario en las grandes ciudades; descripción de este servicio realizado por medio de la electricidad». No podía haber elegido asunto más pertinente, ya que principalmente por su eficaz mediación, la Academia se había comprometido, con las excelentísimas corporaciones, Ayuntamiento de nuestra ciudad y Diputación provincial, en unificar los relojes públicos de esta querida capital del principado; para lo cual debía lograrse que el nuestro, que sirve de tipo, marchara con un error inferior á una décima de segundo. El carácter esencialmente práctico de la memoria, rica en toda clase de detalles, dió á comprender hasta la evidencia á todos los académicos y á las corporaciones que nos honraban con su presencia y protección, que se podía tener absoluta confianza en nuestras promesas. La realidad ha acabado posteriormente de sellar nuestro éxito, pues hemos cumplido lo ofrecido con exactitud matemática. Agradecimiento debemos por ello á la iniciativa y consejos de Romero, á los conocimientos técnicos de nuestro astrónomo el Dr. Fontseré y al poderosísimo auxilio material y moral de nuestras autoridades; sin el cual no hubiéramos podido realizar la generosa pretensión de unificar nuestros relojes, antes tan discordantes.

En la siguiente inaugural del 21 noviembre de 1890 leyó otra memoria titulada «Datos para escribir una sinopsis matemática». En ella van recopiladas las ideas que sobre el objeto, carácter, métodos y aplicaciones de las Matemáticas han emitido varios filósofos, geómetras é historiadores y apoyándose, en ellas tenía Romero (según declara en la memoria), la esperanza de poder escribir una sinopsis matemática que conceptuaba interesante y casi necesaria en el período evolutivo en que se encontraba el análisis matemático. Desgraciadamente, este deseo no se ha convertido jamás en realidad, no hay que decir cuánto lo deploramos, hemos tenido que contentarnos con haber oído la lectura de estos interesantes datos, en la que Romero demostró la vasta erudición que poseía y una loable franqueza declarando á quien pertenece cada pensamiento emitido.

Terminado el bienio correspondiente á su cargo de secretario fué nombrado por segunda vez Director de la sección de Ciencias físico-matemáticas (31 octubre 1890). Entonces en comisión con D. José Domenech y Estapá dictaminaron acerca de un aparato destinado á dividir la circunferencia en un número cualquiera de partes iguales que había presentado á la Academia su autor.

Observemos que desde su ingreso hasta el abril de 1892 constantemente forma parte de la Junta directiva y si en dicha fecha cesó en su intervención, fué por haber recibido el nombramiento de gobernador civil de Bataan (más tarde se cambió en el de Batangas), en la isla de Luzón cuya capitanía general estaba confiada á su cuñado el Sr. Conde de Caspe. Visto el aprecio y consideración en que todos teníamos á mi amigo, fácilmente se deduce la pena que nos causó su alejamiento aun cuando fuese para ejercer cargo tan honorífico.

Comprendemos el acierto del gobierno en aprovecharse de sus aptitudes; así como el entusiasmo con que marchaba el novel gobernador, animado con la esperanza de ejercer dignamente el cargo. Al partir rebosaba su corazón de risueñas ilusiones y sin embargo antes del año regresaba del Archipiélago con el mismo corazón lacerado, por crueles desengaños. ¡Qué decepción tan cruel experimentó en este viaje! Regresó con el ánimo abatidísimo porque notaba que en el Archipiélago había levadura fatal para nuestra patria. ¡Quién podía presumir que eran proféticos sus tristes temores!

Dedicando de nuevo su actividad á nuestra Academia leyó una nota que presentó el 9 abril 1894 sobre la arquitectura romana en el siglo XVI con motivo de un donativo que nos hizo D. Eduardo Chaquert. El mismo día fué designado para ocupar nuevamente el cargo de Vicepresidente, que desempeñó poco tiempo, pues en octubre del mismo año los académicos le elevaron por tercera vez á la Presidencia que ejerció durante el bienio de 1894 á 1896. No fueron de menos utilidad los servicios que prestó en este período, pues la Delegación de hacienda había hecho reclamaciones que afectaban hondamente la vida de nuestra corporación. Pedímosle entonces encarecidamente que pasara á la Corte, para el arreglo de tan enojosa cuestión y gustoso aceptó la misión que se le confiaba. Como la desempeñó, lo recordamos todos con agradecimiento, pues devolvió la tranquilidad y el vigor á la Academia por sus acertadísimas gestiones en los ministerios de Fomento y de Hacienda.

Reconociendo el gobierno las dotes administrativas y personales que le adornaban y quizás para destruir el mal efecto que podía haberle causado el cese anterior, volvió á designarle para un alto empleo en las islas Filipinas. Ya no fué un gobierno lo que se le confiaba sino la Administración de Hacienda de Manila. Comprendo bien que la nación quisiera utilizar sus servicios, lo que se hace más difícil es entender que él aceptara después del desengaño sufrido. Atendiendo á su avanzada edad, es seguro que hizo un sacrificio enorme al partir á tan lejanas tierras; pobladas de traidores habitantes, y en donde el clima era aún más traidor.

Marchó, pues, en enero de 1895 dejándonos á todos sus amigos con la mayor intranquilidad, pues temíamos por su salud. No eran infundados nuestros temores, á pesar de no haber permanecido en Manila sino dos años escasos, fueron suficientes, sin embargo, para que regresara afectado de una enfermedad medular que minaba su vigorosa y enérgica naturaleza. Durante el período de su úl-

tima enfermedad, todo su anhelo era recibir la visita de uno de nosotros y enterarse de cuanto ocurría en su querida Academia. Recuerdo que el 24 del último noviembre fuí á visitarle; comenzó dándome un sentido pésame por la inmensa desgracia que tuve, de perder á mi buena esposa; mas luego hablóme de Pappus, de Desargues y de lo acertado que estaba yo explicando en la Universidad la Geometría del sabio Standt, elogiándome de paso por la publicación del teorema y corolarios que me había cabido la honra de leer en este recinto; y terminó, por fin, con quererse enterar de cada uno de nosotros, sus queridos compañeros y amigos. Dígaseme si no quedaría profunda y dolorosamente sorprendido al saber que al día siguiente (25 noviembre 1899) nos abandonaba para siempre, volando su espíritu á la eterna mansión celestial, donde desaparece todo aquello que en la vida nos diferenciaba, causa á veces hasta de profundas discordias, para dominar la más absoluta igualdad. ¡Qué bien representa esta idea el símbolo geométrico con que se adornan las puertas de nuestras necrópolis! La circunferencia es la única curva, que goza de la propiedad de que todos sus puntos son vértices y todas sus rectas pueden considerarse como principales. Así mismo la muerte nos iguala á todos, presentándonos delante del Eterno completamente desnudos de mundanal oropel.

No obstante de esta igualdad que hace simpática la fealdad de la muerte, ¡qué diferencia tan grande, no existe, en las huellas, que dejan en nosotros, sus recuerdos! Mientras las unas se borran en poquísimo tiempo, las otras parece que son indestructibles, así por ejemplo, ¿quién olvidará jamás que á los buenos servicios del marqués de Floridablanca se debe la creación de esta casa? ¿Podrá tampoco pasar nunca al olvido lo que debemos á D. Angel del Romero? Queda en nosotros un recuerdo profundo de sus virtudes, de su talento, de su carácter enérgico, pero aún más de sus múltiples servicios prestados en esta corporación que no es posible desaparezcan de nuestra memoria.

De desear es que sus hijos sigan, como no lo dudo, sus buenos consejos y ejemplos y nosotros, queridos compañeros, imitemos á Romero en su entusiasmo en general por la ciencia y muy particularmente por esta Real Academia.

He dicho.

A continuación el académico Dr. D. José Doménech y Estapá leyó el siguiente trabajo:

ESTUDIO ACERCA DE D. ANGEL DEL ROMERO

como Presidente de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona

por el Académico numerario

Dr. D. José Doménech y Estapá

Excmo. Sr.:

Señores:

Con la discreción y la elocuencia que acostumbra siempre á emplear mi estimado compañero el Dr. Mundi, ha presentado ante vosotros á D. Angel del Romero, como realmente se merece la memoria del que fué un dignísimo soldado de nuestra patria, un distinguido matemático y un convencido y entusiasta académico. Bastarían en realidad los títulos que acabo de mentar para que quedara muy honrada la memoria de tan llorado amigo, pero me he creido yo obligado á fuer de agradecido y sincero, á continuar ó completar, si quereis, su historia académica, procurando hacer una ligera reseña de lo mucho que hizo por esta corporación al ocupar el honroso y delicado cargo presidencial, ya que con su paso por él, dejó indelebles pruebas de lo que puede un entusiasmo por una idea y un acendrado cariño á una entidad determinada.

Para D. Angel del Romero fué la Academia uno de sus primeros centros de educación científica. Apenas contaba 15 años concurría ya á algunas de las cátedras que sostenía en aquel tiempo esta Corporación, como ya os acaba de detallar el compañero que me ha precedido en el uso de la palabra, y tenía tanto amor á todo lo que se refería á su progreso y á su prosperidad, que desde que ingresó como académico numerario, y en cuanto tuvo la honra de ser designado para ocupar el primer puesto entre nosotros, en 2 de noviembre de 1882, se dedicó preferentemente á reorganizar todos los servicios, y cual padre cariñoso que incesantemente procura por el porvenir de sus hijos, preocupose de obtener para ella todos aquellos elementos de vida que la época actual exige para que una corporación llegue á ocupar un distinguido lugar entre las de su mismo género, nacionales y extranjeras.

Para lograr tan nobles ideales propúsose mejorar y ordenar el Museo, completar la Biblioteca y el Archivo y hasta transformar el edificio, para que éste cumpliera debidamente con el fin á que se hallaba destinado; pero para tanta mejora y para lograr tan nobles fines, necesitaba D. Angel del Romero de ese

elemento metálico que todo lo entorpece con su carestía y que todo lo facilita con su abundancia. No tenía la Corporación fondo ninguno de que disponer, no podía tampoco enagenar el edificio, como un particular hubiera hecho, levantando luego uno de mejores condiciones en otro punto de esta misma capital, pues fué cedido y debía servir siempre para el noble fin á que fué destinado; y sin embargo, no se arredra el ánimo de Romero, y cual otro de sus contemporáneos que hizo para Barcelona lo que Romero para nuestra Academia, lánzase con fé y entusiasmo á tan atrevida empresa, toma consejo de una comisión compuesta de todos los ex-presidentes que habían sido de esta Corporación, contándose entre ellos á Casaña, Rave, Costa, Mestres, Echevarría, Trémols, Manjarrés, Doménech y Maranges, Carbó y Peradaltas, hoy la mayor parte de ellos, por desgracia para nosotros, acompañando á D. Angel del Romero en su nueva vida; y penetrados todos de la necesidad de una reforma radical en el edificio y en los Estatutos, para obtener así los elementos de vida material y moral que necesitaba esta Real Academia para su progreso y enaltecimiento, acuerdan por unanimidad auxiliar al Sr. Romero en su empresa y presentan á la aprobación de aquélla una proposición á tal objeto dirigida, que fué aprobada en sesión general de 7 de junio de 1883, otorgándose al propio tiempo un voto absoluto de confianza á su presidente para que llevara á cabo todos los extremos que en aquella proposición iban comprendidos.

Tuve la inmerecida honra de que fuera adoptado mi proyecto de reforma de edificio y construcción de un pequeño observatorio astronómico en lo alto de su crujía principal, y contratadas las obras, hipotecando para su pago los alquileres de las dos tiendas que se dispusieron en la planta baja, teneis ya desde este momento á Romero convertido en un verdadero director de obras recordando con gusto sin duda los vastos conocimientos que acerca de ellas poseía como ingeniero militar, acudiendo con su ilustrada opinión á cuantos problemas se presentaban y sobre todo siempre con nuevas ideas y provechosas iniciativas que influyeron notablemente en la buena marcha de los trabajos.

Todo lo encontraba poco para la Academia, y al realizar el proyecto aprobado, recuerdo que me consultó un día la conveniencia de que el salón de sesiones no se limitara á un solo piso ni á una sola crujía, y al estudiar yo la manera de resolver y satisfacer tal deseo, que por otra parte ofrecía el inconveniente del observatorio que debía tener sólida base en que apoyarse, pude encontrar la solución deseada por medio del gran elemento auxiliar de nuestras actuales construcciones, la jácena de hierro armado, y fué muy grande el entusiasmo que embargó el alma de D. Angel del Romero al tener noticia y formarse cargo de lo que sería nuestro salón que, aunque modesto, resulta de grandes dimensiones respecto de las demás dependencias de la casa, pronunciando aquella célebre frase que de sus labios salía inconcientemente al hallar la solución de un problema y que todos recordareis: *Ya estamos del otro lado,* dijo Romero; y con estas palabras parecía como que quería indicar que su ánimo libre ya de una idea que le

preocupaba, se dirigía á otro asunto ó á otro empeño para encontrar tambien para él una favorable solución.

A la modificación del salón que os acabo de indicar, siguieron otras obras de mejora no consignadas en presupuesto, y viendo D. Angel que no sería posible ya responder de todos los gastos que se hicieran, con el solo medio que contaba, á menos de tardar muchos años en quedar libre de acreedores, pensó que bien podían contribuir á tan laudable fin las corporaciones populares de nuestra capital, ya que de honrar á Barcelona con una corporación científica digna de su importancia se trataba, y con aquella incansable actividad que le animaba siempre, para obtener algo de provecho para la Academia, y autorizado por el voto de confianza que en él depositara la Corporación, llama á las puertas de nuestro Ayuntamiento y de la Diputación provincial con objeto de pedir una subvención con que poder terminar por completo las obras y sobre todo con el fin de dotar á nuestro Observatorio de todos aquellos instrumentos que son de necesidad para los servicios meteorológicos y astronómicos que se proponía llevar á cabo y que hoy afortunadamente realizamos con aplauso de todo el elemento científico de nuestra capital. Las citadas corporaciones respondieron muy favorablemente á la súplica que la Academia les dirigió, y no podía menos de ser así: D. Francisco de P. Rius y Taulet, á la sazón alcalde de nuestra urbe, de gloriosa memoria, y animado respecto á ella de los mismos entusiasmos y deseos de progreso y de reforma que D. Angel del Romero sentía por la Real Academia de Ciencias, debía corresponder á la tan razonada súplica que le hiciera ésta, y en sesión de 27 de noviembre de 1883 acuerda el Ayuntamiento conceder una subvención de 15000 pesetas para que una vez realizadas las obras pudiera completarse el ideal de la Corporación que consistía en el montaje de los observatorios y el establecimiento de cátedras de aquellas asignaturas de la Facultad de Ciencias que España solo tiene reservadas para la Universidad Central, impidiendo así que algunos jóvenes licenciados puedan doctorarse y ser quizás glorias legítimas de la ciencia y de su patria, por carecer de medios con que trasladarse y estudiar en la llamada capital de la nación.

El establecimiento de un observatorio meteorológico central, que más tarde podía relacionarse con otros de Cataluña y fuera de ella, logrando así obtener algún resultado favorable para la predicción del tiempo en toda la provincia, pudo servir de base á Romero para solicitar de la Diputación provincial una subvención con que atender la Academia á tan importante servicio, y logra en efecto de aquella estimable entidad, modelo de buena administración y de honradez, la concesión de 30.000 pesetas que agradece sobre manera la Academia, acordando un entusiasta voto de gracias para su presidente en quien tenía depositada entonces su confianza y hasta su porvenir.

Rehuye la aceptación de tal voto D. Angel del Romero, porque dice que no ha hecho mas que cumplir con su deber de Académico, contestando con un párrafo que me permitireis que copie literalmente: «Si alguna gloria ha habido

corresponde á la Academia cuya brillante historia ha sido el troquel en que se han apoyado mis gestiones »

Con las subvenciones recibidas no parecía sino que los deseos de reforma se aumentaban, y si antes nos proponíamos limitar aquélla á lo más esencial é indispensable, el empeño de la Academia, animada por el entusiasmo y verdadero empuje de su presidente, se agranda mucho más; ya no nos basta con el simple establecimiento de un modesto anteojo meridiano, queremos además lograr la colocación de una ecuatorial, y surje entonces la idea de levantar dos torres laterales y anexas á la principal que teniendo por ejes dos robustos pilares que cargan directamente en el muro perpendicular á este salón y desde él sobre los cimientos del edificio, permitieran reservar la torre central para las observaciones meteorológicas. Con estas variaciones y estos aumentos de construcción y de gastos, pudimos en verdad satisfacer los fines científicos que nos proponíamos para así cumplir debidamente con las corporaciones que nos habían auxiliado, pero quien quedó perjudicado en ello fué el efecto monumental del edificio por no haberse podido terminar á satisfacción del que esto os dice, ni la cúpula de la torre central ni el ornamento de las dos laterales que están esperando que en día no lejano, si es posible, acuda la Academia á completarlas. Se ha satisfecho lo útil y lo estático, pero como no de solo pan vive el hombre, ya comprendereis con vuestro elevado criterio que falta que les acompañe lo bello para que su conjunto satisfaga al arquitecto.

Con la terminación del bienio de 1882 á 1884 debía cesar en su misión el Presidente, pues los antiguos Estatutos no permitían la reelección; habia solo transcurrido un año desde el comienzo de las obras de reforma y no era posible que abandonara á D. Angel del Romero su regeneradora misión. Acuerda modificar la Academia el articulo de sus Estatutos que la impiden satisfacer sus deseos, pero los trámites y expedientes que para el más simple movimiento de un cuerpo oficial se exijen por nuestra administración pública, impiden legalizar por completo y con la urgencia necesaria aquel acuerdo, y con beneplácito de todos los académicos acepta la presidencia, que bien podemos llamarla honoraria, el entonces Rector de nuestra Universidad D. Julián Casaña, que otras veces habíamos tenido ya el gusto de ver ocupando el primer sitio entre nosotros, y es elegido Vice-presidente D. Angel del Romero, aprobándose en aquel entonces las obras realizadas hasta aquella fecha y confirmándose el voto de confianza otorgado á su presidente para que pudiera llevarlas á feliz término, adquirir el material meteorológico y astronómico necesario y el mobiliario indispensable para el salón de sesiones y demás dependencias.

Ya preveía Romero que con la sola reforma de los medios materiales no podia la Academia alcanzar su merecida y tan deseada prosperidad, y en la sesión del 19 de junio de 1884 inicía la necesidad de una reforma en sus Estatutos, como ya ha reseñado el Dr. Mundi, se nombra una comisión que la estudie y la proponga, y aprobada en 12 de junio de 1885 se presenta á la superioridad, que le

otorgó su aprobación por R. O. de 7 de diciembre de 1887. Transcurre el bienio de 1884 á 86, vuelve á ocupar Romero la silla presidencial en el de 1886 á 88 y entonces es cuando puede nuestro llorado amigo ver concluída su obra, dando cuenta de su terminación en la sesión celebrada el día 10 de enero de 1887. Pero la actividad de nuestro presidente no podía quedar interrumpida, ni sus deseos podían quedar por completo satisfechos sin llevar á cabo otro de sus anhelados proyectos. Me refiero al de unificar la hora de todos los relojes de Barcelona y sus suburbios, sirviendo de regulador la hora media exacta que podía determinar la Academia con sus aparatos astronómicos. Para este servicio debían, como es natural, intervenir las Corporaciones municipal y provincial, y en efecto, cooperan cada una de ellas con 15.000 y 10.000 pesetas respectivamente, para la adquisición de los instrumentos con que faltaba completar el Observatorio.

Celébrase, como todos sabeis, la Exposición Universal de Barcelona en 1888 y D. Angel del Romero quiere que la Real Academia de Ciencias concurra á élla con los estudios y memorias científicas de las varias generaciones de individuos que habían formado parte de la misma, obteniendo un Diploma de Honor que guardará siempre con orgullo esta Corporación por el valor moral que representa.

Aprovecha Romero el movimiento que en aquella época tuvo Barcelona, para establecer relaciones científicas con la mayor parte de corporaciones análogas á la nuestra del extranjero, y al visitar la Exposición el célebre geodesta español, el malogrado general Ibáñez, Director general entonces del Instituto geográfico y estadístico, logra del mismo un importante donativo para nuestra biblioteca y fué el de las publicaciones impresas que figuraban en la instalación del expresado Instituto.

Mr. Echstein, Director del Instituto topográfico del Ministerio de la Guerra en la Haya, regala también por medio de Romero los importantes mapas de las residencias de Java.

No podían pasar desapercibidos tantos servicios prestados por Romero á la Academia, y con objeto de solemnizar además la terminación de las obras por él con tanto cariño emprendidas, acuerda esta Corporación regalarle un objeto de arte, que ejecutan con singular acierto los talleres de nuestros queridos compañeros D. José y D. Federico Masriera, y al propio tiempo un pergamino en que constara para ejemplo de nuestros venideros el sincero agradecimiento de la Corporación. En testimonio de haber sido el iniciador de la idea de la restauración del edificio y no haber perdonado medio ni sacrificio alguno para llevarla á cabo con el feliz éxito que propios y extraños reconocen, (son palabras textuales) acuerda la Academia que su retrato se coloque en el salón presidencial, y por último, como si todo esto no bastara para perpetuar su memoria, se acuerda colocar en donde se crea más adecuado una lápida de mármol con una inscripción conmemorativa de los especiales y singularísimos servicios que á nuestra Corporación prestó el que fué en vida D. Angel del Romero.

Desde 1888 á 1890, ocupa la presidencia el Dr. Montserrat y Archs

(Q. E. P. D.), ya que no podía desempeñarla Romero por causa de la misma dificultad reglamentaria antes mencionada y no salvada aun por mas que los Estatutos hubieran sido modificados, pues faltaba redactar y aprobar el Reglamento necesario para dar á aquéllos el debido cumplimiento.

No podía sin embargo D. Angel del Romero dejar de formar parte de la Junta Directiva y hasta de la mesa, si cual era el unánime deseo, querían llevarse á cabo por completo las reformas en vías de ejecución, y acepta entonces el cargo de Secretario general, cuando acababa de dejar el de presidente, sin que nunca creyera fuese humillación ni mortificara su amor propio el desempeñar un cargo de menos categoría, si al hacerlo podia servir mejor á la Academia.

En este bienio es cuando Romero y todos los Académicos empiezan á sentir vehementes deseos de librarse de la deuda que sobre la Corporación habían producido las obras realizadas, y que aunque debían ser provechosísimas para aquélla en un plazo lejano, eran sin embargo en aquel entonces un terrible obstáculo á la libertad de movimiento y á los constantes deseos que sentíamos todos de completar la Biblioteca y los Museos y dotar cada día con mejores instrumentos los Observatorios recientemente establecidos.

En sus constantes desvelos piensa y proyecta Romero la realización de un empréstito, colocando acciones entre los mismos Académicos; pero ya comprendereis que estando tan reñida la ciencia con la abundancia de caudales, poco práctico podía ser el procedimiento, y tuvo que dejarse sin efecto tan noble aspiración. Otra idea abandonada también por impracticable surge de la mente de algunos académicos; cual es la de tomar algún dinero á bajo interés, respondiendo con nuestro edificio y con los alquileres de las tiendas cuando éstos los percibiera la Corporación, pero la condición del edificio no permitió tal operación como antes ya indiqué. Para suerte de la Real Academia de Ciencias y Artes á quien parece que Dios no quiso abandonar en tan tristes momentos, encuentra la Academia y por tanto D. Angel del Romero con quien tan identificada estaba, un ilustre académico que al ser elevado al cargo presidencial pone á su servicio todo su valer y toda su influencia, D. Rafael Puig y Valls, y con un ideal completamente conforme al de Romero y no dejando de formar parte este último de la Junta Directiva, como director de la sección de física matemática que era en aquel entonces, emprenden ambos compañeros una activa campaña económica, logrando obtener de nuestras corporaciones populares otras dos subvenciones de 20.000 pesetas cada una, que sirvieron á maravilla para el pago de las pequeñas pero numerosas cuentas de los trabajos realizados para completar las obras contratadas desde un principio.

Encárgase el arreglo del Archivo á persona competente, colócase la esfera del reloj de nuestra fachada en 1891, se organiza el servicio, gratuito entonces, de los Observatorios bajo la dirección de nuestro estimado compañero Sr. Fontseré, y empiezan á sentarse las bases para la enseñanza superior de la ciencia matemática.

En 1892 se interrumpe solo por algunos meses la historia académica de Romero por el nombramiento de Gobernador de Batan con que fué honrado por S. M., y al reanudar ó continuar aquélla en 1894, lógrase la aprobación del nuevo Reglamento, y puesto en marcha franca otra vez el organismo de nuestra estimada corporación, vuelve Romero á ocupar por tercera vez el cargo de Presidente en quien parece que debía quedar vinculado por lo mucho que por ella había hecho, y prepárase entonces á dar expansión á sus manifestaciones y á obtener para su querida Academia lo que por su importancia histórica y por sus formales trabajos le correspondía.

Procura ante todo entrar en relaciones oficiales con la corporación municipal para que fuese un hecho, y lo consigue, la unificación de la hora en todos los relojes que en Barcelona dependieran de aquella entidad, y se hace cargo la Academia en aquel entonces, del reloj establecido en la torre N. E. de la Catedral y del instalado en la fachada principal de las Casas Consistoriales. Esto ocurrió en 29 de abril de 1895, como más tarde, en 1898, cuando la agregación, se realizó para los relojes de los distritos reunidos á la antigua Barcelona, obteniendo para tal servicio una subvención anual que reparte la Academia entre dos apreciables artífices, reservando una modesta asignación para el Director del Observatorio hoy catedrático de esta Universidad Dr. Fontseré.

Organiza Romero definitivamente la enseñanza de la Astronomía, explicada por el mismo señor Fontseré, y utiliza para satisfacer tan altos fines, que favorecen notablemente á los entusiastas del estudio y del saber, una pequeña pero muy agradecida subvención de la Diputación provincial de Barcelona.

Se empeña también Romero en que se arregle el Museo, y á sus ruegos y por su medio, el distinguido y entusiasta naturalista Sr. D. Eduardo L. Chaquert, se encarga gratuitamente á su vez del cuidado y ordenación del mismo, y es tanto el cariño que á él le une y tan numerosos los ejemplares con que lo ha enriquecido, que la Academia debe al señor Chaquert eterno agradecimiento, y para el Museo resultará ser un verdadero padre, que nunca abandona al hijo que tanto quiere, y que no parece sino que su vida va íntimamente unida á ese Museo que con tanto acierto ha ordenado y sigue mejorando continuamente aportando al mismo cuantos elementos, que son numerosos, le proporcionan sus extensas relaciones con el archipiélago filipino.

D. Angel del Romero había cumplido ya con el compromiso que contrajera en 1883 con la Real Academia de Ciencias, pero su entusiasmo por la Corporación era tanto y su actividad tan incansable, que al empezar el año de 1895 aspira á algo más. Observa que la cúspide del Tibidabo sería un sitio muy apropósito para la instalación de un Observatorio astronómico digno de Cataluña y de la primera capital de España en artes bellas, científicas é industriales, y enamorado de la idea nos pide á Fontseré y al que tiene la honra de dirigiros la palabra que formulemos con la perentoriedad siempre por él deseada, un proyecto que satisfaciendo hoy á las primeras necesidades, pudiera mañana ser base de un centro

astronómico que estuviera en digna relación con los mejores observatorios de Europa, y empieza sus gestiones para ver si la superioridad querrá ayudarle en tal empresa.

Pero la Providencia no quiso que con tal prisa creciéramos, ni fuera tan pretencioso nuestro poderío, y atajó los ideales de nuestra Corporación con dos contrariedades: Por una parte el desapiadado fisco nos vino amenazando con una exorbitante contribución, cual si destináramos nuestro edificio á fines utilitarios y nuestros trabajos dedicados solo á la especulación científica y artística nos produjeran grandes beneficios. Acude Romero al Municipio y á la Diputación para que nos sirvan de padrinos en tan apurado trance, apoyando á nuestra Corporación en la justa demanda de exención que se entabló, pero como desgraciadamente este es el único punto en que las leyes se mantienen inflexibles cuando se trata del que pretende pagar lo que sea justo y no acude á medios que repugnan y no puede utilizar una corporación que estime su dignidad y su buen nombre, nada pudo lograrse en Barcelona y es entonces cuando amenazada la Academia por un expediente de defraudación al Estado, conforme nos ha dicho ya el Dr. Mundi, emprende Romero un viaje á Madrid, pagándose los gastos con el producto de una suscripción voluntaria entre todos los Académicos, y después de activísimas gestiones y ante la verdad de los hechos, lógrase cuanto podía obtenerse de un Estado que tiene en muy poca estima el progreso de la ciencia, y cual si las pequeñas rentas que la Academia obtiene de sus dos tiendas no fueran una cantidad sobradamente exigua para atender á sus gastos de publicaciones y de biblioteca, exije que se pague lo que por estas rentas pagaría un simple particular, y solo exime del pago, y como á gracia muy especial y extraordinaria, á los salones de lectura, Museo, Cátedras, Observatorio y á este salón de sesiones. Gracias á este esfuerzo que realizó con tal cariño Romero, podemos celebrar hoy sesiones públicas sin exigir billete de pago para su entrada.

Os he hablado de dos contrariedades y solo he citado una; la segunda es mucho más penosa para mi y lo fué sin duda alguna también para esta Corporación. Por asuntos de familia y de caracter particular, tiene Romero que ausentarse de Barcelona, y en el mes de junio de 1895 notifica á la Academia que debía trasladar su domicilio á la ciudad de Manila, y que por tanto se veía en la, para él triste necesidad, de dejar el cargo que con satisfacción de todos los compañeros desempeñaba en esta casa. Contaba ya 72 años y creímos que no volvería á pisar estos umbrales, dada la importancia del viaje y el clima mortífero de nuestras antigüas colonias. Fué grande el sentimiento que embargó nuestra alma al creer que perdíamos para siempre al que durante doce años consecutivos fué el elemento principal de vida y de progreso para esta Corporación y que tan íntimamente había unido su nombre al de todas las transformaciones morales y materiales que esta Academia había sufrido, pasando de humilde corporación, y casi olvidada dentro de la misma Barcelona, á centro científico, el más impor-

tante de nuestra capital y en condiciones de ponerse en relación con las corporaciones de su mismo género, que con abundante y esplendorosa vida funcionan fuera de España. Con tales gérmenes de prosperidad no podía menos de aspirar nuestra Academia á ocupar el distinguido sitio que le corresponde, y ello lo ha logrado nuestro actual presidente el Ilmo. Sr. D. Silvino Thós y Codina, sucesor inmediato de D. Angel del Romero, y adornado de excepcionales condiciones para el desempeño del cargo presidencial que con general aplauso desempeña hace ya cinco años.

Gracias á lo mucho que el Sr. Thós se interesa para la próspera vida de esta Corporación, no tan solo se ha podido ver realizado el sueño de Romero de la unificación total de los relojes oficiales de Barcelona y todos sus suburbios, sino que también, y merced á sus gestiones, se han podido completar las enseñanzas de la matemática superior, iniciada por Romero, con la de la Astronomía, estableciendo en esta Academia y desde 1897, las clases de *Termodinámica,* á cargo de D. Moisés Nacente, hoy ya Catedrático de Física superior de nuestra Universidad, y la de *Inducción electro-dinámica* á cargo del reputado Dr. D. Paulino Castells.

Descrita á grandes rasgos la historia presidencial del Sr. Romero, creo que es ocasión propicia para meditar un poco acerca de la evolución que para la Academia representa el haber contado con tan ilustre miembro y la influencia decisiva que en su transformación tuvo, mientras fué el agente propulsor de sus rápidas y afortunadas mejoras.

Sea cual fuere el régimen porque se gobiernen los pueblos y las agrupaciones, necesitan indudablemente de un ideal que les guíe en sus aspiraciones, y sea el punto principal á que se dirijan aquellas, pero la historia nos enseña con repetidos ejemplos, que aunque aquel ideal exista y aquella aspiración común mueva los corazones de todos los individuos de una sociedad, no se llega nunca al fin deseado si no hay una personalidad que lo encarne y que levantándose sobre todos los pareceres individuales, borrando todo lo que éstos tengan de mezquino y egoista, se imponga sobre todos ellos ante la magnitud y la bondad de la empresa que nadie se atreverá públicamente á criticar cuando aquélla sea la expresión pura y sincera de las necesidades que sienta una determinada asociación ó una pluralidad de individuos. Claro que es de condición precisa que el ideal que aquella personalidad represente se halle conforme con las leyes divinas y humanas, sin tratar de vulnerar ninguna de ellas, para que la Providencia se encargue también de concederle su apoyo, pero en cuanto así sea, no tengais ninguna duda en afirmar que llega siempre á ser un hecho el fin que se persigue, y que quedará coronada siempre con el éxito la empresa que tenga una dirección tan loable y justa. En la misma época actual podeis muy fácilmente observar el estado de pesimismo y de malestar de ciertos pueblos, en que cada uno de sus individuos manifiestan y repiten que no puede sufrirse el yugo á que están sujetos, por causa de los graves defectos de la administración porque se rigen, que es de todo punto

necesario cambiar de rumbo en su modo de ser y de sentir, y sin embargo, todas las exclamaciones individuales se pierden como siempre en el vacio, y así seguirá sucediendo hasta que surja de aquella sociedad un hombre que, capaz de dirigir la resultante de tantas y tan pequeñas fuerzas diseminadas y sin efecto alguno mientras permanecen aisladas, sea el que simbolice la idea que á todos persigue, que es el de la restauración de los elementos de vida intelectual y prosperidad material que todos anhelamos.

Esto sucedió con nuestra Academia: año tras año hacía que iba arrastrando una vida efímera, sin fondo metálico alguno ni aun para publicar su Boletín, sin haber podido acuñar las medallas que como símbolo académico debían ostentar sus individuos, conforme hacen otras corporaciones de mucha menos importancia en el orden civil é intelectual. Se había hecho ya algún importante proyecto de reforma del edificio por alguno de nuestros queridos compañeros; se sentía la necesidad por todos ellos de procurar gérmenes de nueva vida para la Corporación, pero todos los esfuerzos individuales y todos los trabajos de sus miembros se estrellaban contra la imposibilidad de reunirlos y de dirigirlos. Faltaba la personalidad que las debía sintetizar, y que con verdadero entusiasmo y sin fijarse en pequeñeces se dirigiera rectamente al fin deseado; y esta se encontró en D. Angel del Romero á quien con justicia debe considerársele como el verdadero regenerador de nuestra patria académica.

Empieza su gestión con la reforma del edificio, sigue la de sus estatutos y reglamentos, procédese al arreglo del archivo y ordenación de nuestra biblioteca, organízanse los museos y los observatorios, complétanse luego éstos, se normalizan nuestras relaciones con la Hacienda pública, se acuñan las medallas con que deben distinguirse sus miembros en los actos oficiales, se establecen Cátedras de enseñanza superior, se coloca la Academia al nivel de otras muy célebres de Europa y para que no fuera dicho que la transformación no era completa y la evolución sufrida sorprendente, hasta se cambia el título de la Corporación. Desde 1887 que no es Real Academia de Ciencias Naturales y Artes, como la llamó su fundador Carlos III por comprenderse entonces con la primera calificación todas las ciencias en general, sino como y conforme demanda la nomenclatura moderna se conoce hoy con el título más general y comprensivo de Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona.

Descanse en paz el ilustre Académico que tanto hizo por nosotros. Verdad es que volvió del Archipiélago filipino cuando las desgracias de la patria le obligaron á ello, pero el clima de aquellas regiones había ya ejercido su fatal influencia en el cuerpo entrado en años de nuestro compañero, y desde 1898 en que se domicilió nuevamente en Barcelona, pudimos solo admirar lo que fué, pero no pudimos ya de él esperar nada más.

Conservaba todo su cariño para esta Corporación y á pesar de sus achaques, ocho días antes de entregar su alma á Dios asistió á una sesión de la comisión 1.ª que estaba encargada de emitir un informe. No podía olvidar Romero aquélla

por quien tantos sacrificios había hecho y á la que veía hoy con gran contento de su alma, vigorosa y llena de aspiraciones para el porvenir.

Indemnice Dios á Romero con su infinita misericordia de los muchos sinsabores que en tamaña empresa hubo de sufrir y premie con su inagotable gracia los inauditos esfuerzos que hubo de hacer para lograr un ideal tan noble y elevado como el que se propuso y tuvo la dicha de ver en gran parte realizado. Esta Academia no podrá olvidar nunca al que fué su regenerador y su elemento de vida durante un período tan importante de su historia, y los Académicos todos, los que fuimos sus compañeros, recordaremos siempre con fruición y respeto al que tanto debe esta Corporación.

He dicho.

Dió fin al acto el Sr. Presidente pronunciando las siguientes frases:

Señores:

«Motivo de satisfacción es siempre para la Academia el verse favorecida por tan escogida concurrencia como es la presente y por tan altas representaciones como las que aquí se ostentan de Autoridades y Corporaciones respetables, acompañándola en los actos públicos de su laboriosa existencia; pero esta satisfacción sube de punto cuando el acto que celebramos afecta, como el de hoy, á nuestros más íntimos sentimientos, teniendo, como tiene por objeto, renovar la memoria de un compañero perdido, recordar sus merecimientos y prodigarle los elogios á que se hizo acreedor entre nosotros.

»Gracias, pues, á todos los presentes por la benévola cooperación que se han dignado prestar á este acto de consecuente compañerismo; á este acto, debido en justicia, con el que tratamos de recompensar, siquiera sea con la manifestación de la gratitud y del buen recuerdo, los extraordinarios servicios prestados por uno de los nuestros á la causa común que todos defendemos. Seguros podeis estar, señores, que con vuestro aplauso enalteceis, como es propio de nobles caracteres, servicios modestos, sí, pero positivos, servicios además totalmente desinteresados, que por lo mismo que se refieren á una corporación como la nuestra, en la que el provecho personal de sus individuos no entra por nada y sí por todo el bien y el progreso de la colectividad, han de tenerse y considerarse como servicios verdaderamente prestados á la causa de la civilización y á la causa de la patria.

»Yo, asumiendo en este momento, como debo, la representación de la Academia y tomando, aun por encima de ésta, la más vasta de todo el público inteligente y patriota de que aquí me veo rodeado y del que fuera de aquí nos acompaña con sus simpatias, recojo con viva delectación esos elogios y esos aplausos

y me permito ofrecerlos reverentemente á los afligidos hijos del meritísimo académico, aquí presentes, esperando que les sirvan de algún alivio en su legítima pena esas honrosas manifestaciones, que si por algo se distinguen es precisamente por lo sentidas, tanto por lo generales y espontáneas.

»Las alabanzas que aquí se han dedicado á la buena memoria del difunto Sr. Romero, no tienen, no, nada de excesivas; y al pregonarlas con tanta elocuencia los distinguidos académicos Sres. Mundi y Domenech, no han hecho mas que interpretar justamente, como era de esperar de su pericia, el sentimiento unánime de la Corporación. La gestión presidencial del Sr. Romero, marcó, en efecto, una evolución importante y trascendental en la vida de la Academia, contribuyendo por eficaz manera á procurar para ella una marcha más desahogada y consiguientemente á facilitar lo que es y ha sido constantemente el objeto de todos sus esfuerzos: la difusión y la propaganda de los conocimientos útiles entre nuestros conciudadanos. Por esto no puede menos de ser y será imborrable la huella de su paso por esta casa; y los buenos patricios deberán reconocer en él á un hombre afanoso del bien público y dispuesto á sacrificarle, como le sacrificó, ámplia y generosamente, buena parte de su tiempo y de su tranquilidad personal.

»La Academia en peso, convencida y obligada, le rinde hoy este solemne tributo de reconocimiento por sus imponderables desvelos. Sí, es verdad. Su actividad y su constancia le abrieron nuevos horizontes y le conquistaron nuevos elementos de vida. No lo olvida la Academia; no lo olvidará nunca. El, en fin, transformó este local; él hizo del mismo una mansión decorosa y á la vez productiva. Mientras se sostengan en pié estos muros proclamarán siempre la laboriosidad y el mérito de D. Angel del Romero».

Una orquesta de salón intermedió los trabajos literarios con la ejecución de algunas piezas musicales de corte clásico.

Levantóse la sesión á las once de la noche.

V.° B.°

El Presidente,

Silvino Thós y Codina.

El Secretario general,

Arturo Bofill y Poch.

REINANDO ALFONSO XII
y siendo presidente de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona
D. ANGEL DEL ROMERO Y WALSH
se restauró este edificio bajo la direccion del academico y arquitecto
D. JOSE DOMENECH Y ESTAPÀ
con los auxilios de la Exēma Diputacion presidida por los Exēmos Sres
D. RÓMULO MASCARÓ
D. EDUARDO MALUQUER
D. MANUEL PLANAS Y CASALS
y del Exēmo Ayuntamiento de Barcelona siendo alcaldes los Exēmos Srēs
D. FRANCISCO DE P. RIUS Y TAULET
D. JUAN COLL Y PUJOL
La Académia agradecida mandó grabar en esta lápida conmemorativa los nombres de los academicos que iniciaron y dieron remate à la obra y los de sus bienhechores

408ª

MEMORIAS

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS Y ARTES

DE BARCELONA

TERCERA ÉPOCA — VOL. VII. NÚM. 8

NECROLOGÍA

DE

D. JOSÉ M.ª RODRIGUEZ CARBALLO Y CEBOLLA

individuo de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona

LEÍDA POR

D. LAURO CLARIANA RICART

en la sesión pública celebrada por dicha Academia
el día 28 de noviembre de 1908

LIBRARY
DEC
UNIVERSITY OF TORONTO

Publicada en enero de 1909

BARCELONA

A. LÓPEZ ROBERT, IMPRESOR. — CONDE DEL ASALTO, 63

1909

408 13.

NECROLOGÍA

DE

D. JOSÉ M.ª RODRIGUEZ CARBALLO Y CEBOLLA

individuo de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona

LEÍDA POR

D. Lauro Clariana Ricart

Sesión del día 28 de noviembre de 1908.

Ilmo. Sr:

Señores:

Notables son las sesiones que celebra esta Real Academia, en donde las ciencias y las artes se dan un fuerte y fraternal abrazo; centro, dó los principios que íntegran la belleza en sus diferentes aspectos, tiene su Trono, disputándose á porfía su asiento los amantes de lo Bello; empero yo tengo para mí, que no menos notables deben considerarse las sesiones destinadas á rendir un homenaje de intenso y sentido recuerdo á los señores Académicos fallecidos.

Así pues, conforme á los deseos de esta Real Academia, ofrecíme á escribir la Necrología que vá á ocupar vuestra atención, no solo para corresponder á tal inmerecido honor, sino por cuanto ello me proporciona el medio de poder hablar de un Académico á quien quise siempre con toda mi alma.

Debo manifestaros, no obstante, que en los momentos presentes, me siento acobardado por el justo temor de que no pueda corresponder como quisiera al deber que contraigo en recordaros con el respeto y consideración debida al digno é inolvidable D. José M.ª Rodríguez Carballo; uno de los académicos fallecidos; uno de mis maestros más queridos; mas vosotros, señores Académicos, guiados sin duda por vuestra generosidad y nobleza de ánimo, quisisteis que yo fuese el encargado de la presente Necrología, y culpa vuestra será si mi peroración os disgusta ó fatiga, ya que de mí solo podeis esperar una descripción incorrecta, escrita en estilo llano y sin artificio. Con todo, debo repetir que, aparte de mi temor en no poder corresponder á tan alta misión, pláceme el levantar la voz en este centro tan respetable para pregonar las excelencias de uno de los académicos de reputación científica mejor adquirida y que por desgracia hemos perdido para siempre.

1

Antes de proporcionaros los datos que avaloran los méritos de mi biografiado, supongo me permitireis, señores, que os manifieste algo en relación con el fin del presente acto solemne que celebra esta Real Academia.

Vosotros, señores Académicos, ya sabeis que al fijar la atención en ese cuadro sublime de la naturaleza, solo alcanzamos descubrir en ella un trabajo contínuo de composición y descomposición: los elementos cósmicos primordiales del Universo se combinan entre si para dar origen á lo que se designa bajo los nombres de mineral, vegetal y animal, operándose luego, dentro de ciertos límites de tiempo, la consiguiente descomposición, á fin de que los elementos vuelvan á su primitivo estado, continuando estos cambios indefinidamente: sello propio de lo que constituye la parte material de la creación; así se describen ciclos ó curvas cerradas sin soluciones de continuidad; oleaje permanente; movimiento vertiginoso sin descanso alguno. Así las generaciones nacen y mueren; por esto, desgraciadamente, hemos de renunciar á los nuevos frutos que podían esperarse aún, si la muerte no hubiese cortado el hilo de su existencia, de las privilegiadas inteligencias de un Newton, de un Leibnitz, de un Lavoisier, dentro de las ciencias, así como de las nuevas sublimes creaciones dentro del arte, de un Murillo, de un Hamilton, de un Beethoven, de un Wagner ¡Triste condición humana! ¡sensibles pérdidas para los que sentimos latir nuestro corazón por todo lo bello, bueno y verdadero!

Cierto es que cada nueva generación, como nueva ola, sustituye á la anterior que ha dejado ya de existir; elementos nuevos juveniles y llenos de entusiasmo que llevan la santa misión de aportar fecundos materiales á las Ciencias y Bellas Artes, distindiendo cada vez más su círculo de acción por medio de nuevos conceptos en pró del verdadero progreso, del verdadero avance, del verdadero adelanto y perfección sin límites.

Sin embargo, hay que advertir que la idea del progreso y de lo bueno, no debe hacerse dependiente exclusivamente del avance de los tiempos, pues sabido es que la ley de la variabilidad, se impone en toda época y al través de los siglos.

Por esto quizá al analizar con el escalpelo de la más severa crítica los miembros que componen una corporación como la presente, dejáramos de encontrar, durante su existencia, méritos iguales para todos: ¿mas no basta el poder ostentar el honroso título de Académico para que ello suponga haber realizado un esfuerzo intelectual poco común?

Si, señores Académicos, ¡Cuantas horas de insomnio, de sudor frio, de dejos del alma, no habreis sufrido, á fin de recabar alguna verdad obstrusa, ó por la decepción por un *algo* en que antes teníais toda vuestra fé, descubriendo más tarde que ciertos celajes empañaban aquel *algo* que tanto acariciabais!

¡Cuantas veleidades no sufrimos en pró y en contra de los principios que integran nuestra vida científica ó artística mientras se extiende el horizonte á nuestro alrededor!

Todos pasamos por esas torturas que nos obligan á envejecer antes de tiempo; todos trabajamos con entusiasmo y sin descanso para arrancar una hoja más del gran libro que encierra los misteriosos secretos de la Creación. Por esto los Académicos que ya no existen, son dignos de estima y respeto por igual, por esto es muy plausible el acuerdo que en su tiempo tomó la Comisión general Directiva de esta Real Academia, para solemnizar el recuerdo de los señores Académicos fallecidos, mediante trabajos necrológicos que oiréis y que de seguro habréis oído ya de labios más autorizados que los míos, bien que no más sentidos por lo que toca á mí, al tratarse hoy de quien quise siempre como mi segundo padre.

No pretendo abusar por mucho tiempo de vuestra indulgente y benévola atención; y en este concepto paso ya á delinearos tan sólo los principales méritos y cualidades especiales que adornaban á mi biografiado cómo estudiante, luego cómo Catedrático y, por último, cómo Académico.

II

Nació D. José M.ª Rodríguez Carballo y Cebolla, en Madrid el día 11 de abril de 1830, siendo sus padres D. Ramón Rodríguez Carballo é Insausti y doña Concepción Cebolla y Vercher; notoria era en la Corte, la alta alcurnia de tan distinguida familia, pues D. Ramón Rodríguez Carballo ocupó hasta poco después de la muerte de Fernando VII un alto cargo en la Mayordomía Mayor de Palacio, siendo luego Director del Banco de San Fernando y por último subcajero del Banco de España.

Naturalmente que la ilustración del padre, debía reflejarse en su hijo, y por esto mi biografiado empezó su enseñanza oficial á la tierna edad de diez años.

Desde 1840 á 1846 cursó toda la segunda enseñanza; tres años de latinidad en el Colegio de Escuelas Pías de San Antón Abad de Madrid, y tres de filosofía en colegios agregados á la Universidad Central.

Mas con el vivo deseo de ampliar sus conocimientos elementales, en 1849, ingresó, previo un riguroso examen de Matemáticas, dibujo é idioma francés, en la suprimida Escuela Preparatoria para las carreras especiales de Ingenieros de Caminos, Minas y Arquitectura, ganando en 1849 á 1851 los dos años de dicha Escuela con la nota siempre de *Bueno,* por unanimidad, máxima de las que se daban en aquel establecimiento de enseñanza.

Luego, desde 1851 á 1854, siguió y ganó los tres años de la extinguida Escuela normal Industrial, mereciendo siempre uno de los primeros números entre sus compañeros.

Ahí tenéis, en esbozo, señores, los principales datos que señalan los trabajos intelectuales realizados por mi biografiado en los albores de su vida científica; sin duda que ellos dan á comprender ya los ópimos frutos que debían desarrollarse más tarde, de aquella clara inteligencia y de aquellos delicados sentimientos de su corazón; todo lo cual tenía por peana inquebrantable un amor puro y grande hacia la belleza en sus diferentes aspectos; amor sublime que ennoblece al hombre y le hace superior á los demás.

III

Hermoso lapso de tiempo es aquel, en que la inteligencia del estudiante se forma, nutre y fortifica en conocimientos superiores; hermosa primavera de la vida; de sueños dorados; de esperanzas en el porvenir; de ilusiones y de algún tantico de vanidad en alcanzar la *omega* dentro del campo de las ciencias.

Empero, al llegar al fin de la carrera, al poseer un Título, al acercarse á la meta de sus aspiraciones, es cual llegada la estación de otoño, en que la lozanía de los árboles se trueca en tristes ramas sin hojas; preludio de frío; si, de frío en el corazón; tiempo de decepciones y de lucha terrible, sobre todo cuando falta compañerismo entre los de la misma carrera, lo que no deja de ocurrir con demasiada frecuencia.

El periodo de lucha para D. José M.ª Rodríguez Carballo, fué seguramente durante los años 1852 y 1853, en que ejerció los humildes cargos de ayudante segundo y primero en el llamado Real Instituto Industrial.

Afortunadamente, mediante una R. O. del 3 de noviembre de 1854, fué nombrado ya Catedrático interino de Geometría Descriptiva y sus aplicaciones, en el Real Seminario científico industrial de Vergara.

Mas convencido mi maestro de que ese destino no afianzaba su posición, pronto comprendió que para abrirse paso, no había más que un camino: la oposición á cátedra, paso terrible, reconocido por todo aquel que se haya honrado con el nobilísimo título de opositor.

Así pués, apoyado en esa idea, después de rigurosas oposiciones celebradas en Madrid, y por haberlas ganado en buena lid, según R. O. de 8 de noviembre en el año 1855, fué nombrado Catedrático de Geometría Descriptiva y sus aplicaciones, en la Escuela Industrial profesional de Barcelona.

Más tarde, por orden del Director de la Escuela, en 1856, nombrósele para ocupar en sustitución la cátedra de Mecánica industrial y construcción de máquinas, cargo que le fué confirmado por R. O. y que desempeñó por espacio de muchos años.

Además, reorganizada dicha Escuela en virtud de otra R. O. de 15 de agosto

de 1860, fuéle encargada la cátedra de Estereotomía de la llamada Escuela Industrial superior de Barcelona.

Y como si todo esto no fuese bastante para absorber la vida de cualquiera, por orden del Excmo. Sr. Rector de la Universidad de Barcelona, desempeñó durante el curso de 1860 á 1861 la cátedra de Geometría Descriptiva en la Facultad de Ciencias de dicha Universidad, cargo que le fué confirmado también por R. O. en 31 de octubre de 1861 y que ejerció hasta 24 de marzo de 1866.

Durante esta época, ó sea en el año 1864, efectuó las ejercicios para tomar el Título de Ingeniero Industrial, siéndole aprobados por unanimidad de votos todos y cada uno de los ejercicios, expidiéndole entonces el correspondiente Título.

Por fin, desde 1868 á 1870, dió gratuitamente dos cursos de geometría aplicada á las Artes; y al reorganizarse la Escuela Provincial de Artes y Oficios, agregada á la de Ingenieros, se encargó de la clase de Elementos de Geometría Descriptiva y sus aplicaciones.

Mas aparte de tanto trabajo, no dejó nunca de ejercer el pesado cargo de Secretario en la Escuela de Ingenieros Industriales, desde 1856 hasta el curso de 1886 á 1887, cargo que seguramente habría continuado ejerciendo á no haber sido nombrado Catedrático en propiedad de Estereotomía en la Escuela general preparatoria para Ingenieros y Arquitectos de Madrid.

A este punto, podriamos decir que se opera un cambio notable en la vida de mi buen maestro: el destino de su carrera, oblígale dejar á Cataluña para ir á su tierra nativa en donde seguramente debía encontrar recuerdos muy queridos de sus años juveniles.

En virtud de ese cambio, ocupó de 1887 á 1891, la cátedra de Estereotomía en la Escuela general preparatoria de Ingenieros y Arquitectos de Madrid; empero, por supresión de la misma, luego en julio de 1891, fué nombrado Catedrático numerario de Mecánica Racional en la Universidad Central, cátedra que desempeñó hasta 1904, en que pidió la jubilación por encontrarse ya muy enfermo, más al concedérsela fué agraciado con los honores de jefe Superior de Administración civil, habiendo ejercido además desde 1901, hasta su muerte, el distinguido cargo de Consejero de Instrucción pública.

Y con lo expuesto, doy por terminados los principales méritos de D. José María Rodríguez Carballo, como Catedrático, amén de los cargos honoríficos relacionados con la cátedra, á fin de poder pasar á considerarle, por último, como miembro de esta Real Academia.

IV

Sabedora esta Real Academia de la alta estima de que gozaba D. José María Rodríguez Carballo, dentro de las ciencias, no tardó en llamarle á su seno para que contribuyera á la labor científica que viene constantemente realizando desde su fundación, al aprovechar todos los elementos que considera útiles y fecundos para elevar su nivel.

En este concepto, mi biografiado, fué nombrado Académico numerario con destino á la sección de Ciencias Físico-matemáticas en 6 de diciembre de 1886, leyendo luego su Memoria de entrada, cuyo lema era «Cuatro palabras acerca de la exactitud en las Ciencias», en 24 de abril de 1867.

Pronto reconoció esta Real Academia, los buenos servicios que podía prestarle el exquisito tacto y buen talento del nuevo académico, en varios cargos y asuntos relativos á la misma, y por esto en 29 de octubre de 1868, fué designado para formar parte de una comisión que debía entenderse con la Excma. Diputación, á fin de ver si era factible el establecimiento de cátedras de Doctorado en dicha Real Academia.

Luego en 31 de enero de 1871, fué nombrado Secretario en la sección de Ciencias Físico-matemáticas; y más tarde en 8 de octubre de 1872, le nombraron Contador, cargo que ejerció otra vez en 1880; por fin, en 19 de noviembre de 1876, llegó á ser elegido Vicepresidente.

A pesar de tantos cargos; aparte de su mucho trabajo en la Escuela, de la opresión de espíritu porque pasaba muchas veces á causa de graves y largas enfermedades ocurridas en su distinguida familia, todo ello no era óbice para impedirle el proporcionar á esta Real Academia trabajos científicos, tales como una Memoria titulada: «Breves consideraciones sobre la variabilidad», leída en 25 de abril de 1872; así como otro trabajo de turno titulado: «La graficidad en Geometría», leído en 30 de abril de 1881.

Hay que admitir, sin embargo, que en donde se manifiesta podríamos decir, de cuerpo entero mi biografiado, es en su Memoria de entrada, por lo cual suplico á los señores que se dignan escucharme, que me permitan transcribir alguno de sus párrafos á fin de poder juzgar mejor de sus relevantes prendas personales y de los profundos conocimientos que poseía dentro de la sana filosofía aplicada á las ciencias.

He aquí lo que dice:

«Ah! Pues si curioso y magnífico sería el estudio de la ciencia antigua, en medio de su pobreza y sus errores ¿qué no sería, además de admirable y portentoso, el ir siguiendo desde el principio de Bacon paso á paso cómo cambia la torcida marcha que seguía la Astronomía, cómo se disiparon muchas de las densas tinieblas que oscurecían el campo de la Física, cómo nació la verdadera Química,

cómo creció y se desarrolló la Historia natural, cómo empezaron á vivir vida propia y fuera, digámoslo así, del hogar paterno, la Mecánica, la Descriptiva y tantos otros ramos especiales, marchando al nivel de ellas y nutriéndose muchas veces con su sávia y vivificando á la vez con la suya á todos y á todas, las Matemáticas, las grandes compañeras, las mejores amigas de todas las ciencias naturales?»

Después de este magnífico párrafo, añade:

«Pero, como quiera que el espíritu del hombre es pequeño, y por consiguiente vano; que la vanidad es muchas veces compañera inseparable de la pobreza; apenas ha podido penetrar con el desarrollo de la luz divina que en él se agita, y con el auxilio de los sentidos corporales, algo más en ese inmenso mar de los conocimientos de la naturaleza; se ha hinchado de orgullo, ha calificado esas ciencias con el pomposo título de exactas, y creyendo que en ellas no es necesaria la autoridad, ha llegado hasta creer que la razón humana y hasta individual, es el único y exclusivo medio para llegar al conocimiento de la verdad.»

Aquí D. José M.ª Rodríguez-Carballo, empieza á analizar las Matemáticas y dice: «¿Se halla definido el espacio? ¿quién sabe lo que es el tiempo?..... ¿Y puede denominarse exacta una ciencia cuyas bases no conocemos sino por intuición y no de una manera absoluta?

Y luego continúa: «La exactitud en la legítima acepción de la palabra, es la representación de la verdad viva, de la verdad absoluta, y cuanto llevamos expuesto manifiesta un conocimiento incompleto de la verdad, único que el hombre puede llegar á poseer mientras esté asimilado á la materia corpórea.»

Así termina mi biografiado el estudio de la ciencia especulativa, al concretarse á la matemática.

Ahora, si fuese á ocuparme de la segunda parte de la Memoria citada, que trata también de las ciencias de experimentación, mucho tendría que deciros, pero á fin de no prolongar demasiado esta Necrología, voy á reproduciros tan solo uno de los párrafos que considero más salientes, el cual dice así:

«¿Qué cabeza no se abate y deja de considerar cuán difícil, por no decir imposible, es el llegar á la exactitud apetecida?

»La última exigencia que hemos proclamado, la de la perfección de los sentidos y del estado de éstos, desanima y anonada completamente. Se ha olvidado que nuestros sentidos son falaces en extremo: supongamos perfecto, perfectísimo el de la visión, pues bien, con él no veremos la realidad de las cosas; nosotros no vemos más que perspectivas y unicamente perspectivas, y éstas no completamente lineales ó geométricas, sinó complicadas, complicadísimas, y que necesitarían y muchas veces exigen correcciones de la mayor importancia, siquiera en otros casos éstas sean faciltsimas ó despreciables y podamos llegar á la realidad ó á la verdad del fenómeno sencillamente».

Supongo, Señores, que comprenderéis facilmente por los notables párrafos que encierra la Memoria de entrada de nuestro malogrado académico D. José

M.ª Rodríguez Carballo, que este no rechazaba en un todo el calificativo de exactas que se concede á muchas ciencias, solo que él lo admitía en sentido relativo y no absoluto, tal como precisa considerarlo á fin de evitar de esta suerte que el hombre se enorgullezca al no respetar los límites naturales que el Señor ha impuesto á la inteligencia humana, y que de no respetarlos es llevado, aún inconscientemente, hacia el mal, y por ende al error dentro de las ciencias.

V

Hé aquí, Señores, los principales datos que dan justa apreciación del distinguido académico que hemos perdido para siempre; modelo de hombre honrado el *leader* de los ingenieros industriales; el maestro de muchos de los maestros é ingenieros actuales. Verdad es que si fuésemos á juzgarle por sus obras dadas á luz, no faltara quizá quien le restara méritos de los que se consignan en la presente Necrología; empero yo entiendo que al hombre científico no debe juzgársele solo por sus escritos, sino por los conocimientos que realmente posee, pues ¿quién ignora que el pensar demasiado puede ser terrible traba para darse al público? En confirmación de este aserto, basta recordar las discusiones que existen actualmente al pretender hacer desaparecer, por ejemplo, de la Mecánica, las palabras: materia, fuerza, energía etc., palabras en que hasta hoy se ha basado dicha Mecánica; el Éter, ya es poco para el físico, pues éste tiende á generalizar más y más ese *algo* que con tanto afán busca sin descanso; fundamento de lo que se designa bajo el nombre de materia; la célebre diferencial de Leibnitz, origina discusiones y protestas entre los matemáticos á pesar de que ella sea la palanca más poderosa del análisis; los conceptos racionales de la Geometría, traspasaron ya las fronteras de lo real, pretendiendo los geómetras seguir á los analistas, por medio del hiper-espacio y socavando hasta el célebre postulado de Euclides.

Quizá por esto el buen talento de mi biografiado, le impuso silencio, impidiéndole dar una obra más al mundo, en medio del vértigo que existe en escribir, vomitando á diario la prensa, catálogos voluminosos, los cuales contienen multitud de obras científicas.

En cambio D. José M.ª Rodríguez Carballo, reunía una condición admirable que pocos poseen, pues siempre que se le pedía su opinión acerca de alguna obra de provecho, tenía el buen acierto en señalar la mejor de todas por su fondo y claridad, y ciertamente que esto no lo logra sinó quien ha leido mucho, hallándose al corriente del movimiento científico.

Puede que haya también quien pretenda restarle méritos por no haberse dado á conocer en grandes obras de ingeniería, por más que no dejó de intervenir como Ingeniero en Barcelona y Madrid, en algunos trabajos de esta índole.

A este punto voy á permitirme la libertad de manifestaros mi parecer respecto á lo que considero pertinente al caso.

Sin duda que nadie ignora que no es fácil, ó posible, encontrar reunidas en un mismo individuo, la teoría y la práctica en su más alto grado; no parece sinó que se establezca una lucha constante entre esos dos elementos, á la vez como si cada hombre estuviese dotado de una cantidad de energía total, de modo que cuando la cinética gane, pierda la potencial en igual cantidad, ó al contrario: sumandos de la energía total, representantes respectivamente de los dos elementos: teórico y práctico.

En efecto, sabido es, por ejemplo, que no siempre los astrónomos eminentes, son los más aptos para las prácticas que requiere un buen observatorio: el mismo Edison, quizá no diera en resolver una integral que con suma facilidad halla un alumno regular de la Facultad de Ciencias.

En una palabra, hay que admitir que el círculo en donde puede moverse el hombre es bastante reducido, y según sean sus aficiones ó elementos que le rodean, lo impulsan á un lado ú otro, esto es, hacia la teoría ó hacia la práctica. Locura, pues, fuera pretender al que se dedica á la ciencia abstracta, que fuese un gran práctico de la misma: ni es de esperar, por otra parte, que el hombre práctico sepa apreciar debidamente las maravillosas concepciones de un Abel y de un Jacobi.

No cabe duda, Señores, D. José M.ª Rodríguez Carballo, fué más teórico que práctico y en este concepto se le debe admirar; él había nacido, sobre todo, para la Cátedra; maestro insigne que sabía transmitir los conocimientos científicos, con suma facilidad y método didáctico; siempre con aquella claridad peculiar suya, condiciones indispensables para ser un buen maestro y que por desgracia no reunen todos los profesores: su explicación sosegada y tranquila, con lenguaje conciso y atrayente, corría parejas con su hermosa y reposada imaginación; nunca se dejaba deslumbrar por teorías nuevas sin conocerlas á fondo; nunca podríamos decir con cierto escritor, la *loca de la casa* hizo en él de las suyas, por estar la razón echando la siesta.

Sin duda que estas relevantes cualidades fueron causa de los honoríficos cargos que alcanzó, debiendo añadir á los ya mencionados, otros aún de alta estima, tales, por ejemplo, el haber sido Presidente de la Asociación de Ingenieros Industriales por espacio de cuatro años; Presidente de la Asociación de Católicos de Barcelona, etcétera.

Así, después de ocupar por último una cátedra en el primer centro docente de España, entregó su alma á Dios en 14 de agosto de 1905, allá mismo donde había nacido.

Como muestra de la mucha consideración y respeto de que gozaba en la Corte nuestro inolvidable Académico, basta recordar que los Excelentísimos é Ilmos. Sres. Ministro y Director de Instrucción pública, Rector y Claustro de Profesores de la Universidad Central, etc., asistieron al luctuoso acto de su entierro.

Por fin, séame permitido, señores, que deposite, siquiera sea en pensamiento, una lágrima al pie de la tumba de mi antiguo maestro; y al asociarme al sentimiento que podáis experimentar en estos momentos por tan sensible é irreparable pérdida, espero y deseo á la par con toda mi alma que los desvelos y sacrificios en bien de la enseñanza, que siempre demostró aquel modelo de profesor, se hallen compensados por el recuerdo imperecedero de todos sus buenos alumnos, los cuales quedan obligados á dejar en buen lugar su nombre, contribuyendo al progreso de la Ciencia en nuestra amada y querida patria.

MEMORIAS

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS Y ARTES

DE BARCELONA

TERCERA ÉPOCA — VOL. VII. NÚM. 9

SOBRE LA EMISIÓN DE RADIACIONES

POR CUERPOS FIJOS Ó EN MOVIMIENTO

MEMORIA LEÍDA POR EL ACADÉMICO ELECTO

DR. D. ESTEBAN TERRADAS É ILLA

en el acto de su recepción

Y

DISCURSO DE CONTESTACIÓN

POR EL ACADÉMICO NUMERARIO

DR. D. JOSÉ DOMÉNECH Y ESTAPÁ

Publicados en marzo de 1909

BARCELONA

A. LÓPEZ ROBERT, IMPRESOR. — CONDE DEL ASALTO, 63

1909

UNIVERSITY OF TORONTO

418.2

SOBRE LA EMISIÓN DE RADIACIONES

POR CUERPOS FIJOS Ó EN MOVIMIENTO

MEMORIA

LEÍDA POR EL

DR. D. ESTEBAN TERRADAS É ILLA

en el acto de su recepción, el dia 15 de marzo de 1909

I.—Introducción

Al agradecer el honor que me ha dispensado la Academia admitiéndome en su seno, no acierto á expresar mi reconocimiento sino diciéndola desde lo íntimo de mi corazón: gracias. Estímulo grande ha de ser para mí el trabajar entre tan distinguida y preclara compañía, y sólo en la esperanza de hacerme un día digno de ella, con el amor y la asiduidad en el trabajo, me atrevo á responder al llamamiento de los buenos amigos que presentaron mi candidatura.

II.—Plan de un trabajo sobre el equilibrio de hilos inelásticos

No es ésta la primera vez que he de agradecer un honor á la Academia: me concedió, en efecto, el premio Agell en 1907, y si traigo á colación este hecho es para justificar el retraso que sufre la publicación de la memoria premiada. Sírvame de excusa de una parte los estudios que he debido emprender este verano para desarrollar los temas de que fuí nombrado ponente en el Congreso español para el Adelanto de las Ciencias; de otra parte, el desarrollo que me ha parecido conveniente dar al estudio del equilibrio de los hilos inelásticos, conforme al plan que voy á someter á la consideración de los señores Académicos.

En el capítulo primero se expondrán las ecuaciones generales del equilibrio para un hilo cualquiera, libre ó situado sobre una superficie rugosa ó lisa.

En el segundo se hará ver que la forma del hilo es la de una extremal de una cierta integral definida, y se expondrán los principios del cálculo de va-

riaciones que, según el método de Hilbert, nos conducirán á precisar en qué casos la integral corresponde á un máximo y en qué casos á un mínimo.

En el tercero y siguientes se hará aplicación de los principios generales á distintos casos particulares, tales como las catenarias alabeadas (la cuerda de saltar cuyos extremos no están en un plano con el eje de giro, catenarias esféricas, cuerda pesada en movimiento de rotación alrededor de una vertical, catenarias sobre superficies desarrollables, y en especial las geodésicas del alisseide ó catenoide), y las catenarias planas con leyes distintas de fuerza exterior, comprendiendo las radiadas y paralelas, y haciendo un estudio monográfico particular de la catenaria común, con indicaciones históricas, tergiversadas en algunos tratados corrientes.

El último capítulo versará sobre las analogías entre el equilibrio de un hilo y el movimiento de un punto.

III.—De la elección de tema

Cuando la Academia tuvo á bien elegirme para formar parte de ella, pensé en el tema que podía desarrollar en el discurso de recepción, y tras algunas vacilaciones, di con el siguiente: «Estudio de la elasticidad del árbol en los alternadores acoplados en paralelo y en los motores asincrónicos dispuestos en cascada», tema sobre el que tengo algunos estudios hechos, acerca del que he dado dos conferencias y he publicado un artículo. Pero la materia, al profundizar en su estudio se me ofreció tan vasta, que difícilmente hubiera logrado penetrarme bien de ella en menos de un año, y, de haberme empeñado en desarrollarla, mi entrada hubiérase retrasado considerablemente. Durante todo lo que llevamos del año 1908, he dedicado mis estudios á la teoría de la emisión de la luz, procurando hacerme cargo de las difíciles cuanto sutiles consideraciones de los físicos actuales, y al abandonar el tema anterior pensé, no sé si con acierto, que podría interesar á la Academia la exposición compendiada de aquellas teorías.

IV.—De la naturaleza de la radiación

La energía radiada se caracteriza por su entera independencia de la temperatura del medio que atraviesa. Las energías vulgarmente llamadas calorífica, eléctrica ó luminosa, se propagan por radiación. En lo sucesivo no distinguiremos entre estas tres clases de energía, y al hablar de «radiación» se entenderá la propagación de energía radiada en cualquiera de las tres formas precitadas; que los rayos caloríficos no son en Física más que rayos luminosos de mayor longitud de

onda, y los rayos luminosos son indudablemente de naturaleza electromagnética. El fenómeno de la radiación es esencialmente electromagnético y las teorías de la misma ó han de ser las ya admitidas y corrientes del Electromagnetismo ó han de ser teorías nuevas que comprendan aquéllas en una ú otra forma.

V.—Definición del rayo y del coeficiente de emisión

Cuando un cuerpo emite energía se propaga ésta en todas direcciones y sentidos, dándose el nombre de rayos á las porciones de energía que llenan los espacios limitados por un cono de abertura esférica $d\Omega$ cuyo vértice se halla en un punto del cuerpo emitente. A la cantidad de energía emitida en el intervalo dt de tiempo por el elemento dW de volumen comprendida en un rayo de abertura $d\Omega$ y entre los números ν y $\nu + d\nu$ de vibraciones por segundo, la supondremos de la forma

$$2\,\varepsilon_\nu\, dt\,, dv\,.\,d\Omega\, d\nu$$

siendo $2\,\varepsilon_\nu$ una cantidad á la que se llama coeficiente de emisión y cuya mitad representa la parte de energía correspondiente á una de las componentes linealmente polarizadas y normales entre sí del vector x electromagnético que figura la energía por unidad de t, W, Ω y ν.

VI.—Sobre la difusión y absorción de la energía

Al propagarse la energía se difunde y es absorbida en general. Supondremos que la cantidad difundida ó absorbida al atravesar una cierta longitud del medio en que se propaga es proporcional á esta longitud y á la cantidad de energía propagada. A los coeficientes de proporcionalidad se les designa comunmente con los nombres de coeficientes de dispersión y absorción.

VII.—De la densidad de la energía

La emisión de un cuerpo en el medio que le rodea se verifica por la superficie del mismo. Sea un rayo que parte de un punto de esta superficie; la cantidad

de energía radiada por el elemento $d\sigma$ de superficie en la dirección de aquel rayo la supondremos de la forma

$$k dt\, d\sigma\, d\Omega$$

siendo k una expresión llamada intensidad específica de la radiación. La intensidad k puede considerarse como la integral de intensidades $2 k_\nu$ cuyo número de vibraciones está comprendido entre ν y $\nu + d\nu$

$$k = \int_o^\infty 2 k_\nu \, d\nu \quad ;$$

y k_ν hace referencia á una componente linealmente polarizada. Consideremos una porción W cualquiera del medio en que tiene lugar la propagación y limitemos idealmente esta porción por una superficie S envuelta á su vez por una superficie esférica. De cada punto de esta última podemos considerar los rayos que emanan y atraviesan la porción W contenida en el interior de S. Sea, al efecto, l la longitud de un rayo cualquiera comprendida en W. Llamando q á la velocidad de propagación de las radiaciones, la energía que lleva un rayo incipiente tardará en atravesar W un tiempo $\frac{l}{q}$, durante el cual entra en W por el rayo considerado una cantidad de energía

$$k \frac{l}{q} \, d\sigma \frac{d\sigma'}{r^2}$$

siendo $d\sigma$ un elemento de la superficie esférica envolvente que supondremos de grandes dimensiones respecto á S; $d\sigma'$ una sección normal del rayo considerado y r la distancia entre $d\sigma$ y $d\sigma'$. De la inclinación del rayo respecto de $d\sigma$ es función k, pero si suponemos que S es una superficie de pequeñas dimensiones que envuelve el centro de la esfera considerada, al formar la integral de las cantidades de energía que en el tiempo $\frac{l}{q}$ habrán entrado en W procedentes de $d\sigma$, podremos considerar á k como constante y obtener así

$$\frac{k}{q} \frac{d\sigma}{r^2} W$$

extendida la integral á todo el volumen W del cuerpo. Pero formando ahora la suma de las expresiones anteriores para todos los valores de $d\sigma$, se tiene como á cantidad de energía contenida en W la expresión

$$\frac{4\pi}{q} k W$$

y por unidad de volumen

$$u = \frac{4\pi k}{q}$$

Con el coeficiente k_ν se tendría

$$u_\nu = \frac{8\pi k_\nu}{q}$$

VIII.—De la relación entre los coeficientes de emisión y absorción

Si una porción v de un cuerpo isótropo en equilibrio termodinámico, es decir, teniendo todos sus puntos á la misma temperatura emite en el intérvalo de tiempo dt, en todas direcciones uua cantidad de energía:

$$dt \,.\, v \,.\, 8\pi \int_o^\infty \varepsilon_\nu \, d\nu \quad ,$$

absorbe, como es fácil ver, por consideraciones análogas á las que nos condujeron al valor de u, una cantidad de energía:

$$dt \,.\, v \,.\, 8\pi \int_o^\infty \alpha_\nu \, k_\nu \, d\nu$$

de donde se deduce:

$$\frac{\varepsilon_\nu}{\alpha_\nu} = k_\nu$$

Y por lo tanto, que en el interior de un medio isótropo en equilibrio termodinámico la relación entre los coeficientes de emisión y absorción para la radiación correspondiente á un número determinado de vibraciones por segundo, es igual á la intensidad específica de la misma.

IX.—Ley que expresa la dependencia de la intensidad específica de la emisión, respecto del índice de refracción

Cuando hay dos cuerpos en un recinto impermeable á las radiaciones que emiten ó absorben, se establece, según el segundo principio de la Termodinámica, el equilibrio entre ellos, caracterizado por la temperatura común. De esto y de la ley Snellius-Descartes, se deduce que

$$q^2 k_\nu = q'^2 k'_\nu$$

en cuya expresión los acentos hacen referencia á un medio y las cantidades no acentuadas al otro. El invariante $q^2 k_\nu$ es una función universal que nos permite conocer la radiación en un medio cualquiera cuando ya se conoce en otro, supuestos conocidos al mismo tiempo los índices de refracción de los dos. La propiedad expresada en la ecuación anterior se puede enunciar diciendo que en todo cuerpo en estado de equilibrio termodinámico, es constante la cantidad de energía monocromática contenida en un cubo cuya arista es la longitud de onda.

X.—Ley de Kirchhoff

Sean varios cuerpos en un recinto impermeable, y los rayos simples cuyo número de vibraciones por segundo esté comprendido entre ν y $\nu + d\nu$, emanando de una cierta superficie y propagándose en un cierto medio *1*. Sea *I* la intensidad ó cantidad de energía radiada contenida en los mismos que se compone de la suma de las intensidades I_1, I_2, I_3···· procedentes de los distintos cuerpos emitentes, *1*, *2*, *3*···· Suponiendo que la propagación del rayo considerado se verifica en opuesto sentido, y que hay absorción ahora donde había antes emisión, las cantidades J_1, J_2, J_3.... absorbidas por los distintos cuerpos, serán las emitidas antes I_1, I_2, I_3···· Kirchhoff llamó poder emisivo E del cuerpo *2* á I_2 y poder absorben-

te A al cociente $\frac{J_2}{I}$, de donde el cociente entre el poder emisivo de un cuerpo 2 respecto á un medio 1 y el poder absorbente del mismo es independiente del cuerpo 2 é igual á la intensidad I de la radiación en el cuerpo 1.

XI.—Caso de un cuerpo no en equilibrio termodinámico

Si $A = 1$ para todas las radiaciones el cuerpo se llama «negro»; el poder absorbente del mismo, es en este caso un máximo. Estudiar el poder emisivo de un cuerpo de esta naturaleza, emitiendo radiaciones en un medio determinado equivale á estudiar la relación entre E y A para otro cuerpo no ya en el mismo ambiente sino en otro cualquiera. Si el cuerpo en el que tienen lugar las radiaciones es diatermano para una cierta ν, el valor de A es cero, y como I no puede ser indefinidamente grande, E también es cero. El valor más probable de $\frac{E}{A}$ ó $\frac{\varepsilon_\nu}{\alpha_\nu}$ es el que da el invariante $q^2 K_\nu$, ya que constituye el valor correspondiente al más estable de los estados, al que tenderá la radiación abandonada á si misma, estado que hemos llamado de equilibrio termodinámico. La presencia de una porción infinitesimal de cuerpo negro ó atérmano para ν, reduce á la radiación á este estado de equilibrio.

XII.—Realización del cuerpo negro por Boltzmann

Para realizar un cuerpo negro indicó Boltzmann que podía disponerse una cavidad en comunicación con el exterior por un pequeño agujero, y cuyas paredes se mantengan á una temperatura constante. La radiación emitida por un elemento de la superficie interior, reflejada sucesivamente en las paredes antes de salir por el agujero, adquiere los caracteres de la radiación emitida por un cuerpo negro.

XIII.—Ley integral de Stefan-Boltzmann

Stefan, dedujo de una serie de resultados experimentales que K es proporcional á la cuarta potencia de la temperatura absoluta. Boltzmann llegó al mismo resultado por las siguientes consideraciones:

Sea un recinto paralepipédico de volumen W impermeable á las radiaciones, cuyas paredes sean perfectamente reflectantes á excepción de una de ellas constituída por un cuerpo negro en comunicación con un depósito sumamente grande de calor y á temperatura constante. Supondremos lleno de éter el recinto y en él la radiación en equilibrio termodinámico. Según la teoría electromagnética de Maxwell, se ejerce sobre las paredes una presión mecánica p igual $\frac{u}{3}$ por unidad de superficie normal. Imaginemos móvil al modo de un émbolo la pared opuesta al cuerpo negro, por ejemplo. A todo corrimiento de la pared corresponde un trabajo $p\,d\,W$. La suma de este trabajo y la variación de la energía interna de la radiación representará el calor absorbido ó cedido por el cuerpo negro, cuya entropia variará por esta causa. Si la entropia del sistema total ha de permanecer estacionaria, la de la radiación experimentará una variación compensadora de la del cuerpo negro, que es:

$$\frac{d\,.\,(Wu + p\,d\,W)}{T}$$

siendo T la temperatura absoluta. Si esta variación es una diferencial exacta,

$$u = aT^4$$

siendo á una constante introducida en la integración, y cuyo valor según se deduce de las medidas de Kurlbaum, es:

$$7,\ 061 \times 10^{-15}\ \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3\ \text{grados}^4}$$

XIV.—De la llamada «ley del corrimiento», de Wien

Con la ley de Stefan Boltzmann no conocemos más que la radiación integral; la dependencia entre la u_ν y las variables ν y T, llamada ley de la radiación, no es, con todo, desconocida. Wien demostró que el problema de buscar u_ν como función de ν y T se reduce al de buscar u_ν como función de $\frac{T}{\nu}$ ó $T\lambda$ siendo λ la longitud de onda. Las consideraciones de Wien se basan en la fórmula de la presión de Maxwell y en el principio de Doppler.

Sea una radiación en un recinto paralepipédico de paredes completamente reflectantes ó difundibles (blancas), una de las cuales es móvil á la manera de un émbolo, y con los caracteres de radiación de cuerpo negro.

En el régimen adiabático de compresión ó expansión originado por el movimiento de la pared, cambia la longitud de onda de las radiaciones que se reflejan en la superficie de la misma. La energía correspondiente á una de ellas ν, varía en la diferencia entre la energía de las que tienen antes del movimiento el número de vibraciones ν y la energía de las que, en virtud del movimiento han pasado á tener el valor ν. Escribiendo que la variación total de la energía del sistema en una expansión ó compresión adiabática es cero, se llega á la ecuación

$$W \frac{d u_\nu}{d W} = \frac{W}{3} \frac{d u_\nu}{d \nu} - u_\nu$$

que integrada, da

$$u_\nu = \frac{1}{W} \varphi \left[W \nu^3 \right]$$

siendo φ una función arbitraria.

Como quiera que la entropia total de la radiación

$$S = \frac{4}{3} a T^3 W$$

no ha variado, la ley anterior puede tomar la forma:

$$u_\nu = \frac{\nu^3}{q^3} F \left(\frac{T}{\nu} \right)$$

Introduciendola expresión E_λ definida por

$$E_\lambda \, d\lambda = k_\nu \, d\nu$$

se deduce que la longitud de onda λ_m que para una temperatura dada da el máximo para E_λ satisface á la ecuación de la hipérbola

$$\lambda_m T = \text{Constante}$$

cuya ley es la llamada del *corrimiento* de Wien. Según los experimentos de Lummer y Pringsheim vale la constante 0,294 cmgr.

XV.—De la entropia de los rayos

Podemos considerar á la entropia de la radiación como suma de las entropias de cada uno de los rayos, los cuales, cuando la radiación no está en equilibrio termodinámico, constituyen sistemas físicos independientes. A todo rayo le podemos asignar una expresión L_ν que sea respecto de su entropia lo que k_ν es respecto de su energía y á la radiación correspondiente á una ν, una densidad s_ν de entropia, ligada á L_ν como u_ν lo está á k_ν

$$s_\nu = \frac{8\ \pi\ L_\nu}{q}$$

Como $W\int_0^\infty s_\nu\, d\nu$ es un máximo para un volumen y energía dados en la radiación en equilíbrio termodinámico,

$$\frac{\delta s_\nu}{\delta u} = \frac{1}{T}$$

y de aquí

$$L_\nu = \frac{\nu^2}{q^2} F\left(\frac{q^2 k_\nu}{\nu^3}\right)$$

y

$$T = \nu\, F\left(\frac{q^2 k_\nu}{\nu^3}\right)$$

XVI.—Generalidades sobre las teorías objeto de los siguientes párrafos

Los resultados experimentales han comprobado los puntos de vista de Wien. Para determinar la forma de F, problema capital de la Física matemática, se

han hecho diferentes hipótesis que constituyen los puntos de partida de las teorías de la radiación electromagnética, las cuales pueden dividirse en dos grandes grupos. En la del primero se parte de la teoría de Maxwell, á la que se añade la teoría molecular ó sus derivadas. Se supone que el medio en que tiene lugar la radiación, así como el cuerpo radiante, están constituídos por electrones y moléculas en suspensión en el éter de Maxwell. En la del segundo grupo se introducen hipótesis desconocidas hasta ahora en la Ciencia, las de los *quantums de energía*.

Las primeras teorías han sido desarrolladas principalmente por Lorentz y Jeans, las últimas por Planck. El objeto primero del presente trabajo es exponer las teorías de los tres ilustres físicos citados, comparándolas al mismo tiempo entre sí.

XVII.—Exposición general de la teoría de Jeans

En la teoría de Jeans se parte de las ecuaciones del campo electromagnético puestas en la forma canónica de Hamilton, y se considera un conjunto de radiaciones en equilibrio termodinámico, constituyendo una extensión estadística de las llamadas por Gibbs canónicas. Una extensión de esta naturaleza es acaso de más fácil estudio que un sistema aislado, porque al estudiar las propiedades comunes al conjunto de los sistemas, desaparecen los caracteres inesenciales de éstos. Del valor del módulo de la extensión canónica y de la propiedad que liga al mismo con la parte de energía correspondiente á las variables que no intervienen en aquélla sino en forma cuadrática, ya de la coordenada, ya del parámetro, se deduce la forma de la función radiante del modo que vamos á exponer. Como quiera que los principios de la Mecánica Estadística son acaso poco conocidos, voy á dar breve idea de ellos.

XVIII.—Principios fundamentales de la Mecánica estadística

Sea un sistema conservativo con u grados de libertad, definidos por sus coordenadas q, con una energía E, expresada en función de las coordenadas y sus parámetros p. El movimiento de un sistema de esta naturaleza, conocido su estado en un momento determinado, viene definido por las ecuaciones de Hamilton

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\delta E}{\delta p}\ ;\ \cdots\ ;\ \frac{dp}{dt} = -\frac{\delta E}{\delta q}\ ;\ \cdots\ ;$$

Si el sistema está además sometido á fuerzas exteriores F, funciones de las coordenadas q y de otras exteriores a, la última de las ecuaciones tendrá la forma más completa.

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\delta E}{\delta q} + F \quad ; \cdots$$

El objeto del estudio de la Mecánica estadística lo constituyen las llamadas extensiones de sistemas, á las que definiremos como conjunto de sistemas cuyos grados de libertad son iguales, sujetos á fuerzas exteriores de igual forma analítica, pero cuyas coordenadas en un momento dado tienen distintos valores, circunstancia que expresaremos con brevedad, diciendo que tienen distinta distribución en la fase, ó simplemente distinta fase. Dada una configuración del conjunto, se irá modificando en el transcurso del tiempo. Si n son los grados de libertad del sistema, su estado de movimiento en un instante dado vendrá determinado por sus n coordenadas y n parámetros, en total $2n$ determinaciones; de modo que podrá representarse por un punto del espacio de $2n$ dimensiones. Valiéndonos de la misma representación para los sistemas distintos de la extensión, tendremos un conjunto de puntos en este espacio. Consideremos el conjunto de puntos que en un momento dado tienen sus coordenadas comprendidas entre dos límites dados

$$q' < q < q'', \cdots ; \qquad p' < p < p'', \cdots ;$$

Si las diferencias $q'' - q', \cdots$ y $p'' - p', \cdots$ son suficientemente pequeñas, y el número de los sistemas suficientemente grande, podemos suponer que la distribucion puntual tiene por límite una distribución continua en la fase, y el número de sistemas cuya fase está comprendida entre dos límites dados vendrá en la forma

$$D\, dq \cdots dp \cdots$$

en cuya expresión D, función de p, q y t, es la densidad de la extensión en un punto, y en la que el producto $dq \cdots dp \cdots$ representa el elemento de la extensión conforme á la nomenclatura corriente en geometría de varias dimensiones.

Consideremos la integral

$$\int D\, dq \cdots dp \cdots$$

referida en un momento dado á una configuración cualquiera de la extensión; es decir los límites de la integral son por ejemplo q_1 , q_2 $\cdots$ q_n; p_1 , p_2 $\cdots$ p_n. Llamemos superficie á la variedad que limita esta extensión parcial. En el transcurso del tiempo la superficie envolvente se habrá convertido en otra superficie envolvente de los mismos puntos, los cuales habrán variado de posición, pero cuyo número no habrá cambiado. Y como este número es precisamente el valor de la integral, dedúcese que ésta es un invariante. Pero por un teorema debido á Liouville

$$\int dq \cdots dp \cdots$$

para una extensión parcial dada es igual á la misma integral al cabo de un tiempo cualquiera, tomando como nuevos límites los valores que adquieran los límites primeros transcurrido este tiempo. Luego la densidad de la distribución en la extensión de $2n$ dimensiones, es un invariante, y por tanto

$$\frac{dD}{dt} = o = \frac{\delta D}{\delta t} + \Sigma\left(\frac{\delta D}{\delta p}\frac{dp}{dt} + \frac{\delta D}{\delta q}\frac{dq}{dt}\right)$$

El teorema de Liouville se puede enunciar, diciendo que

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\delta\,(q \cdots p \cdots)_{t_1}}{\delta\,(q \cdots p \cdots)_{t_2}}\right] = o$$

ó sea que el determinante funcional de las coordenadas de un punto de la extensión en un momento dado respecto de los valores de las mismas, al cabo de un tiempo cualquiera, es un invariante respecto de éste. En particular las últimas coordenadas pueden ser las $2n$ constantes arbitrarias de las integrales de las ecuaciones canónicas, y en este caso, se puede expresar la propiedad anterior, diciendo que el determinante funcional de las coordenadas respecto á las constantes arbitrarias es función exclusiva de éstas.

Cuando $\frac{\delta D}{\delta t} = o$, se dice que la extensión se halla en equilibrio estadístico. Se tiene:

$$\Sigma\left(\frac{\delta D}{\delta p}\frac{dp}{dt} + \frac{\delta D}{\delta q}\frac{dq}{dt}\right) = o$$

y D es por lo tanto función de algún invariante respecto del tiempo en la extensión. El invariante más sencillo y más inmediato es seguramente la energía. De las infinitas formas analíticas de que es susceptible D al ser expresada en función de E, deben excluirse aquellas que son incompatibles con las siguientes condiciones:

1.ª $\int D\, dq \cdots dp \cdots = N$ siendo N el número total de sistemas y tomando la integral entre todas las fases.

2.ª D ha de ser uniforme.

3.ª D no puede ser negativa.

4.ª D no puede ser imaginaria.

Generalmente se introduce en vez de D el cociente $\frac{D}{N} = P$ que es como la probabilidad de la extensión para un punto ó elemento de la misma, pues el ser mayor ó menor indica mayor ó menor número de puntos congregados alrededor del primero, y más ó menos probabilidad de encontrar en la proximidad puntos cuyas coordenadas estén comprendidas entre dos límites dados indefinidamente próximos.

Si la probabilidad de dos configuraciones determinadas, de energías E_1 y E_2 consideradas en conjunto ha de ser la probabilidad de la configuración suma de las componentes sin que la coexistencia de las mismas introduzca sensibles acciones mútuas, podemos deducir una ley que exprese analíticamente la forma de la función $P = f(E)$. Sean en efecto P_1 y P_2 las probabilidades de dos configuraciones de energías E_1 y E_2. Se tendrá

$$P_1 \times P_2 = f(E_1) \times f(E_2)$$

La probabilidad P_{1+2} del sistema resultante será:

$$P_1 \times P_2 = P_{1+2} = f(E_1 + E_2)$$

de donde la ecuación funcional

$$f(E_1 + E_2) = f(E_1) \times f(E_2)$$

la que deducimos poniendo $E_2 = \alpha E_1$ derivando luego respecto á α y haciendo finalmente $\alpha = o$.

$$f = e^{\frac{\psi - E}{\theta}}$$

siendo ψ y θ dos constantes á la última de las cuales se la denomina módulo. La primera viene determinada por la condición

$$e^{\frac{-\psi}{\theta}} = \int^{\text{á todas las fases}} e^{-\frac{E}{\theta}} dq \cdots dp \cdots$$

La ley hallada para f satisface las cuatro condiciones anteriores. Una extensión cuya densidad tenga la forma

$$Ne^{\frac{\psi - E}{\theta}}$$

se llama canónica.

XIX.—Valores medios en las extensiones canónicas

Para obtener el valor medio de una cantidad φ función de las determinaciones de la fase, debemos calcular el valor de φ para todo punto de la extensión y dividir luego por el número de puntos. Dentro de cada elemento de extensión hay $D \times dq \cdots dp \cdots$ puntos en los cuales tendrá φ valores que diferirán indefinidamente poco entre sí. Podemos, al formar el valor medio, considerar á φ constante para todos los $D\, dq \cdots dp \cdots$ puntos de un elemento, y de este modo el valor medio que afectaremos de un guión en lo sucesivo vendrá dado por

$$\overline{\varphi} = \int e^{\frac{\psi - E}{\theta}} \varphi\, dq \cdots dp \cdots$$

La mayor parte de los desarrollos de la Mecánica estadística redúcense á la consideración de valores medios calculados mediante esta fórmula general.

Por ejemplo, los sistemas de la extensión contienen moléculas materiales y se requiere el valor medio de la componente

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

de la energía cinética de una de estas moléculas. Se tendrá al efecto teniendo presente que

$$\int_{\text{todas las fases}} e^{\frac{\Phi - E}{\theta}} dq \cdots dp \cdots d\left(\frac{dx}{dt}\right) = 1 \quad ,$$

$$\overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 e^{-\frac{m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{2\theta}} d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{2\theta}} d\left(\frac{dx}{dt}\right)}$$

ó bien

$$\overline{\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \frac{1}{2}\theta \qquad \text{(a)}$$

XX.—Aplicación á la teoría electromagnética

Para poder aplicar los métodos de la Mecánica estadística al éter de Maxwell en el que pululan las moléculas y los electrones, contenido en un recinto paralepipédico con paredes absolutamente reflectantes, necesitamos transformar convenientemente las ecuaciones del mismo. Dichas ecuaciones en la forma de Lorentz, son:

$$\begin{aligned} &\text{Div } E = \rho \\ &\text{Div } H = o \\ &\text{curl } H = \frac{1}{q}\left(\frac{\delta E}{\delta t} + \rho v\right) \\ &\text{curl } E = \frac{1}{q}\frac{\delta H}{\delta t} \end{aligned}$$

en la que ρ es la densidad eléctrica, E y H la prolongación ó corrimiento eléctrico y la fuerza magnética respectivamente y v la velocidad de los electrones. Con

estas condiciones y las de los límites está determinado el fenómeno eléctrico siempre que se conozcan los valores de las coordenadas del mismo en un instante dado (inicial), comprendiendo en ellas la distribución de la carga de los electrones y el movimiento particular de los mismos, dependiente de fuerzas procedentes de otros electrones, de las moléculas desprovistas de carga eléctrica y del medio en que se mueven. La fuerza debida á esta última causa es:

$$E + \frac{1}{q} \underline{v H}$$

designando por $\underline{v H}$ el producto vectorial de estas dos cantidades.

Para reducir las ecuaciones anteriores se puede partir del principio de Lorentz, análogo al de Hamilton en la Mecánica racional, que expresa que la

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[L - U \right] dt = o$$

es estacionaria para todo corrimiento compatible con las ligaduras. En esta ecuación U representa la energía eléctrica, L la magnética, y el corrimiento compatible con las ligaduras se entiende formado del siguiente modo: A partir de un momento dado se dan corrimientos indefinidamente pequeños á los electrones, así como incrementos de igual orden á E, compatibles con la ecuación

$$\text{div } E = \rho$$

y con las condiciones en los límites. La forma de la función del tiempo que puede expresar estos corrimientos es arbitraria.

La energía magnética del campo tiene por expresión

$$L = \frac{1}{2} \int H^2 d W$$

La eléctrica es

$$U = \frac{1}{2} \int E^2 d W$$

Y las ecuaciones fundamentales del campo electromagnético son una consecuencia del principio de integral extremal enunciado antes.

Las acciones no electromagnéticas y las que en general correspondan á las moléculas desprovistas de carga eléctrica activa, se tendrán en cuenta llevando sus contribuciones de energía á las dos expresiones de L (parte cinética) y de U (potencial).

Para pasar del principio de Lorentz á las ecuaciones en forma canónica, escogeremos un sistema de coordenadas q_1 que fijan la posición de las moléculas sin carga eléctrica, y otro q_2 para los electrones supuestos rígidos, y definida su posición por lo tanto por seis coordenadas.

El campo eléctrico puede considerarse descompuesto en dos: 1.° El que existiría si los electrones estuvieran en reposo en las posiciones q_2. 2.° El campo con ausencia de electrones, satisfaciendo en todo punto la ecuación

$$\text{Div } E = o$$

El primer campo viene definido por las q_2 y en el segundo se tiene suponiendo que en el recinto paralepipédico donde se halle el éter y enjambre de moléculas y electrones, f, g y h son las longitudes de las aristas,

$$\begin{aligned} E_x &= \sum \left(q_3 \alpha + q'_3 \alpha' \right) \cos \frac{u\pi}{f} x \operatorname{sen} \frac{v\pi}{g} y \operatorname{sen} \frac{w\pi}{h} z \\ E_y &= \sum \left(q_3 \beta + q'_3 \beta' \right) \operatorname{sen} \frac{u\pi}{f} x \cos \frac{v\pi}{g} y \operatorname{sen} \frac{w\pi}{h} z \\ E_z &= \sum \left(q_3 \gamma + q'_3 \gamma' \right) \operatorname{sen} \frac{u\pi}{f} x \operatorname{sen} \frac{v\pi}{g} y \cos \frac{w\pi}{h} z \end{aligned} \qquad \text{(b)}$$

siendo u, v y w números enteros y positivos que expresan longitudes, y para cada uno de los cuales se introducen dos direcciones α, β, γ; α', β' y γ' normales entre sí y á la dirección $\frac{u}{f}$, $\frac{v}{g}$, $\frac{w}{h}$; pues en efecto, la solución (*b*) satisface la ecuación de propagación en el medio y las condiciones límites en las paredes (E normal á las mismas). Para cada sistema de valores de u, v y w hay dos coeficientes q_3 y q'_3; y las sumas hacen referencia á todas las combinaciones posibles. De las q_3 nos serviremos como coordenadas del éter.

Para formar las expresiones de L y U en función de las q, observaremos que la energía debida á la superposición de los distintos campos puede provenir de la de cada uno individualmente, más la energía mutua. Los campos eléctricos en el caso presente dependen de q_2 y q_3, los magnéticos de $\frac{dq_2}{dt}$. Por otra parte

todo cambio en una q_3 da lugar á una corriente de corrimiento, la cual, así como el campo magnético que engendra es proporcional á $\frac{dq_3}{dt}$. En la expresión de la energía eléctrica no hay ningún término con el producto de una q_3 por una q_3, ni términos con dos q_3 diferentes, los cuales tampoco existen en la expresión de la energía magnética.

Así pues, se tendrá

$$U = U_0 + \frac{1}{16} f g h \sum q_3^2$$

siendo U_0 función de q_1 y q_2;

$$L = L_0 + \frac{fgh}{16 q_3^2} \sum \frac{\left(\frac{dq_3}{dt}\right)^2}{\pi^2 \left[u^2 f^{-2} + v^2 g^{-2} + w^2 h^{-2}\right]} + \sum_{ij} l_{ij} \frac{dq_{2i}}{dt} \frac{dq_{2j}}{dt}$$

siendo L_0 una función homogénea y de segundo grado de $\frac{dq_1}{dt}$ y $\frac{dq_2}{dt}$.

Puestos en la forma que antecede los valores de U y L, el principio de Lorentz conduce á ecuaciones análogas á las de Lagrange, y por lo tanto de Hamilton, proceso familiar al que conoce los rudimentos de la Mecánica racional.

La Mecánica estadística exige que el número de coordenadas de que depende un sistema sea finito, lo cual podemos lograr por lo que respecta á q_3, introduciendo ligaduras apropiadas que excluyan los campos eléctricos correspondientes á los valores *(b)* para los cuales la longitud de onda

$$\lambda = 2\left[u^2 f^{-2} + v^2 g^{-2} + w^2 h^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

sea inferior á un cierto límite. Del resultado podremos sin escrúpulo suprimir esta restricción pasando al límite y suponiendo valores de λ tan pequeños como se quiera.

Al sistema eléctrico así definido lo podemos considerar formando parte de una extensión canónica.

En ésta, el valor medio de la energía de una molécula de masa m y velocidad q_1 es evidentemente $3 \times \frac{1}{2}\theta$ siendo θ el módulo. Si u es el número de

moléculas iguales contenidas en el volumen antes citado, les corresponderá en total una energía media en la extensión canónica

$$\frac{3}{2} n\theta$$

energía que admitiremos que es igual á la de un solo cuerpo ó sistema de la extensión. Pero la energía del movimiento molecular es proporcional á la temperatura absoluta del medio, luego

$$\theta = \frac{3}{2} \alpha T$$

siendo α una constante. La coordenada q_3 entra sólo en forma de q_3^2 en la expresión de L, y repitiendo el razonamiento que nos condujo á la fórmula (a), veríamos que el valor medio de la energía correspondiente á q_3 viene también expresado por $\frac{1}{2}\theta$ ó $\frac{1}{3}\alpha T$, y por tanto la correspondiente á q_3 y q'_3 por

$$\frac{2}{3} \alpha T$$

Ahora bien, el número de sistemas u, v, w, para los cuales la longitud de onda λ está comprendida entre λ y $\lambda + d\lambda$, es decir, el número de puntos u, v, w, comprendidos entre dos esferas de radios λ y $\lambda + d\lambda$ en la representación estereométrica ordinaria, es, conforme se deduce de la fórmula que dá el valor de λ,

$$\frac{4\pi}{\lambda^4} f g h \, d\lambda$$

siempre que las dimensiones del recinto sean muchísimo mayores que las de λ. La energía eléctrica media de todos ellos es

$$\frac{8\pi}{3} \alpha \frac{T}{\lambda^4} f g h \, d\lambda$$

y por unidad de volumen

$$\frac{S}{\mathcal{S}} \pi \alpha \frac{T}{\lambda^4} d\lambda$$

Tal es la ley de la radiación de Jeans deducida por el método indicado por Lorentz.

XXI.—Consideraciones sobre la ley de Jeans

La deducción de esta ley es consecuencia de los principios del Electromagnetismo de Maxwell. Si la ley es cierta, la distribución de la energía entre la materia y el éter será una consecuencia de aquéllos, pero la ley de Jeans no responde á los resultados experimentales. Ni se aviene á la ley de Stefan-Boltzmann, ni á la del corrimiento de Wien ni mucho menos á las leyes empíricas en las que han condensado sus resultados los distintos experimentadores. No se deduce, en efecto, de ella máximo alguno para una longitud de onda, y en cambio síguese de la misma que para toda la extensión del espectro la cantidad de energía radiada es indefinidamente grande, de modo que el éter para poder estar en equilibrio con un cuerpo á una temperatura dada debería contener una cantidad indefinidamente grande de energía; ó lo que es igual, la energía de un cuerpo dotado de una cantidad finita de la misma, debe, según los resultados de Jeans, disiparse completamente en el éter, donde, al cabo de cierto tiempo se hallaría en forma de ondas extraordinariamente exiguas en longitud, tendiendo á cero la energía de aquéllas cuya λ fuese superior á una cierta λ_o cualquiera.

Ante el resultado de Jeans no hay más remedio que, completar ó transformar los principios teóricos de la electricidad en uso hoy día, ó bien criticar los experimentos realizados, en el sentido de que las observaciones no responden á la emisión efectiva del cuerpo negro, porque los utilizados como á tales no lo son para pequeñas longitudes de onda, ó bien, finalmente, concebir el estado de equilibrio á que se refiere la fórmula encontrada, como un *estado normal* que exigiría para establecerse, un tiempo indefinido.

Y, en efecto, la distribución de la energía entre el éter y la materia en tanto que se efectúa por el intermedio de los electrones, puede concebirse como indefinidamente lenta para longitudes de onda suficientemente exiguas, como consecuencia de poderes emisivos y absorbentes extraordinariamente pequeños para tales longitudes de onda; de este modo como antes hemos indicado, el estado de equilibrio final á que se refiere la fórmula de Jeans, tardaría extraordinariamente en conseguirse.

Esta opinión es la imperante hoy día. El estado *normal* ó definitivo de Jeans, en que hay equilibrio completo entre el éter y la materia, logrado por las radiaciones exclusivamente, sin fuerza extraña ni condición exterior al sistema, es un estado remoto al que tenderá seguramente, pero, por las razones apuntadas, tardará teóricamente un tiempo infinito en conseguirlo. La radiación encerrada en un recinto donde se encuentra materia y éter expuestos á sus radiaciones mútuas, por muy especulares que sean sus paredes, será en la realidad, con los recursos con que cuenta hoy el físico, siempre permeable á las pequeñas longitudes de onda; prácticamente, ni suponiendo que se dispone de un tiempo indefinido podría lograrse el estado normal de Jeans; para los rayos Roengten son ya transparentes muchos cuerpos duros y opacos ¿qué no serían para las sutilísimas radiaciones cuya longitud de onda fuera millones de veces más pequeña que la correspondiente á las ondas impulsivas de los rayos X?

Si el estado normal no puede prácticamente realizarse ¿porqué se verifica, pues, que para grandes longitudes de onda, la fórmula de la equidad en el reparto final de la energía, da resultados que comprueban la experimentación? Esto es debido á que cuando la distancia entre los electrones es pequeña comparada á la longitud de la onda que en su choque originan, puede resolverse, como demostró Lorentz (véase más abajo), el movimiento de aquéllos, en series regulares de ondas, cada una de las cuales posee una cierta energía proporcional á la temperatura, y se establece de un modo rápido el equilibrio entre tales ondas y el éter, es decir, para ellas, se logra prontamente el estado normal.

XXII. —Teoría de la radiación de Lorentz

La teoría de la radiación de Lorentz se basa en lo siguiente:

Según la teoría electrónica de los metales, contienen éstos á los electrones en alto grado de libertad, sin fuerza elástica que los sujete á un punto determinado, móviles á la manera de las moléculas gaseosas. Del choque de los mismos con las moléculas materiales nace la radiación de la energía de ambos. Si pudiéramos darnos cuenta del modo como tienen lugar los choques y de la energía emitida en virtud de los mismos, vendríamos en conocimiento del poder emisivo. El poder absorbente en función de la longitud de onda es consecuencia de la misma teoría; se conoce en efecto el poder reflectante por la aplicación de la reflexión de las ecuaciones de Maxwell. Conocido el poder emisivo y el absorbente, se conoce la función de la radiación.

El cálculo de Lorentz, para el caso de una placa metálica es complicado, y el resultado del mismo para longitudes de onda suficientemente grandes es la misma fórmula de Jeans. Para longitudes de onda pequeña no ha podido resolverse el problema por dificultades de cálculo.

La única teoría cuyos resultados se hallan de acuerdo con los de la experimentación es la de Planck. Pero ésta introduce hipótesis nuevas en la Física que no pueden admitirse á menos de rechazar las que están hoy en boga.

XXIII.—Exposición de la teoría de Planck. Oscilaciones de un resonador. Energía y entropia del mismo.

El teorema de Kirchhoff nos autoriza para estudiar la emisión del cuerpo más sencillo ó apropiado en el medio más sencillo sin que la fórmula de la radiación á que el estudio nos conduzca tenga la menor falta de generalidad. Llevado de esta consideración estudia Planck la emisión en el vacío de un resonador constituído por dos masas eléctricas iguales y de signo contrario concentradas en dos puntos y en movimientos oscilatorios según la línea que los une, cuya dirección supondremos en lo sucesivo que coincide con el eje de las z.

Sea $f(t)$ el momento del oscilador y U la energía del mismo en la forma

$$U=\frac{1}{2}Mf^2+\frac{1}{2}Q\left(\frac{df}{dt}\right)^2$$

y consideremos las ecuaciones del éter que cuenta en su interior este resonador.

Si E es la fuerza eléctrica en un punto, x, y, z; r la distancia del mismo a origen, se satisface á las ecuaciones de Maxwell con la solución

$$f=f\left(t-\frac{r}{q}\right)$$

$$E_x=\frac{xz}{q^2r^2}\frac{d^2f}{dt^2}$$

$$E_y=\frac{qz}{q^2r^2}\frac{d^2f}{dt^2}$$

$$E_z=\frac{-(x^2+y^2)}{q^2r^2}\frac{d^2f}{dt^2}$$

$$H_x=\frac{-y}{q^2r^2}\frac{d^2f}{dt^2}$$

$$H_y=\frac{-x}{q^2r^2}\frac{d^2f}{dt^2}$$

$$H_z=o \quad ;$$

Ecuaciones que poseen en las inmediaciones del resonador la discontinuidad que éste introduce en el campo, y representan una propagación por ondas esféricas, en la que, calculando por el teorema de Poynting la energía radiada al través de una superficie esférica de radio r se tiene para un intérvalo T, como valor de esta energía,

$$\frac{2}{3q^3}\int_t^{t+T}\left(\frac{d^2f}{dt}\right)^2 dt$$

en cuya expresión f puede tener para el cálculo de la integral la forma $f\left(t-\frac{r}{q}\right)$ ó simplemente $f(t)$, ya que la cantidad de energía radiada, suponiendo á T suficientemente grande, no depende del valor absoluto de t sino del intérvalo T. La energía radiada anterior lo es á costa de la energía U del resonador, de donde por el principio de la conservación de la energía

$$\int_t^{t+T}\left[\frac{dU}{dt}+\frac{2}{3q^3}\left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)^2\right]dt=o$$

De esta última ecuación, suponiendo que

$$\frac{1}{q^3}\frac{dt}{dt}\frac{d^2t}{dt^2}$$

es una cantidad mucho menor que U cualquiera que sea t, lo cual puede lograrse mediante apropiada elección de las constantes M y Q, y escribiendo σ en vez de $\frac{2\pi}{3q^3}\sqrt{\frac{M}{Q}}$; admitiendo por fin que σ es una cantidad sumamente pequeña, se tiene la siguiente ecuación

$$Mf+Q\frac{d^2f}{dt^2}-\frac{2}{3q^3}\frac{d^3f}{dt^3}=o$$

cuya solución es

$$f=Ce^{at}\cos(\beta t-\delta)$$

siendo

$$a = \frac{-M}{3\,q^3\,Q^2}\ ;$$

$$\beta = \sqrt{\frac{M}{Q}}$$

y C y δ dos constantes de integración.

La inversa del período de las oscilaciones del resonador es, según la ecuación anterior

$$\nu_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{M}{Q}}$$

con el decremento logarítmico σ.

Si el resonador está sujeto además á una fuerza eléctrica E_z, absorve una cantidad de energía en el intérvalo T igual á

$$\int_t^{t+T} E_z \frac{df}{dt}\,dt$$

y la ecuación de las oscilaciones del mismo, es

$$16\,\pi^4\,\nu_o^3\,f + 4\pi^2\,\nu_o\,\frac{d^2f}{dt^2} - 2\sigma\frac{d^3f}{dt^3} = 3\,\sigma\,q^3\,E_z$$

Si

$$E_z = C\cos(2\pi\nu t - \delta)$$

la ley de la oscilación forzada será

$$f(t) = \frac{3\,q^3\,C\,\operatorname{sen}\gamma}{16\,\pi^3\,\nu^3}\cos(2\pi\nu t - \delta - \gamma)$$

siendo

$$\cot \gamma = \frac{\pi \nu_o (\nu_o^2 - \nu^2)}{\sigma \nu^3}$$

de cuya expresión se deduce para la energía del mismo

$$U = \frac{3 q^3 \nu_o (\nu_o^2 + \nu^2)}{64 \pi^2 \sigma \nu^6} C^2 \operatorname{sen}^2 \gamma$$

Colocado el resonador en un recinto impermeable á las radiaciones pero en el que éstas tienen lugar, ejercerá influencia tan sólo sobre aquéllas cuya ν difiera muy poco de ν_o. Supongamos definida por una serie de Fourier la componente E_z de la fuerza eléctrica en el origen

$$E_z = \sum_{n=o}^{n=\infty} C_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T} - \delta_n\right)$$

Al periodo fundamental T lo supondremos suficientemente grande para que cualquiera que sea el valor de t que consideremos, se tenga

$$t < T$$

Admitiremos además que el estado del resonador en el tiempo t es independiente del estado del mismo en el tiempo cero. Según el teorema de Poynting

$$u = \frac{3}{4\pi} \overline{E_z^2} = \frac{3}{8\pi} \sum C_n^2$$

y por lo tanto, también

$$k = \frac{3 q}{32 \pi^2} \sum C_n^2$$

Como n es una cantidad sumamente grande $\left(\text{se tiene en efecto } \nu = \frac{n}{T}\right)$, á

todo incremento $d\nu$ corresponderá un número n' de C_n; no siendo n' del orden de $d\nu$, y así podrá escribirse

$$u_\nu d\nu = \frac{3}{8\pi} \sum_{n}^{n+n'} C_n^2$$

$$d\nu = \frac{n'}{T}$$

$$u_\nu = \frac{3T}{8\pi} \overline{C_n^2}$$

siendo $\overline{C_n^2}$ el valor medio de C_n^2 en el intérvalo de n á $n + n'$.

De un modo análogo

$$k_\nu = \frac{3q}{64\pi^2} \frac{T}{\nu^2} \overline{C_n^2}$$

Si se divide la cantidad de energía $\overline{E_a \frac{dt}{dt}}$ absorbida por el resonador por la intensidad específica k_o de la radiación monocromática ν_o, y suponemos que el cociente A es independiente de la amplitud de la radiación incidente, obtenemos

$$\frac{\sum_{o}^{\infty} \frac{C_n^2 \operatorname{sen}^2 \gamma_n}{\nu^2}}{T\overline{C_n^2}} = A$$

El valor A se puede determinar suponiendo iguales entre sí todas las C. Resulta así,

$$A = \frac{\sigma}{2\nu_o}$$

y por tanto

$$k_o = \frac{3q\nu_o}{32\pi^2\sigma} \sum_{o}^{\infty} \frac{C_n^2 \operatorname{sen}^2 \gamma_n}{\nu^2}$$

De donde, hallando el valor de U, y comparándolo con el anterior, se deduce:

$$U = \frac{q^2}{\nu_o^2} k_o = \frac{q^3 u_o}{8\pi \nu_o^2}$$

mediante cuyas fórmulas se relaciona la energía media del resonador con la intensidad específica y la energía por unidad de volumen correspondiente á la radiación monocromática linealmente polarizada cuyo periodo es el del resonador.

Estas consideraciones nos permiten abordar la noción de entropia del resonador. Supongamos al efecto móvil una de las paredes del recinto donde se halla, é iniciemos una compresión adiabática de la radiación que se halla en el interior. La entropia del sistema total no varia, pero sí la k de cada radiación en particular; teniendo ello por consecuencia que el resonador absorberá energía de la radiación hasta restablecerse el equilibrio al finalizar toda compresión adiabática elemental; en consecuencia, la entropia del resonador aumentará en tanto como disminuirá la de la radiación. El estado termodinámico del resonador es sólo función de u, luego también lo será la entropia S del mismo. Expresando el proceso anterior, como es corriente en Termodinámica

$$\frac{\delta S}{\delta u} = \frac{\delta s_o}{\delta u_o} = \frac{1}{T}$$

obteniéndose además:

$$S = \frac{q^2}{\nu_o^2} L_o$$

y por lo tanto

$$S = F\left(\frac{U}{\nu_o}\right)$$

Si logramos expresar la entropia S del resonador en función de $\frac{U}{\nu_o}$ obtendremos la forma de la función F, y por lo tanto la ley de la radiación.

XXIV.—Relación entre la entropia y la probabilidad

Al genio de Boltzmann, se debe la referencia de la noción de entropia á la de probabilidad. Cuando un sistema, no en equilibrio termodinámico, evoluciona, tiende al estado de máxima entropia, y el sólo hecho de tender á él demuestra que es el más probable; de modo que el máximo de entropia coincide con el de probabilidad. La forma de la función que relaciona á una y otra no puede ser más que la logarítmica pues la entropia S del conjunto de dos sistemas aislados es la suma de las entropias de los mismos, al paso que la probabilidad P es el producto de las probabilidades.

De la expresión analítica de esta propiedad se deduce una ecuación funcional que da para f en $S=f(P)$, la forma

$$S=p \log P + \text{Constante}$$

La probabilidad de un sistema la hemos definido al estudiar las extensiones de la Mecánica estadistica. En este punto nos valdremos de la noción de Planck, que vamos á exponer á continuación.

XXV.—Sobre la noción de probabilidad. Ley de Planck

Las fórmulas obtenidas hasta aquí y que hacen referencia al resonador, contienen solo valores medios, que pueden obtenerse por infinidad de procesos originarios de sendas hipótesis. Con objeto de precisar, limitando la excesiva indeterminación de aquéllos, supondremos que las vibraciones parciales señaladas en la fórmula de U son completamente irregulares; de donde la distribución U en los distintos instantes y para un mismo resonador, podrá referirse á la distribución instantánea de una serie de resonadores que, sin influencia mutua estén expuestos á las radiaciones y en número igual al de los instantes considerados antes para hallar el valor medio. Sea N el número de los resonadores U_N la energía total de los mismos, evidentemente igual á UN; y sea además ε una fracción sumamente pequeña de U_N de modo que

$$\frac{U_N}{\varepsilon}=J$$

sea un número sumamente grande. Para distribuir las cantidades ε de energía entre los N resonadores, habiendo J cuantums ε, es evidente que lo podemos hacer de un número de maneras igual al de combinaciones con repetición de N elementos de la clase J, el cual es:

$$P = \frac{(N+J-1)!}{(N-1)!\,J!}$$

número que definiremos como probabilidad, y de lo cual se deduce, teniendo presente que N y J son números grandes,

$$S_N = p \log \frac{(N+J)!}{N!\,J!}$$

y empleando la fórmula de Stirling

$$S_N = p \{ (N+J) \log (N+J) - N \log N - J \log J \}$$

y de aquí suponiendo

$$\varepsilon = h\nu$$

siendo h una nueva constante cuyas dimensiones son las de una «acción» en el sentido que esta palabra tiene en Mecánica racional,

$$S_N = p \left\{ \left(1 + \frac{U}{h\nu}\right) \log \left(1 + \frac{U}{h\nu}\right) - \frac{U}{h\nu} \log \frac{U}{h\nu} \right\}$$

de cuya expresión resulta la fórmula de la función F, y por tanto la energía del resonador

$$U = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{pT}} - 1} \quad ;$$

y la energía por unidad de volumen en el éter

$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{q^3 \left[e^{\frac{h\nu}{pT}} - 1 \right]} \quad ;$$

De modo que la intensidad específica k_λ referida á la longitud de onda de un rayo monocromático ($k_\lambda \, d\lambda = k_\nu \, d\nu$)

$$k_\lambda = \frac{q^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{qh}{p\lambda T}} - 1}$$

llamada fórmula de Planck por ser debida á físico tan eminente.

XXVI.—Consideraciones sobre la teoría de Planck

Para grandes longitudes de onda da la fórmula de Planck el mismo resultado que las de Jeans y Lorentz, así es que para estas longitudes de onda la fórmula de la radiación puede considerarse como indiscutible y definitiva.

De la comparación con los resultados experimentales, dedúcese:

$$h = 6{,}548 \times 10^{-27} \text{ erg. sec.}$$

$$p = 1{,}346 \times 10^{-16} \frac{\text{erg.}}{\text{grad.}}$$

De la teoría se deducen algunos resultados sobre los que no insistiremos aquí, y que resultan comprobados por los de otras teorías; por ejemplo: el valor de la masa absoluta de un átomo de hidrógeno.

La constante h, tiene gran importancia, pues ella señala lo característico de la teoría de Planck. En efecto, la teoría de Planck se distingue por admitir que la energía de un resonador no puede variar en los fenómenos de emisión y absorción sino por cuantums, múltiplos de ε, el llamado cuantum de energía, lo cual está en oposición con la teoría electromagnética de Maxwell, para la cual no hay cuantums privilegiados ni definidos, así es que el principio que constituye la base de la teoría de Planck, debe enunciarse así: «Aunque la teoría de Maxwell es inaplicable á los resonadores, la energía media de un resonador en el seno de una radiación es la misma que la que da aquella teoría»; principio al que se opone una pequeña dificultad aparente, que da por otra parte la explicación de algunos fenómenos recientemente descubiertos, y que consiste en que ε es relativamente grande si se la compara con la energía media de un resonador, así es que en la distribución de la misma les cabrá probablemente á pocos resonadores valores distintos de cero.

La teoría de los cuantums explica con facilidad la ley de Stokes en la luminiscencia, pues, si un resonador de cuantum ε_1 se mueve y choca con otro, obligando á moverse á éste, el cuantum ε_2 que le comunica ha de ser menor que ε_1, y por lo tanto,

$$\nu_2 \leqq \nu_1$$

Si el corrimiento inicial del electrón ó resonador después del choque no sólo se debe á un electrón incidente, sino á varios otros, la ley de Stokes no se verifica, y de este modo se explican también las excepciones á la citada ley.

Por consideraciones análogas se demuestra la ley de Lenard en la emisión catódica debida á la incidencia de la radiación luminosa sobre la superficie de un sólido.

Aparte de todas estas particularidades de la teoria, preséntase al comparar la teoría de Planck con la de Jeans la siguiente pregunta. ¿Cuál es la razón intrínseca, que explica el porqué conducen las dos teorías á resultados distintos?

La diferencia esencial entre la teoría de Jeans y la de Planck, es, que en la teoría del primero examínase lo que pasará á la materia en presencia del éter, sujetos ambos á su sola radiación, caso puramente teórico, y que como ya hemos visto no puede realizarse. En la del segundo, en cambio estúdiase el estado *estacionario* de la materia y el éter sujetos á sus radiaciones y á una influencia exterior que contribuye á determinar el estado de aquéllos. Diríase que Jeans ha estudiado una vibración libre, y Planck una vibración forzada. Esta es más realizable en la práctica; así se recordará que los cuerpos negros están constituídos por cavidades cuya temperatura se mantiene constante. ¿Es esta condición equivalente á la de paredes absolutamente reflectoras? Cierto que no. Esta condición es una condición que exige acción exterior, luego el estado de equilibrio de Planck, es forzado. Por esto en su teoría intervienen más constantes que en la de Jeans.

XXVII.—Generalidades sobre la emisión de cuerpos en movimiento

Propóngome tratar en la segunda parte del presente discurso de la emisión de radiaciones por cuerpos en movimiento, fundada en el Electromagnetismo de cuerpos móviles, arduo problema de la Física teórica, sobre la que ha venido á derramar potente chorro de luz el principio de la relatividad de Lorentz-Eisenstein.

XXVIII.—Antecedentes del principio de relatividad

Fresnel admitió para explicar el resultado de los experimentos de Fizeau sobre el retraso ó adelanto que en su velocidad experimenta un rayo lumínico al propagarse en un medio en movimiento, que el éter era arrastrado por aquél, deduciendo de sus puntos de vista teóricos una fórmula que resultó de acuerdo con la experimentación. Lorentz llegó á la misma fórmula valiéndose de su teoría de los electrones y suponiendo al éter en reposo; teoría que dió cuenta de la aberración y del principio de Doppler. El resultado negativo de los experimentos de Michelson y Morley, le condujo con Fitz Gerald á suponer que los cuerpos se acortan en el sentido de su movimiento, y el de los experimentos de Lord Rayleigh y Brace á suponer que son deformables los electrones supuestos esféricos, acortándose el diámetro de los mismos en la dirección del movimiento; hipótesis modificada por Bucherer, que admite que el volumen permanece inalterable, y puesta en duda por Abraham, que prefiere suponer al electrón indeformable. No es mi propósito comparar las tres diferentes hipótesis que privan hoy día sobre los electrones, y en este párrafo me limitaré á indicar que, referidas las ecuaciones electromagnéticas fundamentales de Lorentz al cuerpo en movimiento é introduciendo el llamado tiempo local, la forma de las ecuaciones es igual que la de las que se refieren á cuerpos en reposo. De este hecho nació el principio de la relatividad.

XXIX.—Enunciado del principio de relatividad

El principio de relatividad expresa que las leyes que siguen los fenómenos electromagnéticos son independientes de los ejes de referencia suponiéndolos animados de un movimiento de traslación respecto á ejes fijos. Para comprender bien la sigificación y alcance de este principio es conveniente acaso precisar antes la noción de movimiento.

XXX.—Sobre la noción del sincronismo

Nos damos cuenta del movimiento de un cuerpo por la sucesión de posiciones del mismo en tiempos diferentes. La noción de movimiento está, pues, subordinada á la de tiempo.

Supongamos que en un punto *A* del vacío se encuentra un reloj. Un observador podrá darse cuenta de los fenómenos que ocurren á su alrededor en distintos tiempos anotando las posiciones de las manecillas, sincrónicas con aquéllos.

Si en el punto B del espacio hay otro reloj igual al de A, un observador colocado en B podrá apreciar el tiempo referido en las inmediaciones de B. Mas el sincronismo de un fenómeno ó de dos fenómenos en B y A no podrá ser apreciado, ni en B ni en A, si estos dos puntos están distantes, como no se recurra á algún medio especial, que ha de fundarse necesariamente en una transmisión entre A y B, unido á la afirmación de que el tiempo de la transmisión, de la luz por ejemplo, entre A y B es igual al de la transmisión entre B y A, necesaria esta última para *precisar* la noción del sincronismo.

Sea un rayo de luz que parte en el *tiempo* A t_A, va de A á B, es reflejado en B, y en el *tiempo* B t_B vuelve de B á A, adonde llega en el tiempo t'_A. Diremos, de acuerdo con la afirmación anterior, que los relojes en A y B marchan sincrónicos cuando

$$t_B - t_A = t'_A - t_B$$

El tiempo correspondiente á un suceso será para todo lo sucesivo el de un reloj inmediato sincrónico con un reloj fijo de referencia.

Del principio de la relatividad y de las ecuaciones de Maxwell se deduce que q es constante tanto si se propaga la luz en un cuerpo en reposo como si se propaga en un cuerpo en movimiento.

El sistema móvil de ejes lo supondremos paralelo al fijo y tal que al origen se mueva con una velocidad w determinada á lo largo del eje de las x.

XXXI.—De la medición de longitudes

Sea una longitud l de un cuerpo rígido medida según el eje de las x con una cierta unidad de medida, y suponiendo al cuerpo en reposo. Si se mueve este cuerpo, solidario de los ejes móviles, la longitud l cambia, según vamos á demostrar efectuando la medición de l en las dos operaciones siguientes:

1.ª Con la unidad de medida de antes mediremos la longitud l en movimiento.

2.ª Por medio de relojes sincrónicos mediremos en qué puntos del sistema en reposo se hallan los extremos de l en un tiempo t determinado. Según el principio de relatividad esta medida ha de dar igual resultado que la primera.

Supongamos que en los extremos de l hay dos observadores provistos de relojes sincrónicos con el reloj del sistema en reposo. En el tiempo t_A parte un rayo de A, se refleja en B en el tiempo t_B y llega á A en el t'_A. Si w es la velocidad de l medida en el sistema en reposo,

$$t_B - t_A = \frac{AB}{q - w}$$

$$t'_A - t_B = \frac{AB}{q + w}$$

De aquí se deduce que dos sucesos sincrónicos respecto á un sistema de coordenadas en movimiento no lo serán generalmente para el sistema de reposo absoluto.

XXXII.—De las fórmulas de transformación de coordenadas

Llamaremos x, y, z y t á las coordenadas y al tiempo referidos al sistema de ejes en reposo *(r)*; y ξ, η, ζ, τ á las mismas expresiones para el sistema *(m)* de ejes en movimiento. A todo punto en reposo en *(m)* corresponderán valores determinados de $x' = x - wt$, y, y z. Para determinar la τ de uno de estos puntos, supongamos que el origen de *(m)* envía en el tiempo τ_0 un rayo á x, adonde llega en el tiempo τ_1, reflejándose y volviendo al origen en el tiempo τ_2. Se tendrá

$$\tau_1 = \frac{1}{2}\left(\tau_0 + \tau_2\right)$$

ó bien

$$\tau\left(x', o, o, t + \frac{x'}{q - w}\right) = \frac{1}{2}\left[\tau\left(o, o, o\, t\right) + \tau\left(o, o, o, t + \frac{x'}{q - w} + \frac{x'}{q + w}\right)\right]$$

De donde suponiendo á x' indefinidamente pequeño,

$$\frac{\delta \tau}{\delta x} + \frac{w}{q^2 - w^2}\,\frac{\delta \tau}{\delta t} = o$$

Consideraciones análogas referidas á los ejes y y z darían

$$\frac{\delta \tau}{\delta y} = o \quad , \quad \frac{\delta \tau}{\delta z} = o$$

de modo que

$$\tau = \varphi(w) \times \left[t - \frac{w}{q^2 - w^2} x' \right]$$

siendo φ una función desconocida.

Con este resultado se pueden expresar los valores de τ, ξ, η, ζ, ya que por ejemplo $\xi = q\tau \cdots$ etc., del modo siguiente:

$$\tau = \varphi(w)\beta \left[t - \frac{w}{q^2} x \right]$$

$$\xi = \varphi(w)\beta \left[x - w t \right]$$

$$\eta = \varphi(w) y$$

$$\zeta = \varphi(w) z$$

con

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{q^2}}}$$

Para dar con la forma de φ introduzcamos un nuevo sistema coordenado con movimiento $-w$ respecto al sistema móvil; hallando la consigniente transformación de coordenadas y observando que la del paso de ejes en reposo al nuevo sistema ha de ser una transformación idéntica, se obtiene $\varphi(w) = 1$.

XXXIII. Transformaciones de las ecuaciones de Maxwell Hertz

Las ecuaciones de Maxwell Hertz, referidas al sistema móvil, conservan la misma forma. Distinguiendo las cantidades correspondientes por letras griegas, se tendrá

$$\frac{1}{q}\frac{\delta E_\xi}{\delta \tau} = \frac{\delta H_\zeta}{\delta \eta} - \frac{\delta H_\eta}{\delta \zeta}$$

$$\frac{1}{q}\frac{\delta E_\eta}{\delta \tau} = \frac{\delta H_\xi}{\delta \zeta} - \frac{\delta H_\zeta}{\delta \xi}$$

$$\frac{1}{q}\frac{\delta E_\zeta}{\delta \tau} = \frac{\delta H_\eta}{\delta \xi} - \frac{\delta H_\xi}{\delta \eta}$$

$$\frac{1}{q}\frac{\delta H_\xi}{\delta \tau} = \frac{\delta E_\eta}{\delta \zeta} - \frac{\delta E_\zeta}{\delta \eta}$$

$$\frac{1}{q}\frac{\delta H_\eta}{\delta \tau} = \frac{\delta E_\zeta}{\delta \xi} - \frac{\delta E_\xi}{\delta \zeta}$$

$$\frac{1}{q}\frac{\delta H_\zeta}{\delta \tau} = \frac{\delta E_\xi}{\delta \eta} - \frac{\delta E_\eta}{\delta \xi}$$

Estando relacionados los nuevos vectores con los antiguos mediantes las fórmulas

$$E_\xi = E_x$$

$$E_\eta = \beta\left[E_y - \frac{w}{q} H_y\right]$$

$$E_\zeta = \beta\left[E_z - \frac{w}{q} H_x\right]$$

$$H_\xi = H_x$$

$$H_\eta = \beta\left[H_x + \frac{w}{q} E_z\right]$$

$$H_\zeta = \beta\left[H_z - \frac{w}{q} E_y\right]$$

de cuyas ecuaciones puede deducirse toda la Electrodinámica. Suponiendo que las E_x, E_y, E_z definen la propagación de una onda plana cuya normal forma con los ejes ángulos cuyos cosenos son a, b, c, en el sistema móvil forma la normal á la onda plana, ángulos cuyos cosenos α, β, γ son

$$\alpha = \frac{a - \frac{w}{q}}{1 - a\frac{w}{q}}$$

$$\beta = \frac{b}{\beta\left(1 - a\frac{w}{q}\right)}$$

$$\gamma = \frac{c}{\beta\left(1 - a\frac{w}{q}\right)}$$

con un cambio en la frecuencia

$$\Delta\nu = \nu\left[\frac{1 - \cos\varphi\,\frac{w}{q}}{\sqrt{1 - \left(\frac{w}{q}\right)^2}} - 1\right]$$

para un observador móvil con los ejes y colocado en un punto tal que la recta que lo une al centro luminoso forma un ángulo φ con el eje x en un instante dado. No sólo experimenta el observador un cambio en la ν, sino también en la amplitud $A_{(r)}$ de la vibración, en el sentido de que la nueva amplitud $A_{(m)}$ vale

$$A_{(m)} = A_{r_i}\frac{1 - \frac{w}{q}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{w}{q}\right)^2}}$$

La energía por unidad de volumen en el sistema en reposo vale $\frac{A_r^2}{8\pi}$. En el sistema en movimiento será

$$\frac{A_m^2}{8\pi}\,\frac{W_m}{W_r}$$

siendo $\frac{W_m}{W_r}$ la relación entre un volumen en el sistema móvil y el correspondiente sistema fijo, resultando

$$u_m = u_r \frac{1 - \frac{w}{q}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{q^2}}}$$

XXXIV. —De la pérdida de masa en la radiación é inercia de la energía

Sea un cuerpo radiante en el origen del sistema *(r)* cuya energía sea E_r, siendo E_m su energía en el sistema *(m)*. Supongamos que este cuerpo emite energía en una dirección que forma con el eje x un ángulo φ, y en cantidad $\frac{L}{2}$ para cada uno de los dos sentidos de aquella dirección. El cuerpo permanecerá evidentemente en reposo. Sean E'_r y E'_m las energías del cuerpo después de haber emitido L.

Se tendrá:

$$E_r = E'_r + L$$

$$E_m = E'_m + \left[\frac{L}{2}\frac{1 - \frac{w}{q}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{q^2}}} + \frac{L}{2}\frac{1 + \frac{w}{q}\cos\varphi}{\sqrt{1 + \left(\frac{w}{q}\right)^2}}\right] = E'_m + \frac{L}{\sqrt{1 + \left(\frac{w}{q}\right)^2}}$$

de donde

$$E_r - E'_r - (E_m - E'_m) = L\left[\left(1 + \left(\frac{w}{q}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right]$$

En primera aproximación al menos, $E_r - E_m$ sólo puede diferir de la energía cinética E_c del cuerpo referido al sistema móvil, por una constante C, de modo que

$$E_m - E_r = E_c + C$$
$$E'_m - E'_r = E'_c + C$$
$$E_c - E'_c = L\left[\left(1 - \left(\frac{w}{q}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right]$$

Luego varía la energía cinética del cuerpo respecto á *(m)*, como consecuencia de la emisión de radiaciones, de una cantidad independiente de la naturaleza del cuerpo, y que vale apróximadamente

$$\frac{L}{q^2}\,\frac{w^2}{2}$$

Luego si un cuerpo emite la cantidad L de energía en forma de radiación disminuye su masa de una cantidad

$$\frac{L}{q^2}$$

De aquí se deduce que hay que atribuir inercia á la energía, y es efectivamente ésta la única manera de dejar incólume el principio de la Mecánica conocido con el nombre de conservación del centro de gravedad, como vamos á demostrar ciñéndonos á un caso particular.

Imaginemos al efecto un recinto cerrado paralepipédico lleno de éter, y en una de cuyas paredes A se encuentra una disposición cualquiera capaz de emitir energía L á la pared ó cara opuesta B. Mientras tiene lugar la radiación existe una presión de fuera á dentro sobre la cara A, que comunica á todo el recinto una velocidad en el mismo sentido, por ejemplo hacia la izquierda, si A es la cara de la izquierda del paralelepípedo. Si la masa del recinto es M, su velocidad será

$$\frac{L}{q\,M}\ ,$$

la cual se anula al llegar toda la radiación á la cara B donde supondremos que es absorbida. Si d es la distancia $A\,B$, el movimiento ha durado $\frac{d}{q}$, y el recinto se ha corrido

$$\delta = \frac{S\,d}{q^2\,M}$$

siendo S la superficie de la cara A ó B.

Supongamos que la absorción en B ha tenido lugar por medio y en el interior de un cuerpo adicional I, desprovisto de masa; y que por un mecanismo también sin ella trasladamos á I de B á A donde comunicamos la energía absorbida al cuerpo emitente primero, trasladando después I de A á B. El estado final de este proceso de operaciones es idéntico al inicial, siendo reversible; con la sola di-

ferencia de haberse corrido el recinto, y por lo tanto el *c. d. g* total, el cual por una sucesión de ciclos iguales puede moverse indefinidamente por sí solo partiendo del reposo. Esta dificultad desaparece si admitimos la inercia de la energía; que el cuerpo *I* al transportarle de *B* á *A* posee la masa $\frac{L}{q^2}$, por lo tanto el *c. d. g* total permanece invariable, pues por causa del transporte debía correrse el recinto de una cantidad δ hacia la derecha.

XXXV.—De los invariantes en la transformación de coordenadas

Se facilita la transformación que expresa el principio de relatividad aplicado al movimiento estacionario de un recinto en cuyo seno tiene lugar la radiación, buscando los invariantes de aquélla. Los más importantes son:

q ,
z ,
p , (presión)
S , (entropia)
G_y , (componente sobre el eje y)
G_z , (componente sobre el eje z) } de la cantidad de movimiento G
$\frac{H}{\sqrt{q^2 - w^2}}$, (H = potencial cinético de Helmholtz)
$G\frac{\sqrt{q^2 - w^2}}{w}$,
$\sqrt{q^2 - w^2}\, dt$,
$H\, dt$,
$W\, dt$,
$T\, dt$,
$F_y\, dt$
$F_z\, dt$ } Componentes sobre los ejes y y z respectivamente de los impulsos de las fuerzas exteriores F, relacionadas con el potencial cinético mediante las fórmulas $\frac{d}{dt}\frac{\delta H}{\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)} = F_x$; $\frac{d}{dt}\frac{\delta H}{\delta\left(\frac{dy}{dt}\right)} = F_y$; $\frac{d}{dt}\frac{\delta H}{\delta\left(\frac{dz}{dt}\right)} = F_z$

$E\, dt - G_x\, dx$,
$R\, dt - G_x\, dx$; [$R = E + pW$ es la función llamada por Gibbs función calórica]

Es de recordar que las derivadas del potencial cinético respecto de W y T son la presión y la entropia.

XXXVI.—Presión, energía, entropia y cantidad de movimiento de la radiación

Con ayuda de las fórmulas anteriores nos será fácil conocer las leyes de la radiación para el movimiento del recinto, suponiéndolas conocidas para cuando está en reposo. Si referidas á este estado en cada sistema *(r)* ó *(m)* en particular, afectamos de un subíndice cero las letras representativas de las diversas cantidades, se tendrá, según Planck

$$G_r = \frac{w}{q^2 - w^2} W p_{\underset{o}{(m)}} + \frac{u}{q^2 - w^2} T S_{\underset{o}{m}} - q \frac{w}{\sqrt{q^2 - w^2}} H_{\underset{o}{m}}$$

$$E_r = \frac{q}{\sqrt{q^2 - w^2}} E_{\underset{o}{(m)}} + \frac{w}{q^2 - w^2} W p_{\underset{o}{(m)}}$$

$$R_r = \frac{q}{\sqrt{q^2 - w^2}} R_{\underset{o}{(m)}}$$

$$G_r = \frac{w}{q^2} R_r$$

$$S_r = S_{(m)}$$

De donde admitiendo para $E_{\underset{o}{(r)}}$ la ley de Stefan Boltzmann, para $p_{\underset{o}{(r)}}$ la fórmula de Maxwell y para $S_{\underset{o}{(r)}}$ el valor $\frac{4}{3} a T^3 W$ consecuencia de las anteriores, resulta, teniendo presente las relaciones entre el sistema (r) y el (m),

$$E_{\underset{o}{m}} = \frac{a q^5 T^4 W}{(q^2 - w^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$p_{\underset{o}{(m)}} = \frac{a q^4 T^4}{3 (q^2 - w^2)}$$

$$S_{\underset{o}{(m)}} = \frac{4 a q^4 T^3 W}{3 (q^2 - w^2)^2}$$

y en consecuencia

$$p_r = \frac{a\,q^4\,T^4}{3\,(q^2 - w^2)^2}$$

$$S_r = \frac{4\,a\,q^4\,T^3\,W}{3\,(q^2 - w^2)^2}$$

$$E_r = \frac{a\,q^4\,(3\,q^2 + w^2)}{3\,(q^2 - w^2)^3}\,T^4\,W$$

$$G_r = \frac{4\,a\,q^4\,w}{3\,(q^2 - w^2)^3}\,T^4\,W$$

XXXVII.—Sobre la masa

De la cantidad de movimiento $G = \frac{\delta H}{\delta w}$ pasamos á la noción de masa, pero hay alguna indeterminación en el modo de hacerlo, que no es igual pasar diferenciando respecto á la velocidad isotérmica (masa longitudinal) ó adiabáticamente, que pasar dividiendo simplemente por w (masa transversa) ó suponer que el concepto de la masa es más sencillo suponiendo $w = o$ en la expresión de la masa transversa, con lo cual se tiene la masa de Planck:

$$M = \frac{E_{(r)}_{o} + p_{(r)}_{o}\,W_{(r)}_{o}}{q^2}$$

función del volumen y de la temperatura del cuerpo.

La relación anterior entre la masa y la función R. de Gibbs, nos indica que la variación de la masa por radiación es igual á la cantidad de calor absorbida ó desprendida en una transformación isobárica dividida por q^2; resultado al que habíamos llegado procediendo con menos rigor al suponer que la energía total de un cuerpo en movimiento podía descomponerse en sumandos, dos de los cuales eran la cinética y la energía referida á un sistema fijo; dicho de otro modo, que la energía era descomponible en cinética ó interna, descomposición valedera solo en primera aproximación, y sin sentido rigurosamente hablando. Los cambios de masa demostrados teóricamente, son inapreciables en la práctica, aún en aquellas transformaciones químicas que originan ó absorben mayor cantidad de energía. Mas aunque sea difícil comprobar en este sentido la teoría, nos evidencia ésta que en el interior de los cuerpos, en el interior de sus átomos, debe haber una cantidad extraordinaria de energía que no puede alterarse con los medios de que disponen

la Física y la Química clásicas; así es que la energía latente de un cuerpo, aún á la temperatura del cero absoluto, será extraordinariamente grande y diferirá muy poco de la energía del mismo á las más elevadas temperaturas á que logremos llevarle. Tal energía intrínseca en las últimas divisiones de la materia puede ser de origen cinético, pero acaso sea de otro origen, ya que los fenómenos intraatómicos deben de ser extraordinariamente complicados.

Si bien como hemos dicho, la Física y la Química clásicas no pueden transformar la energía de los cuerpos demostrando á fortiori este depósito extraordinario de la misma, los cuerpos radiactivos de gran peso atómico recientemente descubiertos, parecen ponerlo de manifiesto; que su emisión puede ser debida, como opinan la mayor parte, á una transformación ó acaso destrucción de los mismos. Aplicando al radio de las fórmulas anteriores, se encuentra que su pérdida de peso anual ha de ser de

12 milígramos por gramo.

Al hablar de masa en este capítulo nos hemos referido no á la ponderable, sino á la inerte; que es diferente una de otra; en efecto, la radiación en un recinto hemos demostrado que tiene masa inerte, y no la posee, en cambio, ponderable; mas como toda variación de la energía latente debe traer por consecuencia una variación en la acción gravitatoria, manifestación indudable de aquélla, la acción ponderable podrá utilizarse para poner de manifiesto toda alteración en la energía cuando la técnica constructiva de las balanzas esté lo suficientemente desarrollada.

XXXVIII.—Sobre las ecuaciones más generales del Electromagnetismo

El principio de la relatividad es universalmente admitido y la base de la Electrodinámica. Lorentz y Eisenstein lo aplicaron á la determinación de las ecuaciones transformadas de las de Maxwell-Hertz para el caso de propagarse la radiación en el vacío ó éter. Posteriormente, Laub generalizó los resultados anteriores aplicando la transformación al caso de propagarse la energía en el seno de un dieléctrico; más recientemente, se han generalizado todavía más, aplicándolas á la propagación en cuerpos cualesquiera, eléctricos y magnéticos, homogéneos ó heterogéneos, merced á los trabajos de uno de los más eminentes matemáticos contemporáneos: Minkowsky.

DISCURSO DE CONTESTACION

por el Académico

D. José Doménech y Estapá

Siempre es grato á un académico el tener la honra de presentar á esta Corporación á un nuevo individuo, elemento de vida intelectual que ha de contribuir con su trabajo y su talento al mejor lustre de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona, pero en este caso lo es para mi de mayor satisfacción; la misma que tiene el padre al ver á uno de sus hijos radiante de actividad y de hermosura, tiene el maestro cuando Dios le concede la dicha de contemplar á uno de sus más aventajados discípulos, y sobre todo, como sucede en este caso en que parece que era ayer que lo tenía sentado en uno de los bancos de mi cátedra.

Sólo hace cuatro años que asistía el hoy Dr. Terradas, como simple alumno á mi cátedra de Geometría Descriptiva de esta Universidad, y apenas terminó con todos los honores, la licenciatura en ciencias físico-matemáticas, se fué á Madrid á cursar el Doctorado, confirmando los profesores de la Universidad Central el fallo que acerca de las excepcionales condiciones que para el cultivo de la ciencia matemática había emitido el Claustro de Barcelona, concediéndole la aprobación de todos sus exámenes con nota de Sobresaliente y otorgándole dos premios extraordinarios de los grados de Doctor en Ciencias exactas y en Ciencias físicas.

Pero el vuelo emprendido por el joven Doctor no podía detenerse, pues el constante estudio y su privilegiado talento, le invitaban á elevarse cada vez más en el rápido vuelo que emprendiera, y cual águila que con sus poderosas alas llega á cuantas alturas apetece, toma parte y gana el primer lugar en las oposiciones que se anuncian para una plaza de profesor auxiliar de la Facultad de Ciencias de Madrid; en el mismo año, y sólo transcurridos dos meses de haber obtenido aquél honroso puesto, logra también por oposición la Cátedra de Mecánica racional de Zaragoza, y transcurrido escasamente un año, concurre á los ejercicios de oposición realizados para llenar la vacante que en la Cátedra de Acústica y Optica ocurrió en la Universidad de Barcelona por defunción del malogrado compañero de facultad D. Moisés Nacente, logrando obtener la plaza codiciada, después de brillantes ejercicios.

Y sin embargo y á pesar del trabajo intelectual que tantas oposiciones debían acarrearle, tiene tiempo suficiente para dedicar sus estudios á un punto de sumo interés para la Mecánica, cual es del *Equilibrio y movimiento de hilos*, redactando á propósito de este tema una hermosa Memoria premiada por esta Academia en el concurso relativo al Premio Agell, correspondiente al año de 1907.

Creeréis quizás que con la actividad desplegada en este pequeño período de tiempo, había suficiente para ocupar la mente del joven Doctor, y sin embargo son en número grandísimo las memorias, folletos y artículos científicos, premiados muchos de ellos y publicados todos, que desde 1902 á 1907 redactó con febril entusiasmo y muchos de ellos casi al salir de las aulas, ó asistiendo aún á ellas. Testigos son de ello los premios del Príncipe de Asturias y del Sr. Gobernador civil, obtenidos en un certamen del Ateneo de Zaragoza, los Anales de Física y Química que publicaron trabajos acerca del cálculo de la intensidad en una red de conductores lineales, de los efectos de la luz circularmente polarizada al atravesar una lámina cristalina en ciertas condiciones, de las figuras dibujadas por cuerdas en movimiento, de las ecuaciones diferenciales de la elástica alabeada, de los fenómenos de polarización en láminas de cuarzo y otros muchos que sería prolijo enumerar y también la Revista de la Real Academia de Ciencias de Madrid que honró sus páginas con trabajos relativos á varios puntos interesantes de las ciencias físico-matemáticas.

Desde 1903 á 1907, pasa pues Terradas de simple alumno á catedrático numerario por oposición de la Facultad de Ciencias de Barcelona, después de haber ocupado y por el mismo procedimiento haber obtenido dos honrosísimos lugares en el profesorado de la Central y de la Universidad de Zaragoza. Dedica luego sus esfuerzos á terminar la carrera de Ingeniero industrial que tenía comenzada y que interrumpió por breve tiempo, atraído por la hermosa perspectiva que le brindaba la del profesorado, y en un curso de rápidos estudios, obtiene brillantemente el título codiciado.

Dos condiciones reúne el nuevo académico y que han contribuido á colocarle en poco tiempo en uno de los más altos sitios dentro del profesorado español y hasta dentro de la ciencia en general, y que con frecuencia no se hallan hermanadas en un mismo individuo: Aplicación incesante y talento privilegiado. Una cualquiera de estas dos condiciones produce séres útiles á la sociedad y á la rama del saber humano á que se dedican; y cuando se reúnen en un mismo individuo se obtienen notabilidades que honran á la patria y á la ciencia que cultivan, dejando rastro de su genial intervención.

Llegado ya Terradas á la meseta desde la cual se distingue con indecible satisfacción el panorama indescriptible de las ciencias físico-matemáticas y al recorrer con su poderosa visualidad intelectual el horizonte todo que se presentaba á su vista, distingue unas regiones completamente serenas y que aunque no del todo exploradas ni en todos sus detalles conocidas, satisfacen sin embargo de modo bastante completo la curiosidad del espectador, pudiendo admirar sino en todos sus detalles y en toda su inconmensurable extensión, la vida y lozanía de que rebosan. Me refiero á la Geometría y á buena parte del Análisis.

Distínguense luego otros horizontes que si bien al parecer son ricos y abundantes en vegetación y con monumentos excelsos levantados en su seno, se notan, sin embargo, algunos lunares en aquéllos y alguna deficiencia en los ci-

mientos sobre que descansan éstos, cuya deficiencia hace temer la necesidad de algún apeo para cambiarlos ó reforzarlos, y también quizás la de modificar la orientación seguida en el cultivo de sus extensos campos. Me refiero á la Astronomía y principalmente á la Mecánica.

Y por último, llaman verdaderamente la atención y son motivo de múltiples discusiones algunas porciones importantísimas de este horizonte, que se hallan en gran parte ocultas por una neblina, ténue en ciertos puntos, muy densa en otros que impide por cómpleto descubrir la verdad de lo que allí sucede, sin embargo de tener noticia que ha de esconderse bajo de ella, algo precioso y mucho de notable que ha de ejercer verdadera influencia en el adelanto todo de la ciencia en general, y principalmente en el de las ciencias físicas y naturales, y digo que se tiene aquella noticia por algún pequeño detalle que ha podido llegar hasta nosotros, gracias á pequeñas rasgaduras que en las nubes que lo ocultan se han podido producir y á la privilegiada inteligencia de algún sabio que á través de ellas ha podido descubrir lo que no sería dable comprender á la inmensa mayoría de los mortales. Lo poco que de ello sabemos da noción sin embargo de lo mucho que podemos esperar en cuanto tengamos medios para descorrer el velo que oculta tan preciosas verdades. Me refiero á la Mecánica aplicada en general y á la Física matemática en particular que no es más que la primera empleada en resolver los problemas más recónditos relativos á las manifestaciones todas de la materia.

Pues bien, al presentarse ante el joven Doctor el panorama de que os hablo y al tener que escoger hacia qué campo de entre los que se divisan, iba á dedicar sus trabajos y emplear su poderosa inteligencia, renuncia de momento á los sitios ya más explorados y en que tenía el campo mucho más expedito y fácil para sus investigaciones, y con el valor que infunde la seguridad del saber que se posee y con el deseo ardiente de descubrir la verdad en el sitio donde más escondida se hallare, se lanza á la región que más misteriosa se ha presentado siempre á la inteligencia humana, y dedica desde el primer momento sus esfuerzos al cultivo de la ciencia Mecánica, conforme habéis podido oir con el lema del trabajo premiado por esta Corporación y decididamente sigue con su afición á los problemas de la Física matemática y de la Mecánica estadística.

Y al hacerlo así, se dirige enseguida á los problemas que mayor dificultad podían presentar dentro de una ciencia que es la más difícil sin duda entre las exactas y la más exacta entre las naturales, y esto lo hace en un momento histórico de gran trascendencia, por cuanto si durante algunos años nos creíamos ya en posesión del origen de muchos de los hechos que la observación nos pone de manifiesto, nuevos y recientes experimentos han echado abajo muchas de las teorías que antes se tuvieron por la última palabra, y hay que empezar nuevos trabajos que nos conduzcan á la verdad ansiada. A ello deben contribuir de consuno la física y la matemática: la experimentación y el cálculo.

De estos dos factores importantísimos depende indudablemente el progreso de las ciencias físicas.

Sujeta la experimentación á múltiples errores y á dificultades de orden objetivo, insuperables á veces, no tiene una marcha segura que seguir, ni encuentra siempre un camino franco en su desenvolvimiento, y en cambio el cálculo siguiendo en sus desarrollos el rigorismo de la ciencia matemática y haciendo uso principalmente de las leyes de la cantidad indefinidamente pequeña, creación la más sublime que se conoce dentro de las ciencias exactas, se lanza valeroso á la resolución de los más arduos problemas y llega algunas veces á *adivinar* con sus resultados, leyes de la naturaleza que no hubieran podido descubrirse por la sola experimentación.

Necesita, pues, la Física de dos clases de colaboradores: el físico experimentador y el físico matemático. Es necesario el primero para descubrir secretos cada día nuevos en los fenómenos naturales; es indispensable el segundo si se quieren formalizar aquéllos y deducir leyes que marquen distintamente el camino que hemos de seguir, ó conduzcan con sus resultados á algún absurdo que nos obligue á renegar hasta de la bondad del experimento mismo.

Joven aún el Dr. Terradas, casi salido de las aulas, le ha falta tiempo material para las investigaciones experimentales, que requiere el primer período de toda teoría física, y sin embargo, enamorado de la fecundidad prodigiosa de la ciencia abstracta, entra valeroso por el campo de la Física matemática para deducir ecuaciones y leyes á las cuales muchas veces aun falta la comprobación real dentro de los fenómenos naturales, pero que sirven de vanguardia á multitud de investigaciones y muchas veces de seguro guía en experimentaciones ulteriores.

Y es tanto más de enaltecer en Terradas esa decidida afición á las ciencias físico-matemáticas, en cuanto se hallan éstas pasando actualmente por una profunda crisis que amenaza con derrumbar los más sólidos monumentos que se levantaron sobre nociones y principios que se consideraron en otro tiempo como inconmovibles, tanta era la confianza que en su explicación se tenía, y que sin embargo vemos hoy con estupor general que se agrietan y hacen temer tengan que levantarse de nuevo sobre bases completamente distintas si queremos disfrutar de la belleza que el hombre siente al admirar un conjunto lleno de verdad, que es como se nos presenta siempre la ciencia cuando explica satisfactoriamente un hecho.

Hemos llegado á un punto que deberían incluirse bajo un mismo nombre la Física matemática y la Mecánica celeste, con la sola diferencia que si ésta trata de explicar y puntualizar los problemas relativos á los centros cósmicos y á los soles y mundos que se hallan á distancias muy grandes de la tierra con relación á la magnitud de su diámetro, la Física matemática en cambio se ocupa de las leyes en virtud de las cuales obran los fenómenos que vemos realizados por los cuerpos finitos y más que por éstos por los elementos de que se suponen compuestos y cuyo volumen está en relación al tamaño de aquéllos igual á la que existe entre las dimensiones usuales de los elementos terrenales y la de las distancias y volúmenes con que nos encontramos al admirar y contemplar el Universo.

La Mecánica celeste se refiere al mundo que podríamos llamar de los infinitamente grandes, mientras la Física matemática se dedica al de los infinitamente pequeños.

¿Serán iguales las leyes fundamentales para la primera que para la segunda?

Indudablemente que sí. La Naturaleza es una y unas deben ser sus leyes. Es cuestión solo de relatividad, y cada día se van abriendo paso las ideas de unidad en la materia y de uniformidad en las leyes á que se halla sometida en su génesis y en sus innumerables transformaciones.

Para poder explicar todos los fenómenos de producción y transmisión de calor, luz y electricidad ha debido considerarse á cada átomo no como un elemento indivisible y como si dijéramos el último límite de la divisibilidad en la materia, sino como un verdadero sistema planetario con el electrón positivo en su centro é innumerables electrones negativos que con velocidades vertiginosas giran al rededor del primero.

Al mismo electrón positivo tampoco se le supone indivisible, sino como un agregado de otra multitud de electrones de otra naturaleza, que quizás sea de la materia prima, la cual se está buscando como común denominador de todos los cuerpos, y los estudios recientes acerca de la unidad de la materia por medio de la comparación de sus pesos específicos, hacen creer en la existencia de otra fuerza de agregación que reúne los elementos de esta materia prima, con tal fuerza agrupada ó constituída, que la disgregación del átomo en sub-átomos produciría 2.500.000 veces más de calor que la combustión de la mezcla detonante del hidrógeno y el oxígeno.

Pero aun hay un más allá. Supuesto que un átomo eléctrico, gracias á sus propiedades electromagnéticas, se comporta como una partícula dotada de masa é inercia, ¿no sería posible considerar á toda masa en general como puramente aparente, apariencia que resultara de la distinta combinación ó agrupación de cargas eléctricas? Y á propósito de lo que decimos, exclama Kaufmann: ¿En lugar de explicar los fenómenos eléctricos por medio de la Mecánica, no podríamos reducir ésta á aquéllos?

Reunid esta concepción á lo que antes he dicho y ya tendréis derruído todo ese gran edificio fundado en la noción de masa, de los átomos diversos de ella y por tanto de la diferenciación de los llamados cuerpos simples y no necesitaréis del éter (esa sustancia ó pseudosustancia misteriosa) que no nos atreviamos á llamar ponderable y que sin embargo se comporta como tal, y solo concebimos el Universo entero como un conjunto maravilloso de cargas eléctricas que al equilibrarse unas con otras las de diverso signo, se forman centros eléctricos llamados átomos, que de la intensidad de su choque recíproco dependen los fenómenos caloríferos, cuyas vibraciones dan lugar á los fenómenos luminosos y que de su disasociación dependen los fenómenos eléctricos.

¿Qué diferencia observáis entonces entre la Física y la Astronomía matemáticas? Solo el tamaño relativo de los agregados que constituyen estas cargas

eléctricas en equilibrio relativo y á los cuales llamamos cuerpos, y que si á nosotros nos parecen extremadamente pequeños los llamados átomos que los constituyen, por la dificultad y hasta casi imposibilidad que tenemos por nuestros medios físicos de observarlos y medirlos, en cambio podrán parecer finitos y de dimensiones muy regulares á otros seres inteligentes que existan entre ellos, y me atrevo más: es muy posible que estas moléculas, que según la explicación moderna resultan ser verdaderos sistemas planetarios en los cuales hace de sol el electrón positivo y los electrones negativos hacen las veces de otros tantos planetas que alrededor de aquél giran, resulten ser como cuerpos celestes para los seres microscópicos respecto de nosotros, pero finitos al ser comparados entre sí, que existan habitando en cada electrón negativo.

El hombre es muy egoísta y vanidoso, y al tenerse como rey del Universo, cree solo finito lo que es comparable á su tamaño, pero ha de recordar siempre que el Dios creador es Infinito sin reconocer límite alguno en la escala de los indefinidamente grandes ni en la de los indefinidamente pequeños, y por tanto, que no tan sólo ha de ser una la materia prima, sino que desde su más pequeña parte á la mayor y más colosal (la estrella más grande que pueda concebirse) han de obedecer siempre á unas mismas leyes que serán las que rijan al Universo entero.

El descubrimiento de la radioactividad es el que ha originado en su mayor parte este gran cambio de ideas respecto á la constitución íntima de los cuerpos, y ha pasado un momento en que han parecido tambalear el principio de Carnot, el de la relatividad, el de la acción y de la reacción y el de la conservación de las masas y hasta el de la conservación de la energía, y en realidad han sufrido violentas sacudidas, originadas por las propiedades al parecer inexplicables que presentaban los cuerpos radioactivos, de esos *grandes revolucionarios de la Física moderna* como les llama Poincaré; pero como los hechos observados son innegables y conforme decía nuestro querido amigo y compañero el Dr. Alcobé en su trabajo de ingreso á esta Academia, pueden muy bien estudiarse las teorías físicas independientemente de las hipótesis que sirvan para explicarlas y atendiendo sólo á los hechos indiscutibles de la experimentación, se ha entablado una verdadera lucha entre los conservadores de los principios con tanto trabajo obtenidos y al parecer demostrados, y los que creían poderlo derribar todo sin respeto alguno á lo mucho bueno y aprovechable que se había obtenido, y gracias á esta lucha, siempre fructífera cuando por último ideal se persigue solo la adquisición de la verdad, van dándose explicaciones que ponen de acuerdo los dos bandos, el delicado experimentador encuentra lo que en un principio se creyó no existir en lo relativo á la pérdida de energía de los cuerpos radioactivos y la confianza en un porvenir más despejado va cundiendo en el ánimo de los sabios que se dedican á tan hermosa tarea.

Yo creo firmemente que la verdadera explicación de todos los fenómenos naturales y la puntualización de todas sus leyes no ha de ser alcanzada por el hom-

bre dentro de su limitada esfera de acción y de su finita inteligencia, pero no por esto hay que desmayar, sino muy al contrario, trabajar cada día con más cariño en la investigación de los secretos de la naturaleza y sobre todo de su legislación analítica, pues aunque haya con frecuencia tropezones que originen crisis como la que estamos padeciendo, y por tanto no sea siempre una curva de marcha decidida la que describa y registre el adelanto de la ciencia, no por esto dejará el hombre de sacar sus frutos de aquel estudio por medio de los adelantos industriales que proporcionan sus aplicaciones y se aproximará cada día más al ideal de la verdad absoluta que la califico de ideal porque precisamente es un límite al que nos es vedado llegar, pero que Dios permite nos aproximemos cada vez más á ella para saborear aunque sólo sea un vestigio de su soberana belleza.

Es tan patente la influencia del cálculo en el progreso de las ciencias físicas, que muchas veces, como antes dije, no tan sólo sirve para reglamentar y formular sus leyes, sino que con frecuencia conduce al experimentador á la obtención de los más sorprendentes resultados.

En Astronomía conocemos de sobras el descubrimiento hecho de ciertos cuerpos celestes desde el gabinete del matemático, con motivo de perturbaciones observadas por la experiencia en la trayectoría de algún astro que según la teoría debía ser distinta á no existir el cuerpo que luego se descubrió, comprobando los resultados del cálculo, y en el campo de la Física matemática vemos á Maxwell hace ya algunos años, que escribiendo las ecuaciones de propagación de una perturbación electromagnética que avanza en ondas planas, las encuentra iguales á las que dan el movimiento de una molécula en un medio elástico tal como se explicaba antes en óptica, y de ahí concibió la idea de que las antiguas vibraciones de Fresnel podían ser de naturaleza electromagnética, y por tanto que la influencia de cada cuerpo en los fenómenos ópticos, eléctricos ó magnéticos podía depender de una misma propiedad fundamental de dicho cuerpo y consecuencia de aquella analogía sentó aquel genio de la Física matemática el principio de que el poder inductor específico de un cuerpo debe ser igual al cuadrado de su índice de refracción absoluta.

Se consideró al principio la teoría de Maxwell como una especie de poema hijo de su maravillosa imaginación; pero Hertz, algo más tarde, estudiando las oscilaciones eléctricas, confirmó varias de las previsiones de Maxwell, y las leyes por éste sentadas á título de precario fueron motivo poderoso para realizar descubrimientos que la experiencia por sí sola no hubiera podido proporcionar. Y por fin, la misma radioactividad que, conforme hemos dicho, al aparecer en el estrado de la ciencia parecía que iba á desmentir tantos principios, ha sido la que ha venido á confirmar las adivinaciones de Maxwell y luego, y después de los estudios de Riecke, Drude, Voigt y otros eminentes físicos, han venido á comprobarse y explicarse mucho mejor los fenómenos á que creíamos faltos de base, y con ello y la concepción de las energías potencial y cinética de los átomos se han salvado del naufragio multitud de hechos que se consideraban inexplicables.

Mucho hay que hacer en este punto de la Física y los esfuerzos han de converger principalmente en encontrar una teoría más satisfactoria de la electrodinámica de los cuerpos en movimiento, así como las relaciones que puedan existir entre los electrones y los espectros, y si la Astronomía puede prestar grandes auxilios á la Física matemática por medio del estudio de las aberraciones estelares, no hay duda que las teorías electromagnéticas se lo prestarán á su vez á la ciencia de los astros explicando muchos fenómenos del mundo sideral, como la corona solar, las colas de los cometas y las auroras polares.

En el estudio tan notable como detenido de la *Emisión de radiaciones por cuerpos fijos ó en movimiento*, se nos presenta Terradas completamente identificado con las teorías que hemos bosquejado respecto á la naturaleza de la materia, siguiendo los derroteros señalados por el insigne Lorentz, no distinguiendo entre las tres clases de energía calorífera, luminosa ó eléctrica, considerando todos los fenómenos á estas tres clases relativos, como comprendidos dentro del fenómeno general de la radiación, de naturaleza electrodinámica en todos ellos.

Trata con verdadera maestría de las diversas teorías que acerca de la radiación se han establecido por Maxwell, Jeans, Lorentz, Planck y otros sabios, sentando los principios de la Mecánica estadística, que sirve á maravilla para ser aplicada á las teorías del electromagnetismo. Acerca de tal ciencia, de novísima introducción en el catálogo de las ciencias exactas, hace pocos meses que el mismo Terradas presentó un trabajo al congreso celebrado en Zaragoza por la «Sociedad Española para el progreso de la Ciencia», que tuvo la honra de ser comentado y aplaudido por el ilustre Echegaray.

Dedica la segunda parte de su trabajo al estudio de las emisiones en cuerpos en movimiento, utilizando la teoría de la relatividad, acerca de la cual sienta algunas fórmulas de verdadero interés. El que tal escribe, demuestra con evidencia los conocimientos que tiene y el dominio que sobre tal materia posee, y justo es esperar que penetrando más tarde Terradas en los problemas que están aun por resolver podrá aportar á la Física matemática ideas y teorías dignas de colocarse honrosamente al lado de las investigaciones á que se dedican otras celebridades extranjeras en medio de un ambiente de protección á la ciencia pura que aquí por desgracia no disfrutamos.

Y á propósito de ello, permitidme una pequeña digresión acerca de la necesidad de fomentar en España el estudio de la ciencia abstracta, porque de ella emerje y se deriva el progreso real de los pueblos. Sin ciencia pura serán efímeras y solo pasajeras las industrias que aquí se implaten y establezcan y con frecuencia serán regidas por inteligencias extranjeras.

Son tantas y de tal importancia las aplicaciones industriales que cada día se hacen de los descubrimientos de la Física moderna, es tan vertiginoso el adelanto que en pocos años se ha logrado en la teorías mecánicas y físicas, con las variadas y múltiples manifestaciones útiles que de las mismas se derivan, que hay muchos espíritus olvidadizos que animados de un entusiasmo algo irreflexivo por

las ciencias de aplicación, llegan á olvidar á quien se deben tales prodigios. Es como el hijo que gracias á la primera educación y á los sanos consejos que recibiera de su madre, llega después de algunos años á una posición eminente, colmado de honores y distinciones por el desarrollo de su inteligencia y excelsas condiciones de su persona, olvidando algunas veces á la que debe todo lo que es, á su madre, por más que permanezca ésta modestamente recluída en su cámara, rogando á Dios por el hijo que engendró en sus entrañas y velando constantemente por su salud y bienestar.

Así sucede en la época actual en nuestro país.

Se ha desarrollado un vivo deseo de cultivar las ciencias de aplicación, pero se olvida que sin el cultivo intensivo y estusiasta de las ciencias abstractas no pueden aquéllas florecer y adelantar, y que á estas deben todo lo que son y todo lo que valen.

Se ha creído por nuestros legisladores que con la creación de muchas Escuelas de Artes y Oficios y de Escuelas industriales, tendríamos resuelto el problema de la educación científica de nuestro pueblo, pero al hacerlo, se olvidan por completo del cultivo de la ciencia por la ciencia y hasta la poca cantidad de ciencia abstracta que necesita como base de sus conocimientos el ingeniero ó el arquitecto, no se permite que se adquiera en las Facultades de Ciencias, en virtud de recientes disposiciones, como si se temiera que de entre los alumnos que en ella se preparasen pudiera alguno quedar prendido entre sus redes, enamorado quizás por el arrobamiento que en nuestro ánimo produce la belleza inaudita de la ciencia pura.

Créense enhorabuena muchas escuelas de las cuales salgan ilustres ingenieros y geniales arquitectos que sean honra y prez de nuestra industria y de nuestro arte constructivo, pero dénse garantías y ofrézcase también algún porvenir lisonjero al que sienta decidida afición por la ciencia que sirve de base á los conocimientos de que aquellos deben hacer ostentación, y téngase presente que sin el paciente observador que absorto en su gabinete procura modestamente obtener algún rayo de luz acerca de algunas recónditas verdades, y que sin el matemático que día tras día estudia las funciones analíticas en sus más variadas formas y conceptos procurando á veces la resolución de alguna ecuación diferencial, carecerían aquéllas de los elementos más necesarios para el progreso incesante de las manifestaciones explendorosas que proporciona el arte industrial.

La falta de unidad y paralelismo entre las dos clases de estudios es manifiesta y tan equivocado creo el proceder así, que me atrevo á decir muy alto, á fuer de repetir lo que en otros sitios he tenido la honra de exponer, que España no ocupará el lugar que le corresponde dentro del campo de la ciencia, en el mundo civilizado, hasta que se dé al cultivo intensivo de la ciencia abstracta la importancia que se merece, por ser el fundamento de toda aplicación, la educadora por excelencia del espíritu humano, y la única que acerca más al hombre á Dios, alentándolo á descubrir los secretos de la naturaleza.

Y una de las comprobaciones de lo que acabo de citar la tenéis en el mismo

Dr. Terradas: se matriculó en la Facultad de Ciencias de Barcelona de las asignaturas que aún en aquel entonces podían en ella cursarse, como preparación de la carrera de Ingeniero industrial, y enamorado de los conocimientos de ciencia pura en que allí se inicia á los alumnos, no se acuerda de momento de continuar los estudios de aquella profesión para la cual se preparaba, cursa con entusiasmo todas las asignaturas que constituyen la licenciatura y el doctorado, y sólo después de ser ya catedrático en la misma Facultad en que empezó sus estudios, se acuerda de la conveniencia de terminar la carrera de ingeniero ante el porvenir mezquino que se reserva en España al que sólo se dedica al estudio de la Ciencia pura.

Continue el Dr. Terradas en el sitio de honor en que hoy se halla, dedique todos sus medios intelectuales al estudio de la Física moderna y sobre todo de la Física matemática, deseche en el porvenir cualquier proposición que al mejorar sus condiciones económicas le aparten y desvien de la senda que Dios le ha colocado ante su vista, y que ha de conducirle á la verdadera gloria, que es la de la inteligencia y del saber, procure con su ejemplo que otros le sigan en tan elevados estudios, para que no se diga que en España estamos inhabilitados para constituir un núcleo que pese algo en la cultura general del mundo, y así le deberán eterna gratitud, la ciencia en primer lugar, la patria, y después esta Academia que al premiarle hace poco su Memoria y al abrirle hoy sus puertas de par en par demuestra con cuanto anhelo quiere que figure el Dr. Terradas, como uno de sus más preclaros colaboradores, ofreciendole su cátedra y sus medios de investigación para los elevados estudios á que con tan acendrado cariño viene dedicándose.

He dicho.

MEMORIAS

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS Y ARTES

DE BARCELONA

TERCERA ÉPOCA — VOL. VII. NÚM. 10

MANTÍSPIDOS NUEVOS

POR EL ACADÉMICO CORRESPONDIENTE

R. P. LONGINOS NAVÁS, S. J.

Publicada en abril de 1909

DEC
UNIVERSITY OF

BARCELONA

A. LÓPEZ ROBERT, IMPRESOR. — CONDE DEL ASALTO, 63

1909

472

MANTÍSPIDOS NUEVOS

por el Académico correspondiente

R. P. Longinos Navás, S. J.

Sesión del dia 30 de diciembre de 1908

Tengo el honor de presentar á la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona la descripción de algunas formas nuevas de esta interesante familia de Neurópteros Planipennes. La ocasión ha sido la revisión de los Mantíspidos del Museo de París, que me confió D. Roberto du Buysson, con permisión de publicar en España el resultado de mi trabajo. Con esta ocasión revisé algunos ejemplares que en mi colección poseía y cuyas descripciones he juntado con las del museo parisiense.

Además de las formas nuevas que aquí describo, he visto del Museo de París las siguientes, cuya lista, con indicación de las localidades, podrá ser de algún interés para el conocimiento más completo de estos insectos.

Mantispa perla Pall. Italia, Abich, 1837. Crimea, Eotty. Kiang-Si, A. David, 1875.

Mantispa perla Pall. var. *icterica* Ed. Pict. Portugal.

Mantispa styriaca Poda. Fontainebleau (Seine et M.), A. Finot, 1897. Vöstau, Col. Giraud, 1877. Nord Pekin, A. David, 1865.

Mantispa scabricollis Mc Lachl. Akbés, Siria, Ch. Delagrange.

Mantispa tropica Westw. Congo, N'gomo, E. Haug, 1906. Senegal, Guerin. Congo francés N'cogo, H. Bonner, 1903. Congo francés, Liberville, J. Boucher, 1899. Madagascar, Soalala, Perrier de la Barthe, L. Fairmaire, 1904.

Mantispa tenella Erichs. Africa oriental inglesa, Nairobi (Wa-Kirdouyou et Masai), Ch. Alluaud, 1904. Cabo de Buena Esperanza, Verreaux 1835, 1837, Delalande. Bouron, 1835.—N'gomo, Congo francés, Ellenberger, 1906.

Mantispa nana Erichs. N'gomo, Congo francés, E. Haug, 1906.

Mantispa mozambica Westw. Africa oriental inglesa, Isla de Lusinga, Ch. Alluand, 1904. Madagascar, Jacquinot, 1841.

Mantispa brunnea Say. México, Sallé.

Mantispa semihyalina Serv. Santa Catalina (Brasil), Deyrolle.

Mantispa flaveola Erichs. Jatahy (Brasil), prov. de Goyas. sept. á nov., 1897.

Mantispa limbata Gerst. Brasil, Ch. Alluaud, 1907.

Mantispa decorata Erichs. Cercanías de Buenos Aires, 9 Künkel, 1900.

Mantispa prolixa Erichs. Chaco de Santa Fe, Las Garzas, orillas del rio, 25 kil. al O. de Ocampo, E. R. Wagner, 1903.

Mantispa Australasiæ Guerin. Tasmania, J. Verreaux, 1844.

Mantispa vittata Guer. Tasmania, Australia, J. Verreaux. 1844.

Mantispa strigipes Westw. Papuasia.

Ditaxis 4-tuberculata Westw. Tonquin central, cercanías de Tuyen Quan, A. Weiss, 1901.

Symphrasis notha Erichs. Brasil, Estado de San Pablo, H. von Thering, 1899.

Symphrasis signata Hag. Baja California, Diguet.

Mantispa Vassei sp. nov.

Minor, fusco-violacea, flavo-maculata.

Caput fronte flava, linea media longitudinali usque ad labrum fusca, palpis flavis; vertice fastigio inter antennas in processum planum, obtusum, truncatum producto, pone antennas fusco et flavo maculato.

Prothrax elongatus, antice ampliatus, fascia dorsali in T flava; tuberculis pone tubam seu partem ampliatam flavis, ex quibus fascia clavæformis lateralis usque ad basim excurrit. Meso-et metanotum margine antico et postico flavis. Mesonotum fascia etiam media transversa flava.

Abdomen singulis segmentis antice flavescentibus... (1)

Pedes antici coxis superne flavis, femoribus externe duplici fascia longitudinali flavida, interne totis, præter lineam dorsalem et ventralem ad spinas flavidas, fusco-violaceis.

Alæ angustatæ, hyalinæ, reticulatione fusco-violacea, stigmate elongato, violaceo fusco; cellulis discalibus in ala anteriore 8, in posteriore 7. Ala anterior campo costali mediocriter ampliato, venulis 6 diviso; costa ultra ortum sectoris radii cum subcosta confluente.

Femina mihi ignota.

Long. corp.	9'5	mm.
— prothor.	3	»
— alæ anter.	9	»
— — poster.	7'5	»

Patria. Mozambique, Tendos de Sungoné y Riy Vunduzi (alt. 40 m.), Prov. de Gorongoza, G. Vasse leg., 1907. Col. del Museo de París.

(1) El ejemplar que tengo á la vista se halla en mal estado de conservación.

Mantispa Haugi sp. nov.

Minor, fusco-violacea.

Caput fronte picea, nitida, scrobe antennarum et limbo in quadrantem antice juxta oculos flavis; antennis 29-30 articulis, duobus basilaribus flavo-lividis.

Prothorax parte antica subito et valde dilatata; parte angusta antice angustata, postice sensim inflata.

Pedes flavidi, antici apice femorum et basi tibiarum fuscis.

Alæ hyalinæ, reticulatione, præter basim venarum posticarum, fusco-violacea, stigmate elongato, apice vix ampliato, marginibus subparallelis, fusco rufo; cellulis discalibus obliquis in ala anteriore 6.

Longitudo corporis	8	mm.
— pronoti	2'5	»
— alæ anterioris	7'7	»
— — posterioris	6'6	»

Patria. Congo, N'gomo. E. Hang, 1906 (Mus. de Paris).

Mantispa loanga sp. nov.

Major, fulvo fusca, alis apice maculatis.

Caput fronte flava, linea angusta ad clypei latera, fascia inter antennas, alia ante clypeum, nigris; labro cum palpis tenuibus fulvo; vertice flavo-fulvo, occipite fascia transversa nigra; collo flavo; antennis nigris, basim versus rufescentibus, 34 articulis, tribus primis oblongis, sequentibus transversis, ultimo conico, fulvo.

Prothorax rufo-brunneus, tuba seu parte dilatata brevi, ampla, transverse rugulosa, margine antico rotundato, nigro limbato, tuberculis posterioribus parum prominulis; ab his retrorsum fascia nigra externe concava flavo limbata, postice ampliore; parte angustata tota rugosa, pone tuberculos angustata, retrorsum sensim sed modice inflata. Scutella in meso-et metanoto flava.

Abdomen singulis segmentis apice anguste flavo marginatis, tribus ultimis subtotis desuper flavis.

Pedes antici coxa tertio basilari flava, apice antice tuberculata; femoribus inflatis, latis. Pedes intermedii et postici graciles, femoribus fuscis, basi et apice rufescentibus; tibiis ante medium fuscis, plus quam medio apicali flavis; tarsis flavis; unguibus pectinatis, 6-dentatis.

Alæ reticulatione fulva, membrana macula grandi apicali ovali vinosa rufa.

Ala anterior stigmate triangulari-elongato, rufo-vinoso, colore cum macula apicali subcontinuo, campo costali et subcostali et basi fulvo tinctis, ad marginem radii ultra radicem ejus sectoris rufo-vinosa; cellulis discalibus obliquis 15. Ala posterior macula apicali, stigmali, campo costali et subcostali fere ut in anteriore.

Long. corp.	23	mm.
— prothor.	5'5	»
— alæ anter.	21	»
— — poster.	19'5	»

Patria. Rio Quillú, Loango, diciembre, 1892 (Col. mía). Me la regaló el difunto Sr. Finot, de Fontainebleau.

Mantispa natalica sp. nov.

Minor, fusca.

Caput linea angusta curva supra et ante oculos, macula ad genas, flavidis; antennis 26 articulis, primo grandi, inflato, secundo et tertio elongatis, sequentibus transversis, ultimo conico.

Prothorax tuba seu parte anteriore obscuriore, margine antico elevato, medio rotundato, haud producto; tuberculis posterioribus distinctissimis, lateraliter prominulis; parte angustata rugosa.

Abdomen fuscum, apice et inferne pallidius.

Pedes antici femoribus ampliatis, parum inflatis, compressis. Pedes intermedii et postici lividi; unguibus divaricatis, subrectis, apice tridentatis.

Alæ stigmate elongato et reticulatione fuscis; cellullis discalibus obliquis in anteriore 6.

Long. corp.	7'5	mm.
— prothor.	2'5	»
— alæ anter.	8	»
— — poster.	7	»

Patria. Pinetown, Natal (Col. mía. Donativo del Sr. Finot).

Mantispa Finoti sp nov.

Major, fusco-violacea.

Caput fronte ante antennas et palpis tenuibus pallidioribus; antennis apicem versus fulvis, 33 articulis.

Prothorax unicolor, parte ampliata margine antico elevato, medio prominen-

te; parte angustata fortiter rugosa. Mesothorax in tuberculum acutum conicum lateralem antice prominens.

Abdomen dorso fascia flavida in segmentis intermediis; inferne pallidius.

Pedes anteriores ferrugineo-fusci, femoribus ampliatis, inflatis, macula nigra interna ad spinam mediam. Pedes intermedii et posteriores flavidi, apice femorum et basi tibiarum fuscescentibus; unguibus cylindricis, arcuatis, apice 4-dentatis.

Alæ membrana hyalina, campo subcostali leviter fusco tincto; stigmate elongato, violaceo-fusco; reticulatione, præter aliquot venas posteriores flavidas, fusco-violacea; cellulis discalibus obliquis in ala anteriore 13.

Long. corp.	19	mm.
— prothor	6'5	»
— alæ anter.	19	»
— — poster.	16'5	»

Patria. Maroacentra en Madagascar, diciembre de 1897 (Col. mía). Donativo de mi amigo el distinguido entomólogo Sr. Finot, de Fontainebleau, á cuya buena memoria me complazco en dedicar esta especie.

Mantispa Mariæ sp. nov.

Major, flava, fusco maculata.

Caput lineola ad clypei latera, fronte inter antennas fusca; antennis fusco-rufis, ante apicem longo spatio flavis, 36 articulis, duobus primis elongatis, apice inflatis, fuscis, reliquis transversis, articulis 21-31 flavis, quinque ultimis rufo-fuscis, ultimo conico.

Prothorax longus, parte ampliata antice medio prominula, dorso fusca, præter lineolam apicem haud attingentem; tuberculis posticis lineola nigra transversa armata notatis; parte angustata irregulariter transverse rugosa, postice macula triangulari dorsali fusca. Meso- et metanotum fascia laterali fusca.

Abdomen flavum, fascia laterali fusca, dorso duo prima segmenta invadente, tertium et quartum fascia lata ante-apicem, quintum linea apicali; inferne color fuscus sensim a primo ad ultimum segmenta invadit.

Pedes anteriores testaceo-ferruginei, femoribus compressis, dilatatis, macula interna picea ad spinam mediam fuscam notatis; tibiis fuscis præter apicem. Pedes reliqui flavi, apice femorum et basi tibiarum fuscis; tarsis unguibus pectinatis, 5-dentatis.

Alæ elongatæ, membrana hyalina, stigmate longo rufo sanguineo, campo radiali rufo tincto; reticulatione rufo-fusca; cellulis discalibus obliquis in ala anteriore 13.

Long. corp.	22	mm.
— prothor.	6'5	»
— alæ anter.	21	»
— — poster.	18	»

Patria. Sainte Marie, de Madagascar (Col. mía). Regalada por el Sr. Finot, de Fontainebleau).

El nombre de la localidad de donde procede esta hermosa especie me ofrece grata ocasión para dedicarla á la Virgen Santísima.

Mantispa Maindroni sp. nov.

Minor, flavo-testacea.

Caput facie cum palpis et duobus primis articulis antennarum flavis; macula triangulari grandi in clypeo, alia elongata in labro piceis, nitentibus; vertice et occipite fuscis præter duas maculas pone antennas et limbum ad oculos, flavum; antennis 29 articulis nigris, præter basilares.

Prothorax parte antica sat dilatata, fusco-violaceus, dorso fascia laterali, longitudinali, flava. Meso-et metanotum fusca, violaceo tincta, ad scapulas flavescentia.

Abdomen fusco-pallidum, fusco et flavo maculatum (en mal estado de conservación).

Pedes anteriores subtoti ferruginei, externe pallidiores; intermedii et posteriores subtoti flavidi.

Alæ membrana hyalina, venis costa, subcosta et radio flavo-rufis, reliquis venis venulisqui nigris; stigmate brevi, grandi, apice ampliato, costa ad ejus initium concava, violaceo-nigro; cellulis discalibus obliquis in ala anteriore 8.

Long. corp.	11'5	mm.
— prothor.	4	»
— alæ anter.	13	»
— — poster.	11	»

Patria. Nilghiri, Coonoor. M. Maidron legit, 1902 (Mus. de París).

Mantispa Bouchardi sp. nov.

Major, rufa.

Caput labro basi anti clypeum fusco; fronte inter antennas et occipite fascia fusca transversa; antennis fuscis, apice flavescente, 38 articulis, articulo primo

oblongo, apice parum inflato, secundo brevi, globoso, tertio longiore, reliquis transversis, pilis verticillatis.

Prothorax brevis, parte ampliata dorso, præter marginem anticum, fusca; parte angustata fortiter rugosa, rugis superne et inferne prominentibus, bis ampliata in modum rugæ, paulo post portionem ampliatam et paulo ante basim. Meso-et metanotum unicoloria, fuscescentia, centro et scutellis pallidiora.

Abdomen concolor cum reliquo corpore, vix maculis tenuibus obscuratam.

Pedes anteriores rufo-fusci, femoribus robustis; intermedii et posteriores rufescentes, tibiis posticis medio late flavidis, tarsis articulo primo longiore quinto, æquali tribus sequentibus simul sumptis.

Alæ elongatæ, apice subacutæ; membrana hyalina, præter campum costalem, subcostalem et basim in anterioribus et duos hos campos in posterioribus flavo-fusco tinctos; reticulatione rufa, in ala anteriore radio et procubito basi infuscatis; stigmate longo, rufo-fusco; cellulis discalibus obliquis in ala anteriore 12.

Long. corp.	15-20	mm.
— prothor.	4-5	»
— alæ anter.	17-23	»
— — poster.	16-20	»

Patria. Sumatra (Costa Oriental), Palembang, Forêt du Nirou, M. Bouchard, 1902. Manila. (Mus. de París).

Mantispa luzonica sp. nov.

Minor, nigra, flavo picta.

Caput facie, præter lineam longitudinalem brevem inter antennas, palpisque, flavis; antennis 30 articulis, duobus primis flavis; vertice duabus maculis ovalibus flavis postice confluentibus.

Prothorax elongatus, parum antice ampliatus, portione dilatata superne maculis duabus flavis insignita; parte angustata tenuiter rugosa, inferne fascia laterali longitudinali flava. Scutella in meso-et metanoto flava.

Abdomen marginibus posticis segmentorum superne et ad latera flavis.

Pedes flavidi; femora antica externe macula-fusca nebulosa, interne præter basim et summum apicem, tota picea; tibiis anticis præter lineam externam longitudinalem piceis. Femora cetera ante apicem, tibiæ basi et apice late infuscatæ.

Alæ membrana hyalina, campo radiali fusco leviter tincto; reticulatione nigra, præter basim flavam procubiti et sequentium pone venarum; stigmate elongato, atro; cellulis discalibus obliquis 8.

Long. corp.	13	mm.
— pronoti.	4	»
— alæ anter.	12	»
— — poster	10'5	»

Patria. Manila. (Mus. de París).

Mantispa Harmandi sp. nov.

Major, flavo-rufescens, fusco et nigro variegata.

Caput palpis gracilibus, unicoloribus; fronte ante et inter antennas macula grandi nigra in ♂; vertice fuscescente; antennis fuscis, 30 - 35 articulis, primo inflato, secundo globoso, tertio elongato, reliquis transversis.

Prothorax mediocriter elongatus, parte ampliata superne fuscescente, antice medio in tuberculum prominente, carinula media pallidiore, postice in tuberculum exiguum elevata; tuberculis lateralibus parum prominulis, parte angustata late et transverse rugosa, basi ante mesonotum fusca. Mesonotum fusco-ferrugineum, antice in tuberculum spinæformem ad latera pronoti, prominens, scutello flavo. Metanotum similiter pictum.

Abdomen superne flavidum, fascia centrali maculari fusca, alia laterali subcontinua; inferne flavidum, segmentorum margine postico nigro.

Pedes anteriores ferruginei, reliqui pallidiores; tarsis intermediis et posterioribus primo articulo longo, reliquis æquali.

Alæ elongatæ, hyalinæ, campo radiali flavo leviter tincto; reticulatione subtota fusca, costa, subcosta et radio flavescentibus; stigmate elongato, sanguineo; cellulis discalibus obliquis 12 in ala anteriore.

♂ Cerci breves, crassi, apice obtusi, flavi; lamina subgenitalis subtriangularis, apice obtusa, flava; copulator spinæformis, flavus.

	♂	♀
Long. corp.	14 mm.	22 mm.
— prothor.	4 »	6 »
— alæ anter.	15 »	25 »
— — poster.	13 »	21 »

Patria. Nipón medio. Cercanías de Tokyo. G. Harmand, 1906. (Mus. de París).

Mantispa Wagneri sp. nov.

Major, flava, fascia atra dorsali ab antennis per thoracem et abdomen continuata.

Caput fronte ante antennas macula atra in ⊥ signata, alia rotunda in medio labro, aliis ad genas, atris; vertice pone antennas duobus punctis, cum fascia laterali juxta oculos ad occiput continuata, atris; antennis flavis, apicem versus fuscescentibus, 28 articulis, duobus primis apice inflatis, longis, reliquis cylindricis, latioribus quam longioribus.

Prothorax parte ampliata postice duplici tuberculo distincto, grandi, parte angusta transverse rugosa. Mesonotum antice in angulum tuberculiformen prominens ad latera; fascia atra laterali ad scapulas maculam flavam liberante. Metanotum fascia laterali antice medium invadente, ad medium evanida.

Abdomen fascia laterali distincta, atra.

Pedes flavi; femoribus anticis interne subtotis nigris, tarsis intermediis et posticis primo articulo tres sequentes æquante.

Alæ hyalinæ, venis venulisque flavis, radio alæ posterioris fusco, stigmate elongato flavido; ala anteriore cellulis discalibus obliquis 12.

♀ Frons flava, labrum rufescens, vertex 4 punctis fuscis notatum.

Alæ stigmate et radio rufescentibus, cellulis discalibus obliquis 14 in ala anteriore, 12 in posteriore.

Abdomen fascia laterali fusca marginem posticum in segmentis intermediis invadente.

Long. corp.		15-18 mm.
—	prothor.	4'5 »
—	alæ anter.	17-13 »
—	— poster.	16-17 »

Patria. Chaco de Santiago del Estero. La Palisa, orillas del Río Salado, 25 kil. N. O. de Icaño, E. R. Wagner, 1903 1904. Brasil ó Java (así dice el rótulo), Alluaud, 1907.

Mantispa Moulti sp. nov.

Minor, flavida, fusco maculata.

Caput fronte linea longitudinali usque ad labrum fusca; palpis ultimo articulo fusiformi elongato nigro; vertice medio obtuse carinato, lateraliter fusco maculato; antennis 30 articulis fuscis, præter primum flavidum.

Prothorax elongatus, antice in tubam ampliatus, margine antico in angulum prominente; tuberculis pone tubam prominulis, fuscis; parte angustata cylindrica, transverse rugulosa; superne maculis tribus linearibus ad tubam, media angulum attingente, postice alia lineari media, fuscis. Mesonotum tribus fasciis longitudinalibus fuscis. Metanotum subtotum fuscum.

Abdomen superne tribus fasciis longitudinalibus fuscis notatum; inferne fascia media lata fusca; cercis crassis, apice obtusis, muticis, pilosis; lamina subgenitali triangulari obtusa.

Pedes coxis anticis in ♂ ad apicem inferne, in ♀ subtotis fuscis; femoribus item anticis, spinis flavidis, disco externe infuscato, interne subtoto fusco (♂) vel fusco-atro (♀).

Alæ angustatæ, elongatæ, hyalinæ, stigmate elongato-triangulari fusco-violaceo; reticulatione fusco-pallida; cellulis discalibus in utraque ala 10.

	♂	♀
Long. corp.	13 mm.	15 mm.
— prothor.	4'5 »	4 8 »
— alæ anter.	12 »	13 »
— — poster.	10'5 »	11'5 »

Patria. Passoura, Guyana francesa, E. Le Moult, 1907. (Mus. de París).

Mantispa Pasteuri sp. nov.

Similis *stenopteræ* Gerst.

Flavida, minor, fusco-maculata.

Caput fronte cum primo articulo antennarum rosea, macula subtriangulari transversa fusca; palpis flavidis, ultimo articulo elongato fusiformi; vertice depresso, transverso, macula centrali anteriore, duabus lateralibus pone antennas elongatis fuscis; antennis fere 35 articulis transversis, 2.° flavo, 3.° basi flavo apice cum ceteris piceo; oculis prominentibus, cinereis. Collum palidum, longum, antice angustatum.

Prothorax longus, antice ampliatus, margine anteriore rotundato; tuberculis pone tubam prominulis, fuscis, dorso toto sub forti lente granulis minutis piliferis instructo, tuba et apice posteriori infuscatis. Mesonotum linea transversa anteriore, medio interrupta, fusca. Metanotum linea laterali fusca obliqua ad alæ radicem.

Abdomen singulis segmentis superne fascia posteriore fusca tridentata in modum tridentis Neptuni signatis; inferne macula laterali fusca ad prima segmenta, sensim obliterata; cercis superioribus prominulis, cylindro-conicis, crassis, apice obtusis, superne infuscatis, interne apice dentibus spinæformibus atris; lamina subgenitali triangulari sursum incurva, apice spinulis atris curvis instructo.

Pedes femoribus anticis modice inflatis, spina prima flava, reliquis cum magna parte disci, præter tertium basilare et summum apicem, nigro-piceis, nitentibus; tibiis præter basim totis nigris, tarsis rufescentibus.

Alæ angustæ, elongatæ, apice subcutæ, hyalinæ, venis venulisque fusco-rufis, ad alæ basim flavidis. Ala anterior campo costali angusto, quatuor venulis diviso; costa ante ortum sectoris radii cum subcosta confluente; stigmate triangulari, amplo, flavido, medio fusco; cellulis discalibus sex; angulo interno seu posteriore umbra flavida exigua opaco. Ala posterior stigmate elongato-triangulari fusco-rufo, medio obscuriore; cellulis discalibus 5.

Femina mihi ignota.

Long. corp.	12	mm
— prothor.	3'5	»
— alæ anter.	8'5	»
— — poster.	7'5	»

Patria. Nueva Guinea, Bahia de Humbolt y Dorey, J. D. Pasteur, 1906. (Mus. de París).

Anchieta nov. gen.

Simile *Symphrasi*.

Antennæ longæ, filiformes, articulis transversis.

Prothorax oblongus, marginibus subparallelis, antice in tubam haud ampliatus; prosterno patente.

Alæ valde magnitudine dissimilis, anteriores multo majores posterioribus, cellulis discalibus longis, rectis, haud flexuosis. Sector radii in ala anteriore 6 aut pluribus ramis instructus, in posteriore 3 aut 4. Venulæ gradatæ in ala posteriore paucissimæ, 3 plerumque, ultra medium alæ sitæ, in tertio exteriore aut posteriore.

Tibiæ posticæ parum dilatatæ, longæ, compressæ, cultriformes.

♂ Cerci aciculares. ♀ Ovipositor longus, corpore tamen brevior.

Sexus magnitudine dispares, mas multo major quam femina.

Llamo *Anchieta* á este género brasileño en memoria del ilustre apóstol y civilizador del Brasil R. P. José de Anchieta S. J.

Es este género muy complejo en sus caracteres, que avecina los Mantíspidos á los Rafídidos por la forma especial del abdomen.

Su examen y comparación con los demás de los Mantíspidos me induce á dividir esta familia en dos tribus: *Mantispinos y Sinfrasinos*, cuya característica podrá ser la siguiente:

Mantispini. Prothorax longus, tubæformis, prosterno clauso. Alæ similes, cum cellulis obliquis discalibus flexuosis. ♀ absque ovipositore exerto.

Comprende el grande género *Mantispa* Ill., cuya subdivisión habrá de hacerse atendiendo á la forma de los fémures anteriores, de los tarsos y uñas posteriores, etc. y el *Ditaxis* Mac Lachlan.

Symphrasini. Prothorax brevis, oblongus, haud tubæformis, prosterno libero. Alæ dissimiles, anteriores longe majores, nullis cellulis discalibus flexuosis, sed rectis. ♀ cum ovipositore.

Contiene el género *Symphrasis* Hag. (*Anisoptera* Schn., nombre ya antes empleado por Latreille, *Trichoscelia* Westw.) y el nuevo *Anchieta* Nav.

Según esto, podremos distribuir así los géneros de la familia de los Mantíspidos.

A. Protórax largo, dilatado anteriormente en forma de trompeta; prosternón casi del todo oculto. Alas semejantes, con varias celdillas discales oblicuas flexuosas (Tribu **Mantispinos**).

  a. Una sola serie de venillas discales gradiformes. G.º *Mantispa* Ill.

  aa. Doble serie de venillas discales gradiformes. G.º *Ditaxis* Mac Lachl.

B. Protórax corto, más ó menos cilíndrico ó no dilatado anteriormente en forma de trompeta, dejando al descubierto el prosternón. Alas muy desemejantes, siendo pequeñas las posteriores; ambas con celdillas discales rectas (Tribu **Sinfrasinos**).

  b. Abundantes venillas discales en el ala posterior, 5 ó más, situadas hacia el centro del ala. G.º *Symphrasis* Hag.

  bb. Escasas venillas discales en el ala posterior, 3 á lo sumo, situadas hacia el margen. G.º *Anchieta* Nav.

Anchieta nobilis sp. nov.

Minor, fulvus.

Caput fronte ante antennas macula fusca utrinque, similiter in vertice, occipite fascia transversa irregulari, fuscis; palpis labialibus penultimo articulo nigro, ultimo fusiformi, apice acuminato; antennis 44 articulis; primo oblongo, fulvo, reliquis fuscis, secundo globoso, sequentibus depressis, pedunculatis, pilis vercillatis.

Prothorax fere duplo longior quam latior; superne tribus fasciis piceis longitudinalibus insignis, media lateralibus latiore, postice piceus. Meso- et metanotum macula prope scapulas picea.

Abdomen fulvum, obscurum.

Pedes anteriores femoribus inflatis, interne duplici macula fusca, triangulari ad medium juxta dorsum et apicali; tibia præter basim picea. Tibiæ cylindricæ,

posteriores parum dilatatæ, compressæ, ut in quibusdam Hemerobidis. Ungues tenues, recurvi.

Fig. 1.ª
Auchieta nobilis Nav
Alas

Alæ reticulatione fulvo-fusca; anteriores duplo majores quam posteriores. Ala anterior ad medium ampliata, costa paulo post initium convexa; stigmate fuscescente, amplo, paulo longiore quam latiore, nebula brunnea totum campum subcostalem, præter angustum spatium basilare implente et in campos vicinos se effundente; alia macula fusca exigua ad apicem venæ axillaris; venulis scalaribus 7. Ala posterior elliptica, regularis; membrana, præter campum radialem leviter fusco-tinctum, hyalina; stigmate elongato, angusto, quadruplo longiore quam latiore; una venula scalari.

Sexus magnitudine dispares, mas multo major quam femina. ♂ Cerci tenuissimi, apice introssum incurvi, fusci, basi fulvi; lamina subgenitalis triangularis, apice obtusa. ♀. Ovipositor fuscus, longus, filiformis, apice incurvus, depressus, elliptice dilatatus.

	♂	♀
Long. corp.	8'5 mm.	5 mm.
— prothor	2 »	1'5 »
— alæ anter.	10'5 »	7'3 »
— — poster.	6'5 »	5 »
— ovipositoris		2'2 »
Latit. alæ anter.	4 »	3 »
— — poster.	2'2 »	1'9 »

Patria. Jatahy. Prov. Goyas, Brasil, sept. á nov. 1907, 1902 (Mus. de París·)

MEMORIAS

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS Y ARTES

DE BARCELONA

TERCERA ÉPOCA — VOL. VII. NÚM. 11

LA ASTRONOMIA

APLICADA Á LA NAVEGACIÓN DE LOS BUQUES RÁPIDOS

POR EL ACADÉMICO NUMERARIO

EXCMO. SR. D JOSÉ RICART Y GIRALT

Publicada en abril de 1909

LIBRARY
DEC
UNIVERSITY OF TORONTO

BARCELONA

A. LÓPEZ ROBERT, IMPRESOR.—CONDE DEL ASALTO, 63

1909

486c

LA ASTRONOMÍA

APLICADA Á LA NAVEGACIÓN DE LOS BUQUES RÁPIDOS

por el académico numerario

EXCMO. SR. D. JOSÉ RICART Y GIRALT

Sesión del día 21 de enero de 1909

Muchas veces he comparado algunos de los libros que en estos tiempos sirven de texto en la llamada segunda enseñanza y en las escuelas profesionales, con los libros en que estudiaron nuestros abuelos y he llegado al pleno convencimiento que, como regla general, los antiguos profesores ponían todo cuidado en escribir libros que pudieran ser comprendidos con facilidad por las juveniles inteligencias, y en cambio muchos autores de ogaño parece que escriben para los compañeros de cátedra, esto es, para los que saben, sospechando que no ha guiado la pluma otro interés que el de lucirse y adquirir la nota de *sabios*, sin tener en cuenta el destino ó aplicación de aquel libro, que por su contenido y volumen merece ser considerado como obra de consulta por los profesores y no como fuente de agua clara en donde puedan beber las pequeñas inteligencias de los alumnos.

Verdad es que los padres tienen la mayor parte de culpa del estado de enseñanza deficiente, pues pretenden que sus hijos sean sobresalientes en todo y que á los veinte años luzcan el título de doctor ó ingeniero, pretensión ridícula, pues en tan corta edad ni la inteligencia más privilegiada puede ser de veras doctor ni ingeniero.

Y la verdad es, que esta atmósfera falsa que domina en la enseñanza de la juventud, nos cubre á todos y nos domina, teniendo que seguir esta dañina corriente hasta los que opinamos en contra. Así me resultó á mí, que cuando tuve que redactar el programa de Navegación, mi deseo fué hacerlo muy sencillo, pero al recordar lo que le ocurrió á otro catedrático de la misma Escuela de Náutica, cambié de opinión, y publiqué un programa completo, que no es posible que, estudiado en un sólo curso, lo sepa ningún alumno. Tristeza me causó recibir las felicitaciones de personas entendidas en la materia del programa, pues, se me antojó que representaban aquellos plácemes un pésame á mis pobres alumnos, á los que luego fuí en su ayuda, señalando con una estrellita los puntos del programa de estudio preferente.

El hecho á que antes he aludido, es el siguiente: el catedrático á que me refiero publicó un tratado de Trigonometría rectilínea y esférica, escrito expresamente para la enseñanza de los Pilotos, á la cual estaba dedicado aquel matemático hacía muchos años. Pues bien, el Consejo de Instrucción pública se negó á

recomendar el libro, dando por motivo que estaba escrito demasiado claro, no dejando nada que hacer al profesor y no estimulando al alumno para indagar la procedencia de las fórmulas. Y véase si estuvo acertado el respetable Consejo mencionado, pues con tal libro han estudiado los marinos catalanes que han cursado en la Escuela de Náutica de Barcelona, durante estos últimos 35 años, y cuidado que en dicha Escuela se estudia muy seriamente la Trigonometría, ya que es el fundamento de la Astronomía esférica.

II

Me ha impulsado á escribir estas líneas, primeramente la campaña que ha tiempo hacen autorizadas firmas en estos asuntos, contra el exceso de enseñanza teórica en las Escuelas y Academias de marina, pidiendo que se descargue el programa de mucha teoría que no es oportuna por ser demasiado superior y modificar aquél, introduciendo conocimientos necesarios en la marina moderna, en sustitución de otros que han dejado de ser necesarios por el cambio tan grande que ha experimentado el buque, tanto el de guerra como el mercante; para que no se dé el caso que un Oficial de Marina, muy entendido en cálculos superiores, y perfecto artillero ó torpedista teórico, no sepa situarse con la aproximación necesaria y que un Capitán de trasatlántico necesite que vayan otros á compensar el compás de su buque por confesarse incapaz de hacerlo él y sus pilotos.

He aquí lo que dice la reputada revista marítima «Le Yacht», en un reciente artículo de redacción, dedicado á estudiar las causas de tantos siniestros marítimos que han afligido á la Marina francesa, de poco tiempo á esta parte: «Durante las últimas maniobras se ha dado el caso de que después de 24 horas de navegación, dos buques de una misma escuadra, navegando en línea de fila á 400 metros de distancia, se situaron por observaciones astronómicas á 22 millas el uno del otro».

Fácil es comprender que 22 millas es una cantidad suficiente para que el barco se vaya á las rocas ó que sea sorprendido por el enemigo. Y como dice muy bien el articulista francés, esto proviene de que á los jóvenes Oficiales les meten en la cabeza muchas matemáticas, mucha química, para que toda su atención se fije con preferencia en los torpedos, los cañones y las corazas, y se pierde el fin primordial de la navegación que es hallar las dos coordenadas geográficas y el azimut verdadero; y resulta que con tanta ciencia como se inyecta al joven Oficial, no tiene práctica del manejo del sextante y domina poco las fórmulas de la Astronomía náutica.

Las líneas que siguen son de un bien pensado artículo editorial del «Diario de la Marina»: «En lo que se refiere á la preparación profesional, sobre todo en los institutos armados, hemos caido en España en una exageración lamentable: atiborrando de ciencia inútil á los que en ellos entran, con lo cual se desorganizan

físicamente las complexiones de los jóvenes durante el período que más lo necesitan para su desarrollo, obligándoles á un estudio superior á su resistencia y no logrando, después de todo, sino formar *medianías* con muchas pretensiones y apartarlos de la práctica de la profesión, que se mira con desvío».

Es nuestra Marina mercante la enseñanza es también completamente equivocada, pero no por exceso de ciencia, muy al contrario, es por un abandono absoluto en que los poderes públicos han tenido esta interesante y necesaria enseñanza en el último medio siglo; basta decir que el reglamento académico por el cual se rigen las llamadas Escuelas de Náutica, lleva la antigua fecha de 20 de Septiembre de 1850, época en la que la marina de cascos metálicos, movidos por máquinas de vapor, eran casi una excepción.

De este abandono oficial ha venido una consecuencia fácil de comprender, y es que el personal no ha progresado en ilustración lo que ha requerido el progreso del material; y si en verdad cuenta nuestra Marina mercante con Oficiales muy idóneos, nada le deben éstos al Estado, que sólo les proporcionó enseñanza oficial deficiente, habiendo tenido ellos que robar horas al descanso para estudiar, y mermando sus cortos sueldos con la compra de libros é instrumentos.

Como que en rigor no existen verdaderas Escuelas de Náutica, como exige la Marina moderna, resulta que cada profesor tiene sus libros de texto favoritos y de aquí se sigue una desigualdad perjudicial en la instrucción de los Pilotos.

Hace poco se montó un moderno compás de compensación, sistema «Thomson», en un trasatlántico, y se dió el caso, poco honroso, de que el Capitán y Oficiales del barco no supieran compensar las perturbaciones, teniendo que recurrir á un profesor de la Escuela Naval del Ferrol, el que luego publicó un cuadernito de instrucción práctica para la compensación de los compases, dedicado al Capitán del mencionado trasatlántico, para uso de los Pilotos; lo que, como se comprende, no llevó á éstos mucha honra, y menos aún á las Escuelas de Náutica, que no dan á los alumnos la enseñanza que necesita el Oficial de Marina en nuestros tiempos.

¡Y qué mucho! cuando un profesor de Escuela de Náutica oficial, dice en un libro de problemas que no ha mucho tiempo publicó: «Inútil es manifestar, que prefiere los procedimientos empleados en este folleto, por encontrarlos más breves y exactos que las construcciones gráficas tan en moda hoy». Se refiere este profesor á los nuevos métodos de situación de la nave que se fundan en los paralelos de alturas iguales, los que por su sencillez y exactitud están recomendados por todas las autoridades científicas; además que con este cálculo se obtiene en los crepúsculos simultáneamente, la longitud, la latitud y el azimut. ¡Así anda la enseñanza de la Náutica!

III

Al Oficial de Marina ó Piloto hay que proporcionarle cálculos sencillos, que se funden en el menor número posible de fórmulas matemáticas, pero esto sin caer en la exageración. De la misma manera conviene que el marino tenga recopilados ó condensados todos los conocimientos teóricos que ha de aplicar para el gobierno de la nave, en pocos libros y bien claros, para que nunca den lugar á dudas. Hay que considerar la situación moral del marino, particularmente en casos de apuro: su nerviosidad está excitada, es poco menos que imposible guardar una perfecta tranquilidad de espíritu; he aquí por qué en tales momentos no está su cabeza para solventar dudas ni discutir fórmulas; necesita dominar la situación con cálculos y procedimientos que le sean familiares y que aplique, como si dijéramos, por instinto, sin dudas de ninguna clase.

Nuestro sabio hidrógrafo D. Rafael Pardo de Figueroa, dice en uno de sus escritos. «Hoy se procura por todos los medios posibles dar rapidez y seguridad á los procedimientos del pilotaje y ahorrar todo linaje de cálculos momentáneos». (*)

Preocupado por esta idea, y viendo que expertos capitanes pierden sus barcos, como ha pasado en poco tiempo con el trasatlántico italiano *Sirio*, cerca del cabo de Palos; el trasatlántico español *Larache*, y el crucero de nuestra Armada *Cisneros*, en las costas de Galicia, se pregunta el Sr. Pardo ¿acaso estos y otros siniestros pueden tener por motivo corregir equivocadamente el rumbo?

No hay que dudar que los Capitanes del *Sirio* y del *Larache*, y el Comandante del *Cisneros* saben corregir rumbos; pero en la mar es tan fácil preocuparse, es tan frecuente tomar un más por un menos y decir, por ejemplo, cuatro por cuatro diez y ocho; y como es natural, un error hijo del estado psíquico especial en que se encuentra siempre el marino, basta para producir una desgracia.

Siempre recordaré uno de los ratos angustiosos que pasé navegando. Estaba en el Canal de la Florida, y al entrar de guardia á media noche, el Piloto de la guardia anterior me dió el rumbo del compás N. 1/4 N. E. Al cabo de poco rato el timonel me dijo que le parecía oir ruido de rompientes por babor; al momento bajé á la Cámara y corregí el rumbo de la Declinación N. 5° E., restándola en vez de sumar, y el resultado erróneo N. 6° E., acercaba el buque á los cayos de la Florida. Sin perder momento di orden al timonel que gobernara una cuarta más al Este, y avisé al Capitán. Este, que descansaba, se levantó, miró la carta, hizo el cálculo con calma y al momento observó que yo había dado á la declinación magnética el signo contrario.

(*) Rev. Gral. de Marina. —Tomo XIX.—Pág. 281.

He aquí porque el Sr. Pardo de Figueroa, maestro en las cosas del mar, dice: «muy fácil es corregir un rumbo, pero infinitamente más fácil es no tener que corregirlo» (*), y á este fin propone una sencilla modificación en la caja ó mortero del compás de bitácora, para que el timonel gobierne al rumbo verdadero en vez del rumbo magnético, idea que no es nueva, pues hace ya un siglo que los buques del cabotaje de nuestras costas usaban brújulas en las que la planchuela magnética no se afirmaba en la línea N. S., sino en la línea expresada por la declinación magnética con el signo contrario.

Pero este procedimiento tan sencillo para la navegación de pequeño cabotaje, presenta serias dificultades en la navegación de altura y en la de gran cabotaje, en las que las líneas isógonas distan poco entre sí, dándose el caso en los buques rápidos de cambiar 3° en una sola singladura. Además, en los buques metálicos, queda por corregir la perturbación, pues aunque se use el compás compensado, siempre quedan desvíos remanentes, que cambian de valor y á veces de signo al pasar de una latitud magnética á otra; así es que teniendo que corregir el rumbo de todos modos, opino que vale más corregirlo de la Variación ó corrección total de Declinación más Perturbación, y no exponerse á malas inteligencias en la colocación de la línea de fe móvil.

El único remedio consiste en que el marino guarde siempre la calma necesaria en todos los apuros para resolver con sabiduría, pero esto es muy difícil, y ante el peligro, es probable que siempre el marino se ofusque con rosas ó compases corregidos y compases sin corregir, y mucho más en la Marina mercante, en la que van á bordo pocos náuticos, llevando una vida fatigada, que se presta á incurrir en errores, no por falta de ciencia, pero sí por exceso de aplanamiento de espíritu.

La idea expresada, de D. Rafael Pardo, confirma lo que digo antes, y es que al marino hay que proporcionarle métodos sencillos, para que en los momentos de apuro tenga la menor probabilidad de equivocarse.

He aquí porque soy partidario de enseñar la Trigonometría esférica como introducción á la Astronomía Náutica, con sólo el empleo de las líneas trigonométricas que resultan de los dos triángulos, formado el uno por el radio, el seno y el coseno, y el otro formado por el radio, la tangente y la secante. Para la resolución de los triángulos, sigo el sistema del perpendículo, y de esta manera los alumnos y los Pilotos resuelven todos los problemas de la Astronomía y de la Navegación, sabiendo de memoria solamente trece analogías, que son, para los triángulos rectángulos:

R : Sen. B : : Sen. : a Sen. b.

R : Cos. B : : Tang. a : Tang. c.

(*) Rev. Gral. de Marina.—Tomo LXIII.—Pág. 394.

R : Tang. B : : Sen. c : Tang. b.

R : Sen. B : : Cos. c : Cos. C.

R : Cos. a : : Tang. B : Cotg. C.

R : Cos. b : : Cos. c · Cos. a.

Para los triángulos oblicuángulos solamente hay que recordar, llamando x y x' los segmentos de la base; y C′ y C″ los dos ángulos verticales:

Sen. x′ : Sen x : : Tang. A : Tang. B.

Cos. x : Cos. x′ : : Cos. a : Cos. b.

Tang. x : Tang. x′ : : Tang. C′ : Tang. C″

Sen. A : Sen. c : : Sen. B : Sen. b.

Cos. A : Cos. B : : Sen. C′ : Sen. C″.

Cos. C″ : Cos. C′ : : Tang. a : Tang. b.

y por fin

$$\text{Cos.}^{2}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\text{Sen.}\frac{1}{2}\,\text{S. Sen.}\left(\frac{1}{2}\,\text{S}-\text{a}\right)}{\text{Sen. b. Sen. c.}}}\ (*)$$

Este procedimiento, que podemos calificar de económico, siempre ha dado muy buenos resultados á los marinos que han estudiado en la Escuela de Náutica de Barcelona; pues con las tablas logarítmicas de Senos y Tangentes, tienen suficiente para todos sus cálculos; y si en alguno de ellos resulta más ventajoso emplear fórmulas en donde entran Subversos, Secantes, Versos, etc., esta ventaja no es tanta que compense la rapidez con que se opera cuando se dominan las fórmulas, y además hay el auxilio de la figura. Veamos un ejemplo práctico:

Supongamos que se trata de calcular la altura de un astro para una hora determinada, cálculo que forma parte del nuevo procedimiento de situación llamado de Marq-Saint Hilaire, ó de una determinante. Varios autores modernos emplean las fórmulas (**)

(*) En práctica de la navegación no se presenta el caso de hallar el valor de un lado del triángulo, suponiendo conocidos los tres ángulos.

(**) φ = latitud; d = Declinación; H = Horario, y A = Altura del astro.

$$\text{Cos. } \varphi \text{ Cos. d. Sec. } (\varphi - \text{d}) \text{ Ver. H.} = \text{Ver. } x$$

$$\text{Cosec. A} = \text{Sec. } x \text{. Sec. } (\varphi - \text{d})$$

Con cuyo procedimiento precisa buscar siete logaritmos. Pues bien, con las fórmulas sencillas que he dicho antes, no hay más que hacer un croquis del triángulo de situación P Z A (*); en el cual se conoce el ángulo horario P; el complemento de la latitud Z P y la distancia polar A P, y con las fórmulas:

$$\text{R : Cos. P :: Tang. P Z : Tang. } x$$

$$\text{Cos. } x \text{ : Cos. } (\text{A P} - x) \text{ :: Cos. P Z : Sen. altura verdadera}$$

tenemos también siete logaritmos, pero el marino no ha de aprender ninguna nueva fórmula y además tiene el triángulo á la vista, que siempre es un guía.

Yo siempre he sido un enamorado del cálculo de longitud por las distancias lunares, porque las he practicado y estoy plenamente convencido que cuando uno se familiariza con esta clase de observaciones el resultado es lo suficientemente bueno para la práctica de la navegación; pues sobre un recalo se considera muy aceptable una longitud aunque tenga un error de diez millas, después de una larga navegación de altura. Para la reducción de la distancia observada á verdadera, se han ideado muchas fórmulas abreviadas y en nuestra marina, particularmente la militar, privaba la fórmula de Mendoza, para lo cual este sabio marino calculó voluminosas tablas, con las cuales no hay duda que se economiza un poco de trabajo sobre el procedimiento trigonométrico directo; pero puedo afirmar que yo, usando este método, siempre concluí el cálculo más pronto que los compañeros que lo resolvieron por las tablas de Mendoza, esto aparte de tener yo una confianza en el resultado que casi nunca tenían los otros, y por fin, aquí también resulta lo que dije, y es que sólo se necesitan las tablas corrientes de logaritmos, senos y tangentes, sin necesidad de tablas especiales.

Hace ya cuatro años que el Almanaque astronómico que publica el Observatorio de San Fernando, no inserta las distancias lunares de tres en tres horas, como en los años anteriores; esto no obstante, si se da el caso de necesitar el marino emplear este procedimiento para determinar la longitud geográfica, por haberse alterado el movimiento de los cronómetros, cosa ésta muy fácil y corriente; el marino y académico francés Mr. Guyou, dice que los marinos ilustrados tienen medios científicos á su alcance sin necesidad de las distancias que publicaban antes los anuarios astronómicos; y propone una fórmula que también inserta nues-

(*) Polo — zénit — astro.

tro Almanaque Náutico; fórmula que no saben los marinos y que no es probable que nuncan aprendan de memoria, y aunque alguno con la mejor buena voluntad del mundo la aprendiera, como que este cálculo se practica muy raramente, resultaría que en el caso de necesidad todo serían dudas y tener que tomar como modelo el ejemplo que inserta el Almanaque, con lo cual se pierde tiempo. Además, entran en este cálculo veinte logaritmos, seis logaritmos más que si empleamos el cálculo trigonométrico directo, como se ve claramente en el ejemplo que pongo en el apéndice; y repito lo dicho antes, yo sólo necesito en este caso como en los otros, las tablas logarítmicas de senos y tangentes.

Otra reforma que he adoptado en la enseñanza de la Trigonometría, es tomar como punto de origen para los signos de los arcos, el extremo superior del diámetro vertical, como si dijéramos el Norte, y considerar como positivos los arcos contados hacia la derecha ó el Este, y negativos los arcos contados hacia la izquierda ó el Oeste; con cuya modificación facilito á los alumnos la comprensión de la teoría para el cálculo de las perturbaciones del compás magnético y me adapto al sistema sencillo de considerar positivo el sentido *dextrorsum* y negativo el sentido *sinistrorsum*, empleado en varios cálculos de la navegación. Esta innovación parecerá á muchos cosa baladí y que no vale la pena de llenar una sola cuartilla, pero yo no lo entiendo así, y creo que debe preocupar toda novedad que se dirija á simplificar la enseñanza de las cosas á los jóvenes estudiantes.

IV

Los matemáticos han venido en auxilio del marino, proporcionándole tablas para la resolución abreviada de todos los cálculos.

Pero yo creo que quizá se ha exagerado algo la nota, y este cúmulo de tablas viene á ser como aquellos formularios terapéuticos de los antiguos médicos que, si en verdad, bien aplicados salvaban la vida, en cambio, mal aplicados, mataban ó cuando menos empeoraban al enfermo.

Entiendo que las tablas son ventajosas para la persona ilustrada, que sabe perfectamente todo el provecho que puede sacar de aquéllas; pero usadas empíricamente por quien no conoce su fundamento y alcance científicos, puede empeorar la situación del marino sacando resultados erróneos ó cuando menos sin la aproximación necesaria.

Hay que considerar dos cosas principales, tratándose de la navegación moderna de buques rápidos y muy particularmente en líneas de competencia, en las que se cuentan los minutos de travesía, como si se trataran de trenes ferroviarios; y son, la necesidad que tiene el marino de resolver los cálculos pronto y con una aproximación mucho mayor de lo que requería la antigua marina velera.

Y precisamente muchas de las tablas que privan en el cuarto de derrota de los trasatlánticos no llenan la aspiración que he manifestado.

En nuestra marina se usan principalmente las llamadas Tablas de Mendoza, las de Calvet y Bonet, y últimamente han visto la luz las preciosas tablas de los señores Graiño, Cornejo, Herrero y Ribera.

Las tablas favoritas de nuestros marinos son las citadas de Mendoza, con cinco cifras de mantisa, que bastan para la mayor parte de los cálculos, pero no siempre. Así resulta que en el ejemplo de cálculo de longitud por distancias lunares que pongo en el Apéndice, resuelto con las tablas de Calvet y Bonet que tienen siete cifras de mantisa, sólo acusa una diferencia de un segundo y medio con el valor que da el Almanaque náutico, y resuelto con cinco cifras de mantisa, da un error de cuatro segundos de tiempo en la hora del primer meridiano.

Luego, los logaritmos de las funciones trigonométricas, van para arcos de 15 en 15 segundos desde cero á 90 grados en dichas tablas de Mendoza, y si en verdad quien quiera mayor exactitud puede efectuar los cálculos de interpolación, ya he dicho antes que esto está muy bien para la tranquila academia, pero el marino no dispone de tiempo ni de calma para estas operaciones de aproximación, y conviene que lo tenga todo á la vista en primera lectura, á ser posible.

Véase como ejemplo el grande error que en casos determinados puede resultar, admitiendo el valor más próximo de las tablas. Supongamos que queremos calcular la altura de un astro cuya declinación es de 0° 30′; la latitud del observador es de 5° 10′; y el horario del astro es de $1^h\ 32^m\ 34^s$. Sabemos que para este cálculo hay que hallar el valor de un arco auxiliar, cuyo logaritmo tangente es igual á la suma de los logaritmos, coseno del horario y cotangente de la latitud del observador. En este ejemplo, y suponiendo que usamos tablas que sólo dan los valores de 15 en 15 segundos, como las de Mendoza, el logaritmo tangente de este arco auxiliar está comprendido entre 89° 27′ 15″ y 89° 27′ 30″. Si concluímos el cálculo de la altura del astro con cada uno de estos valores, resultarán las alturas 66° 56′ 15″ y 65° 55′ 45″, esto es: una diferencia de 60′ 30″ que no puede admitirse.

Las tablas de Calvet y Bonet, así como muchas otras extranjeras, dan siete cifras de mantisa, los logaritmos corresponden á valores de 10 en 10 segundos de arco; y de segundo en segundo para los cinco primeros grados del cuadrante en el Seno y Tangente y en los cinco últimos grados del cuadrante en el Coseno y la Cotangente.

Cosa extraña: las Tablas de Mendoza no tienen los logaritmos de las Tangentes y Cotagentes, de imprescindible necesidad para la práctica *económica* de la Trigonometría esférica y en cambio tienen los logaritmos secantes y cosecantes, que huelgan, pues basta tomar á la vista los complementos logarítmicos respectivos del coseno y del seno.

Los logaritmos del Sen. $^2\frac{1}{2}$ de Graiño, Verso y Subverso de Mendoza y Horario de Calvet y Bonet, opino que es mucho más claro el orden seguido en estas últimas tablas, en las que hay la lectura de todos los horarios occidentales en la parte superior de la página y los horarios orientales en la parte inferior, alcanzando hasta 7^h ó 105^0, que es lo que basta en la mayoría de los casos que se presentan en la práctica de la Astronomía Náutica; y si por excepción hay que resolver un caso de horario mayor, es sencillo aplicar el Sen. $^2\frac{1}{2}$.

Las llamadas Tablas de Mendoza se han hecho simpáticas á los marinos por la claridad de los tipos y porque en las llamadas tablas de estima no hay que intepolar, pues de simple lectura los valores alcanzan las 480 millas de distancia, que significan una velocidad en el barco de 20 millas por hora, durante un día.

En las tablas de Calvet y Bonet, la distancia llega solamente á 180 millas y en las tablas de Graiño hay los valores de los dos triángulos llamados de estima para las nueve unidades, modificación que no es del agrado de los marinos, y que ella sola es fácil que sea motivo suficiente para que estas tablas, que son de último figurín, como suele decirse, tarden en ser admitidas en los cuartos de derrota.

El Sr. Graiño y sus tres sabios compañeros, en mi concepto, partieron de una idea equivocada, por más que sea laudable, y es que condensaron todo el inmenso material que hay en sus tablas para presentar un libro manual y económico. Este cálculo está bien fundado tratándose de libros cuya adquisición es facultativa, pero las tablas náuticas son indispensables á todo marino, sin ellas no puede navegar y como que es un libro para toda la vida, se hace el gasto de una vez, y lo mismo se compra tanto si cuesta 10 pesetas más como menos. Entre los marinos es muy frecuente la presbicia y en el cuarto de derrota no hay siempre buena luz, de manera que para leer los números de las tablas de Graiño, los sujetos de vista cansada, tienen que emplear un lente, lo que es una dificultad por prestarse á errores.

Las tablas de Graiño insertan los logaritmos tangentes y un gran número de tablas auxiliares que ciertamente las colocan entre lo mejor de lo mejor que se ha publicado en el extranjero.

Para satisfacer las exigencias de la navegación en buques rápidos, no bastan tampoco las tablas de estima calculadas para los grados justos, y bien podemos decir que significan un retroceso comparadas con el antiguo cuadrante de reducción que apreciaba quintos de grado. No hay que pedir tanto á las tablas, pero sí que se impone calcular las diferencias de latitud y apartamiento de meridiano de medio en medio grado, al menos para los diez primeros y los diez últimos grados del cuadrante. Veamos un ejemplo de los errores que pueden resultar empleando las tablas actuales: Con el rumbo $87^\circ\ 30'$ queremos hallar la diferencia de latitud correspondiente á la distancia navegada de 300 millas. Si admitimos por

rumbo los 87°, tendremos 15'7, y para los 88° la tabla dá 10'5; esto es, una diferencia de 5'2 millas, que es mucho error para ser despreciado. Naturalmente que no hay más que tomar el promedio de los dos valores y resultarán 13'1, que es el correspondiente á los 87 $^1/_2$ grados; pero yo también aquí repetiré lo dicho antes, y es que al marino hay que darle las tablas de manera que no tenga que hacer interpolaciones, pues es fácil que no las haga, apremiado por la falta de tiempo ó de voluntad, y de aquí pueden resultar errores de mucha importancia.

Opino que hay que ampliar la cuasi totalidad de las tablas astronómicas y de navegación, pues si en verdad bastan para los usos corrientes de la navegación de la marina velera y de la marina á vapor de velocidades medianas, en cambio son deficientes para el grado de aproximación que requiere la navegación de buques rápidos.

No quiero decir con esto que en la navegación moderna tengan que efectuarse todos los cálculos aproximando segundos, nada de esto, y precisamente me gusta mucho el procedimiento de las tablas de Graiño, que dan los valores en grados, minutos y décimas de minuto. Esto es lo corriente y basta en la mayoría de los casos, pero no quiere decir que en otros no convenga apurar la cosa y estimar los segundos.

Con frecuencia digo á mis alumnos que en ciertos casos los segundos se dan al cocinero. Véase como ejemplo el cálculo del Apéndice II, que es la determinación de latitud geográfica por una altura de la Polar, y para cuya resolución exacta el Almanaque Náutico inserta varias tablas. En la práctica los marinos no usan más que la tabla corriente de estima ó de rumbo y distancia.

Como he dicho en anteriores líneas, no conviene exagerar el uso de las tablas, pero esto se refiere solamente á los marinos de poca ilustración, que se acostumbran á efectuar todos los cálculos, como si dijéramos mecánicamente, con las tablas, y es muy fácil que en muchas ocasiones obtengan resultados erróneos sin saber de donde procede la causa; y en cambio para el marino ilustrado, que conoce la teoría y fundamento de todos los cálculos, las tablas son una economía muy provechosa, pero nunca una necesidad imprescindible.

Así como aconsejo á los marinos el uso de las tablas logarítmicas que de primera lectura aproximen 10'' y además contengan tablillas de interpolación sencilla, soy partidario de los octantes de cuerpo de metal con graduación de marfil para las observaciones de las alturas de los astros.

Ha sido un verdadero lujo la adquisición de sextantes y quintantes con graduación de plata aproximando el nonius 10''; pues casi siempre el instrumento ha quedado guardado en una caja, efectuándose las observaciones con algún otro instrumento más modesto de los que hay á bordo. Conste que me refiero á la marina mercante.

Las obervaciones corrientes en la Astronomía Náutica, son las alturas de los astros; por consiguiente, para ellas basta el octante que mide los 90°, y si al-

guna vez se han tomado distancias lunares, es muy raro que se escojan mayores de un cuadrante, y si antes no había necesidad precisa de ello, ahora la hay menos desde el momento que está á la voluntad del observador el escoger cualquier astro cercano á la Luna.

Tenemos graduaciones de marfil preciosas por su exactitud, cuyo nonius aproxima 15″, que es un límite muy inferior á la suma de los errores que en general se cometen en toda observación á bordo, debidos á la confusión del horizonte del mar y del mismo observador, por ecuación personal ó á los movimientos del barco. (*)

Otra ventaja de las graduaciones de marfil es que se leen con facilidad, por ser claras y no producir reflejos como las graduaciones de metal, y la aproximación de 5″ que éstas podrían darnos de ventaja, se pierden casi siempre por error de paralaje en la lectura, por poco que se incline la visual. Es muy difícil leer con seguridad las graduaciones sobre metal en octantes de pequeño radio, como se acostumbran, y dividido cada grado en seis partes cuyo nonius correspondiente aprecia 10″ y en cambio las graduaciones de marfil se leen perfectamente con el solo auxilio de un lente suelto.

V.

¿Cuáles son los cálculos que deben aconsejarse con preferencia para la situación de la nave y la corrección del rumbo, en la navegación de buques rápidos?

No dudo que será tan difícil desterrar la práctica antigua de horario por la mañana y meridiana al medio día, como el considerar instrumentos contrarios al salvamento de náufragos, en mal tiempo, los botes ó *vasos*.

Esto es fácil de comprender: el horario y la meridiana vienen formando parte de las costumbres diarias del marino desde que se introdujo el cronómetro á bordo, y como que el procedimiento es tan sencillísimo, que está al alcance de cualquier medianía, no ha habido porque substituirlo por otro método mientras los barcos han navegado sin necesidad de tener una gran aproximación en el *punto*.

En la época de la marina velera, se calculaba el horario con la latitud de estima, y luego se rehacía el cálculo llevando á la hora del horario la latitud obtenida con la altura meridiana del Sol, por medio del rumbo y distancia navegada en aquellas tres ó cuatro horas, y como los barcos todo lo más, como regla general, alcanzaban las diez millas por hora, el error que podia resultar era poco, relativamente, á las necesidades de aquella clase de navegación.

(*) Una comisión científica de la marina austriaca, creada á este objeto, ha dictaminado que las tablas de depresión de horizonte y de refracción, son muy erróneas.

Luego se modificó esta reducción, por el llamado coeficiente Pagel y también, trabajando dos horarios para determinar una recta de altura, que se *remolcaba* hasta el mediodía, por medio del rumbio y distancia navegada entre las dos observaciones; y la intersección de esta paralela al paralelo de alturas iguales con el paralelo de latitud dado por la meridiana solar, proporciona el lugar de la nave, con bastante aproximación.

Mientras los instrumentos de reflexión no han estado dotados de anteojos astronómicos muy claros y de un aumento al menos doble, no es extraño que los marinos se concretaran á observar el Sol y todo lo más la Luna en buenas condiciones; pues los instrumentos de que disponían no les daban ninguna seguridad para la observación de las estrellas; esto aparte que, como dije antes, el tiempo no era como ahora factor principal en el negocio marítimo, tanto que se daba el caso muy frecuente que el barco que llegaba último vendía el cargamento mucho mejor que los barcos más veloces ó que efectuaban menor travesía.

Pero el cable eléctrico ha sido el motivo más poderoso para que la navegación haya cambiado radicalmente; pues ahora el comerciante sabe en cualquier instante los precios y existencias de todos los puertos del globo, y por esto necesita fundar los cálculos en la rapidez del instrumento de transporte marítimo.

La vida social también se ha modificado y resulta que hoy no se admite el carruaje arrastrado por fuerza animal ni el buque de vela y se quieren trenes *éclairs* y barcos de 25 millas para llegar pronto, aunque sea con peligro de ir á la eternidad.

Y el marino á quien se obliga á correr desesperadamente, con buen ó mal tiempo, viendo astros para observar ó con el cielo cubierto, necesita hoy unos procedimientos en relación con este estado de cosas, y ha de tener la situación de la nave en todo momento de día y de noche.

He aquí el porqué no satisface para esta navegación rápida el tradicional y cómodo sistema de horario y meridiana solar. Como he dicho antes, conviene tener simultáneamente la Longitud, la Latitud y el Azimut; y según mi humilde opinión ¡ningún cálculo ofrece más sencillez y exactitud relativa, que el Marq Saint Hilaire, procurando para economía de trabajo que una de las alturas sea meridiana de una estrella ó de la Polar, si el buque se encuentra en nuestro hemisferio.

Con los modernos instrumentos de reflexión que antes he mencionado, se pueden tomar con bastante aproximación en los crepúsculos las alturas de estrellas de primera ó segunda magnitud, y éstas las tenemos siempre á la vista en todas las épocas del año, mientras no estorben las nubes.

¿Quiere decir esto que ha de abolirse por completo el procedimiento de horario y meridiana? Yo creo que no: pero debe vestirse á la moderna y emplearlo con estrellas en vez de emplearlo con el Sol.

En efecto: en el crepúsculo podemos tomar en buenas condiciones una altura

de la Polar ó la altura meridiana de otra estrella, simultáneamente con la altura extra meridiana de una estrella cercana al vertical primario.

Con la altura de la Polar ó la meridiana, por cálculo facilísimo obtenemos la Latitud; y luego con la altura de la otra estrella calculamos el horario, introduciendo en el cálculo la latitud que acabamos de calcular.

De manera que tenemos simultáneamente las dos coordenadas geográficas y si en el momento de dejar el octante, tomamos la marcación de la estrella que está en el meridiano, tendremos el azimut, sin necesidad de cálculo especial, que nos servirá para saber el rumbo verdadero de la nave.

Y conste que al decir estrellas, me refiero también á los planetas Venus, Marte, Júpiter y Saturno, que brillan como las hermosas estrellas de primera magnitud.

El obtener la situación geográfica por medio de observaciones astronómicas en los crepúsculos tiene mayor ventaja que no el situarse solamente al mediodía; pues, una buena situación al anochecer es motivo de mayor tranquilldad para pasar la noche, sobre todo cuando ésta es larga y luego la situación en el crepúsculo matutino, favorece para dar el rumbo que hay que seguir durante el día.

Esto no quiere decir que dejen de aprovecharse otras observaciones, como la meridiana del Sol, ó el cálculo del horario por alturas circummeridianas, conocido con el nombre de su autor Mr. Litrow; ó también otro cálculo que yo practiqué en mis navegaciones, usando un octante bastante mediano, y que siempre me dió un resultado muy aceptable, pues como he dicho antes, en la marina velera de hace cuarenta años, no influía el error de unas cuantas millas en la situación. Con los instrumentos modernos ya es otra cosa, y se pueden tomar alturas correspondientes bastante aproximadas media hora antes y después del meridiano, y aun con menor horario, que es el cálculo á que me refiero, cuando la distancia zenital es menor de 40°. En efecto: para una Latitud de 30° N., el día 20 de Junio, la altura del Sol varía 1° 26′ 50″ en los 10^{m} comprendidos entre los horarios 0^{h} 30^{m} y 0^{h} 20^{m}, y en cambio, para la Latitud 50° N., el día 22 de Diciembre, la altura del Sol varía solamente 0° 10′ para la misma diferencia de horarios; es decir, que en el primer caso de alturas altas, la altura varía 8′8 por cada minuto de tiempo, y en el segundo caso la altura varía un minuto de arco cada minuto de tiempo. En el primer caso las alturas son de 80°, y en el segundo son de 16°.

Podemos, pues, admitir que con los buenos instrumentos de reflexión modernos, podemos tomar alturas correspondientes distantes solamente 15^{m} del meridiano, cuando aquellas son superiores á 60°; y en el caso de ser inferiores hay que ir aumentando el horario hasta que sea de 30^{m}, pues pasando de este límite ya no resultaria ninguna ventaja con seguir este cálculo. En el Apéndice III hay un ejemplo.

Parece excusado decir que no es práctico emplear las alturas de la Luna

para este cálculo, por resultar muy trabajoso, y tampoco es fácil emplear las estrellas por las dificultades prácticas de esta clase de observaciones.

La seguridad de la navegación rápida tiene que fundarse en el conocimiento exacto, ó al menos muy aproximado, de la hora del primer meridiano, y ésta se obtiene, como sabemos, por medio del cronómetro; se impone, pues, llevar á bordo al menos tres buenos cronómetros, bien instalados y observados, para que el promedio de sus horas corregidas del estado absoluto den la hora del primer meridiano.

Es de desear que los constructores de cronómetros estudien el medio para darles cuerda sin necesidad de dar vuelta al mortero, pues resulta á veces que en el momento aquel, un golpe de mar causa un movimiento brusco al barco, y si el marino está un poco descuidado, para no caerse, suelta el cronómetro, que da la vuelta brusca, lo que es suficiente para que se altere notablemente su movimiento, esto si no se despuntan los pivotes; y de todas maneras, por cuidado que se tenga, siempre es motivo de perturbación volver el cronómetro al revés, separándolo de su posición normal. La construcción de los cronómetros ha llegado á una perfección maravillosa, pero falta que sean tratados á bordo de la manera que exige su delicadeza.

Sospecho que las ondas hertzianas darán dentro de poco el medio de hallar la longitud geográfica con más sencillez aún que el cálculo de la Latitud por alturas meridianas. En efecto: para esto no hay más que los semáforos establecidos en los parajes más indicados de la costa, estén provistos de aparatos de telegrafía sin hilos, cuyas ondulaciones hertzianas sean sincrónicas para ser entendidas en los aparatos receptores de los barcos (*). Llegado este caso, por convenio internacional todas las estaciones terrestres podrían emitir tres señales respectivamente á las 0^h, $0^h\ 05^m$ y $0^h\ 10^m$ del meridiano de Greenwich, llamando la atención del navegante por medio de una señal convenida, transmitida á las $23^h\ 50^m$. Como se comprende, al recibir el marino esta señal se trasladaría al momento al lugar del cronómetro y aguardaría á que sonaran las tres señales antes dichas para apuntar las horas respectivas. Por este medio el marino corregiría diariamente el estado absoluto de sus cronómetros.

Si en los instantes de las tres señales hertzianas se tomaran otras tantas alturas de un astro situado en las cercanías del vertical primario, se obtendría la longitud, sin más error que el cometido en la observación de la altura, suponiendo instantánea la propagación de las ondas hertzianas.

El Observatorio de París tiene el proyecto de señalar la media noche de su meridiano, desde la torre Eiffel, por medio de las ondas hertzianas; y como que la estación proyectada tendrá un alcance de 11,000 kilómetros (5,940 millas),

(*) Recientes experimentos parecen indicar que aun no se ha conseguido la sintonización perfecta.

alcanzará una grande zona oceánica, dentro de la cual los buques podrán comparar los cronómetros cada media noche.

VI

Fácil es comprender que el tema que he escogido en estas líneas es muy complejo, y necesitaría mucho espacio para tratarlo con todos sus detalles; no es este mi objeto. Solamente me he propuesto llamar la atención de los marinos, tanto militares como mercantes, sobre dos extremos referentes á la carrera de Capitán de la Marina mercante:

1.° Modificar su enseñanza, con un programa de asignaturas apropiadas á las exigencias de la navegación moderna de cascos metálicos, de gran desplazamiento y crecida velocidad.

2.° Procurar que la enseñanza sea sencilla, para que el marino, con el menor número posible de fórmulas y reglas, pueda hallar en cualquier momento, de día y de noche, las dos coordenadas geográficas y el rumbo verdadero.

APÉNDICE I [1]

En la noche del día 6 de Julio de 1906, se observó la distancia occidental entre la Luna y Antares, que corregida nos dió 46° 56′ 16″; siendo la hora local $10^h\ 20^m\ 30^s$ y la longitud aproximada $1^h\ 10^m$ al W.

Preparación para el cálculo

H.ª del observ.dor $= 10^h\ 20^m\ 30^s$ AR ☾ á $11^h = 19^h\ 45^m\ 26^s$ AR ☾ á $12^h = 19^h\ 47^m\ 59^s\ 7$

Longitud . . . $= 1^h\ 10^m\ 00^s$ AR ✱ á $12^h = 16^h\ 23^m\ 41^s$ AR ✱ $= 16^h\ 23^m\ 40^s\ 7$

H.ª de S. Fern.do $= 11^h\ 30^m\ 30^s$ diferencia $= 3^h\ 21^m\ 45^s$ diferencia $= 3^h\ 24^m\ 19^s\ 0$

H.ª mayor . . $= 12^h$ δ ☾ á $11^h = -19°\ 40'\ 19''$ δ ☾ á $12^h = -19°\ 36'\ 57''\ 5$

H.ª menor . . $= 11^h$ ☽ − P = ∆ $= 109°\ 40'\ 19''$ ☽ − P = ∆ $= 109°\ 36'\ 57''\ 5$

δ ✱ $= -26°\ 13'\ 25''\ 5$ P $= 3^h\ 21^m\ 45^s = 50°\ 26'\ 15''$

✱ P = ∆ $= 116°\ 13'\ 25''\ 5$ P′ $= 3^h\ 24^m\ 19^s = 51°\ 04'\ 45''$

Calcular la distancia para las 11^h

R : Cos. P $= 50°\ 26'\ 15'' = 9'8040845$

: : Tang. ☽ − P $= 109°\ 40'\ 19'' = 0'4467245$ . . . cos $= 9'5271582$

: Tang. $= 60°\ 41'\ 41'' = 0'2508090$

180°

$\infty = 119°\ 18'\ 19''$ . . . . . cos comp. $= 0'3102803$

✱ − P $= 116°\ 13'\ 25''\ 5$

$\infty' = 3°\ 04'\ 53''\ 5$ . . . . . cos $= 9'9993716$

Distancia para las $11^h = 46°\ 37'\ 31''$. cos $= 9'8368101$

---

(1) Sea un triángulo esférico cuyos tres vértices son el polo P y los dos astros ☾ y ✱

Calcular la distancia para las 12^h

R : Cos P = 51° 04′ 45″ = 9′7981298
: : Tang. ☽ — P = 109° 36′ 57″ 5 = 0′4480645 cos = 9′5259696

: Tang. = 60° 26′ 03″ = 0′2461943
180°

∞ = 119° 33′ 57″. . . . . cos comp. = 0′3067803
✳ — P = 116° 13′ 25″ 5

∞′ = 3° 20′ 31″ 5 . . . . . cos = 9′9992607

Distancia para las 12^h = 47° 13′ 02″. . cos = 9′8320606

Calcular la hora de San Fernando

a) = ☽ — ✳ corregida = 46° 56′ 16″
b) = ☽ — ✳ para 11^h = 46° 37′ 31″ 35′ 31″ : 60^m : : 18′ 45″ : ∞ = 31^m 40^s 5
☽ — ✳ para 12^h = 47° 13′ 02″

diferencia en 60^m = 35′ 31″
a — *b* = 18′ 45″
Hora de San Fernando 11^h 31^m 40^s 5

Cálculo de la distancia por la fórmula del Almanaque Náutico

Ejemplo: I.—En la noche del 6 de Julio de 1906 se observó la distancia *occidental* entre la Luna y Antores, que corregida nos dió 46° 56′ 16″, siendo la hora local 10^h 20^m 30^s y longitud próxima 17° 30′ O = + 1^h 10^m.

h_1 = 10^h 20^m 30^s
Long. = + 1 10 0

$H_{S\ F.}$ prox. = 11 30 30

H_1 = (primera hora supuesta) = $11^h\,20^m\,30^s$

$A_1 =$	$19^h\,46^m\,18,^s54$	$D_1 =$	$-\,19^\circ\,39'\,11,''5$
$\alpha_1 =$	$16\;\;23\;\;40,\;\;80$	$\delta_1 =$	$-\,26\;\;13\;\;25,\;\;4$
$A_1 - \alpha_1 =$	$3\;\;22\;\;37,\;\;74$	$D_1 + \delta_1 =$	$-\,45\;\;52\;\;36,\;\;9$
$\frac{1}{2}(A_1 - \alpha_1) =$	$1\;\;41\;\;18,\;\;87$	$\frac{1}{2}(D_1 + \delta_1) =$	$-\,22\;\;56\;\;18,\;\;5$
$\cos D_1 =$	9,9739336		
$\cos \delta_1 =$	9,9528290		
$\cos D_1 \cos \delta_1 =$	9,9267626	$\cos \frac{1}{2}(D_1 + \delta_1) =$	9,9642238
$\frac{1}{2}\cos D_1 \cos \delta_1 =$	9,9633813	$\operatorname{sen} \varphi_1 =$	9,6349718
$\cos \frac{1}{2}(A_1 - \alpha_1 =$	9,9561054	$\operatorname{sen} \frac{1}{2}\Delta_1 =$	9,5991956
$\text{c.cos}\frac{1}{2}(D_1 + \delta_1) =$	0,0357762	$\frac{1}{2}\Delta_1 =$	$23\;\;24\;\;50$
$\cos \varphi_1 =$	9,9552629	$\Delta_1 =$	$46^\circ\;49'\;40''$

H_2 = (segunda hora supuesta) = $11^h\,40^m\,30^s$

$A_2 =$	$19^h\,47^m\;\;9,^s80$	$D_2 =$	$-\,19^\circ\,38'\;\;5,''7$
$\alpha_2 =$	$16\;\;23\;\;40,\;\;80$	$\delta_2 =$	$-\,26\;\;13\;\;25,\;\;4$
$A_2 - \alpha_2 =$	$3\;\;23\;\;29,\;\;00$	$D_2 + \delta_2 =$	$-\,45\;\;51\;\;31,\;\;1$
$\frac{1}{2}(A_2 - \alpha_2) =$	$1\;\;41\;\;44,\;\;50$	$\frac{1}{2}(D_2 + \delta_2) =$	$-\,22\;\;55\;\;45,\;\;6$
$\cos D_2 =$	9,9739830		
$\cos \delta_2 =$	9,9528290		
$\cos D_2 \cos \delta_2 =$	9,9268120	$\cos \frac{1}{2}(D_2 + \delta_2 =$	9,9642531
$\frac{1}{2}\cos D_2 \cos \delta_2 =$	9,9634060	$\operatorname{sen} \varphi_2 =$	9,6366660
$\cos \frac{1}{2}(A_2 - \alpha_2 =$	9,9557206	$\operatorname{sen} \frac{1}{2}\Delta_2 =$	9,6009191
$\text{c.cos}\frac{1}{2}(D_2 + \delta_2) =$	0,0357469	$\frac{1}{2}\Delta_2 =$	$23\;\;30\;\;45$
$\cos \varphi_2 =$	9,9548735	$\Delta_2 =$	$47^\circ\;\;1'\;30''$

$$H = H_1 + \frac{\Delta - \Delta_1}{\Delta_2 - \Delta_1}(H_2 - H_1) = 11^h\,20^m\,30^s + 11^m\,9^s = 11^h\,31^m\,39^s$$

APÉNDICE II

Día 20 de Setiembre á las $11^h\ 43^m$ del reloj de bitácora; se tomó una altura de la Polar, que corregida resultó $39°\ 12'\ 17''$, estando en la longitud $2^h\ 40^m\ 48^s$ al W. Calcular la latitud.

Por las tablas del Almanaque

Hora media observador =	11^h	42^m	58^s
Ecuación =		6	20
Hora verdadera observador =	11	49	18
Longitud =	2	40	48
Hora verdadera San Fernando =	14	30	06
(Tabla I) Setiembre 21 á 0^h =	10	24	40
Hora verdadera local =	11	49	18
Argumento h =	22	13	58
(Tabla III) =	− 1°	04′	03″
Altura verdadera =	39°	12′	17″
Latitud =	38°	08′	14″

Método abreviado

Hora del observador =	11^h	43^m	
Tiempo sidereo á 0^h =	11	54	
Tiempo sidereo á 0^h observador =	23	37	
ÆR ✳ =	1	27	
Horario occidental =	22	10	
Horario oriental =	1	50	= 27 ½°
Con 27 ½° y 72′ de Δ =	− 1°	04′	(Tablas de estima)
Altura verdadera =	39°	12	
Latitud =	38°	08′	

APÉNDICE III

Dia 30 de Marzo de 1894, cuando el cronómetro señalaba las $9^h\ 45^m\ 46^s$ se observó antes del meridiano la altura del Sol 51° 46′. Navegó al rumbo corregido S 40° W á razón de 20 millas por hora, y deseo saber cual será la altura correspondiente á la anterior. Estado absoluto del cronómetro $+\ 1^h\ 12^m\ 15^s\ 8$ y la longitud de estima, 8° al E.

Hora del cronómetro. . =	$9^h\ 45^m\ 46^s$	Medio dia verdadero. . =	0^h
E. absoluto . . . . . =	1 12 16	Ecuación. . . . . =	$0\ 04^m\ 29^s$
Hora de San Fernando . =	10 58 02	Mediodía medio . . . =	0 04 29
Longitud. . . . . =	32	Hora media observador. =	11 30 00
Hora observador . . . =	11 30	Horario. . . . . =	34 29
		Intérvalo aproximado. . =	$68^m\ 58^s$

Si en 60^m el buque anda 20 millas en 69^m anda 23 millas.

El Radio es al Coseno de 40° (diferencia entre el rumbo y el azimut); como 23 millas, es á 18 millas ó minutos que añadiremos á la altura 51° 46′; y tendremos la altura correspondiente corregida, 52° 04′.

Cuando el Sol tenia de altura 52° 04; el cronómetro señaló, $10^h\ 51^m\ 57^s$

1.ª Hora del cronómetro. . =	$9^h\ 45^m\ 46^s$
2.ª Hora del cronómetro. . =	10 51 57
	20 37 43
Hora del promedio. . . . =	10 18 51 5
Estado absoluto. . . . . =	1 12 15 8
Hora media San Fernado . =	11 31 07 3
Mediodia medio. . . . . =	12 04 29 0
Longitud al E	$33^m\ 22^s$ = 8° 20′ 30″ para el mediodia.

APÉNDICE IV

Método para hallar simultaneamente la longitud, la latitud y el azimut en los crepúsculos

Día 25 de Marzo de 1895. estando en la longitud de estima 8° 30′ al E. y latitud de estima 40° 10′ N.; se observaron simultáneamente, la altura de la Polar 39° 59′ y la de Sirio, 22° 54′, elevados sobre el nivel del mar 5 metros. Hora del cronómetro, $7^h\,41^m\,40^s$. Estado absoluto del cronómetro, $+\,0^h\,46^m\,20^s$. Corrección del instrumento + 1′. Al mismo tiempo se marcó la Polar N 13° W.

Hallar la Latitud por la Polar

Hora cronóm.. =	$7^h\,41^m\,40^s$	Declin. ✳ = 88° 44′ 45″	Altura observ. = 39° 59′
E. Absoluto . = +	46 20	♃ = 1° 15′ 15″	Corrección. . = — 4′
H.ª S. Fern.do. =	8 28 00		Altura verd.ra = 39° 55′
Long. estima . =	34 00	R : cos 61° 15′ : : 75′ : x = ...	35′ 5
H.ª observ.dor =	$9^h\,02^m$	(Tablas de estima)	Latitud . . . = 40° 30′ 5
T.° sid. á 0^h . =	0 12		
T.° sidéreo. . =	9 14		
ÆR. ✳ . . . =	1 19		
Horario. . . =	$7^h\,55^m$		
Suplemento. . =	4 05 / 61° 15′		

Hallar la Longitud, calculando la altura de Sirio [1]

T.° sid. á 0^h de S. Fernando =	$0^h\,11^m\,47^s\,6$	Declinación. . = —	16° 34′ 20″
Por 34^m de Long. . . . . =	5 6	♃ =	106° 34′ 20″
T.° sid. á 0^h observador . . =	0 11 42		—
Por $9^h\,02^m$ de T.° medio . . =	9 03 29	Altura observ. =	22° 54
T.° sidereo observador . . =	$9^h\,15^m\,11^s$	Corrección. . = —	5′
ÆR. de Sirio . . . . . =	6 40 29	Altura verd.ª. =	22° 49′
Horario. . . . . =	2 34 42 / 38° 40′ 30″		

(1) Sea un triángulo esférico cuyos tres vértices son el polo, el zenit y el astro.

R : cos . . .	38° 40′ 30″	= 9′8924859	
: : Cotg . . .	40 30 30	= 0′0683732	sen . = 9′8126184
: Tang . x . .	= 42 25 20	= 9′9608591	cos . com . = 0′1318296
λ	= 106 34 20		
x'	= 64 09 00	. . . . .	cos = 9′6395030
Altura calculada	= 22° 34′		sen = 9′5839510
Altura observada. . . .	= 22 49		

Diferencia . . . . . = + 15′ El Azimut de Sirio (Tablas) = S. 40° 25 W.

Sitúase en la carta el punto dado por la Latitud observada 40° 30′ y la Longitud de estima 8° 30′. Trácese desde este punto la línea de Azimut, S 40° W; y cuéntese sobre ella una distancia igual á 15 millas. Por el punto resultante trácese una perpendicular á la línea del Azimut, (paralelo de alturas iguales) y allí donde corte el paralelo de 40° 30′ será el lugar probable del observador.

El cálculo dá 40° 30′ N y 8° 00′ E, que es el punto verdadero para el cual se calcularon las alturas.

Corrección del rumbo

Azimut verdadero de la Polar (almanaque) . . . . = N 1° 22′ W.

Marcación. . . . . = N 13° 00′ W.

Corrección total. (Declinación + Perturbación) . . . = N 11° 38′ E.

MEMORIAS

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS Y ARTES

DE BARCELONA

TERCERA ÉPOCA

VOL. VII. NÚM. 12

SESIÓN PÚBLICA EXTRAORDINARIA

del día 30 de enero de 1909

EN HONOR DEL ACADÉMICO DIFUNTO

SR. D. MIGUEL CUNÍ Y MARTORELL

MEMORIA NECROLÓGICA

POR EL ACADÉMICO

DR. D. MANUEL MIR Y NAVARRO

DISCURSO DEL SR. PRESIDENTE

LIBRARY
DEC
UNIVERSITY OF TORONTO

Publicada en abril de 1909

BARCELONA

A. LÓPEZ ROBERT, IMPRESOR.—CONDE DEL ASALTO, 63

1909

510

SESIÓN PÚBLICA EXTRAORDINARIA

del día 30 de enero de 1909

en honor del Académico difunto

Sr. D. Miguel Cuní y Martorell

Bajo la presidencia del Dr. D. Eugenio Mascareñas, Presidente de la Corporación, y con asistencia del Sr. D. José Die en representación del Excmo. Sr. Gobernador civil; del Dr. D. Benito Torá en la del Excmo. Sr. Rector de la Universidad; del Excmo. Sr. D. José Ricart y Giralt, Director de la Escuela especial y provincial de Náutica; del Dr. Palou, delegado por el Ilmo. Sr. Rector del Seminario Conciliar; del Sr. D. Hermenegildo Gorria, por el Centro de Maestros de Obras de Cataluña; del Sr. Martorell y Terrats, en representación de la familia del Sr. Cuní y Martorell, además de numeroso y distinguido público, dió comienzo la sesión á las diez y ocho horas, y previa la venia de la presidencia, el Sr. académico Dr. D. Manuel Mir y Navarro leyó la siguiente memoria necrológica:

NECROLOGÍA

DEL

SR. D. MIGUEL CUNÍ Y MARTORELL

POR EL

Dr. D. Manuel Mir y Navarro

leída en sesión pública celebrada el día 30 de enero de 1909

Es siempre, hasta cierto punto, doloroso el recuerdo de personas que nos han sido queridas, y que abandonaron este mundo ocasionándonos con ello la irreparable pérdida de un sincero y buen amigo, difícil de reemplazar en toda época, y sobre todo en estos tiempos, en que por desgracia domina demasiado el individual egoismo. Mas tal sentimiento se mitiga, y hasta en ocasiones es sustituído por otro enteramente opuesto ó de fruición, cuando el recuerdo va acompañado de ideas que nos representan múltiples hechos, actos ó acciones verificados por el ser querido, cuya ausencia deploramos y que ponen de relieve, á la vez que sus relevantes méritos, el favor que Dios nos otorgó proporcionándonos la amistad y cariño de una persona de tanta valía. Y esto es lo que experimento en mí, al tratar de D. Miguel Cuní y Martorell; y por tal motivo, cuando por acuerdo de la Junta directiva de nuestra Real Academia, y con el fin de cumplimentar los estatutos porque ésta se rige, se determinó que, á la mayor brevedad posible, debían hacerse las necrologías de nuestros compañeros fallecidos, que no hubiesen sido ya objeto de tan merecida prescripción reglamentaria, no titubeé ni un momento para determinarme á escribir la de tan distinguido académico numerario de esta Corporación como era Cuní, fiado, más bien que en mis escasos medios y falta de competencia para hacer resaltar como se merece su dignísima personalidad, en el cúmulo de elementos que me proporcionaría la sola enumeración, siquiera compendiada, de lo verificado por aquélla y el mucho afecto que mútuamente nos profesábamos, pues no es hipérbole el asegurar que nuestro recíproco cariño era verdaderamente fraternal. No obstante, lo indicado no ha de ocasionar alteración alguna en el juicio que merezca cuanto voy á exponer acerca de las circunstancias personales y manifestaciones científicas de mi biografiado, pues para sustraerme á todo espíritu de parcialidad á que me pudiera inducir el aprecio que le tenía, me circunscribiré á referir hechos debidamente comprobados, absteniéndome, en cuanto pueda, de todo comentario, dejando que el ilustrado criterio de los demás forme el verdadero concepto que resulte del sencillo relato que voy á exponer, si bien como mío incompleto y mal hilvanado, sobre lo que fué el finado y lo mucho que hizo en pró de la Ciencia.

Nació Cuní y Martorell en la próxima y pintoresca villa de Calella, en mayo

de 1827; su padre se dedicaba al comercio, y en el año 1834, por efecto de la guerra intestina de sucesión, que tantos males ocasionó á nuestra patria, hubo de trasladarse toda la familia á Barcelona, yéndose el jefe de la misma, algún tiempo después, á América, por asuntos de su profesión. El niño Cuní se educó en un colegio de esta ciudad, estudió idiomas, especialmente el francés y el inglés, y como hijo de comerciante que era, le dedicaron también al comercio, á pesar de su decidida vocación por los estudios científicos, pues él mismo me confesó más de una vez, que se consideraba con mayor idoneidad para seguir una carrera científica, que para comerciante, y de cuyo verdadero concepto dió gallardas muestras más tarde, como se verá luego. Esto, sin embargo, no fué óbice para que el joven Cuní cumpliera como bueno, siendo siempre un modelo de honradez, al par que esclavo de su obligación en el puesto que se le asignaba, y cuando su padre regresó de América se unió con él, interesándose ambos en un negocio comercial común.

Murió el autor de sus días en 1859, continuando nuestro amigo en su cometido; pero como no tenía ambición alguna lucrativa, siendo joven todavía, tan luego como pudo contar con elementos suficientes para sufragar con holgura los gastos que pudiera ocasionarle su modesta y bien ordenada familia, que entonces la constituían su madre y dos hermanas, se retiró de los negocios comerciales, poniendo todo su conato en procurar especialmente la felicidad de los seres á quienes había deparado la suerte de tenerle por hijo y hermano, pasando los cuatro meses más crudos del invierno en Barcelona y los restantes de primavera, verano y otoño en Calella, su villa natal (cuya costumbre conservan todavía sus hermanas) y allí, lejos del bullicio de la ciudad, cultivando las flores de su jardín, oyendo el armonioso canto de los pajarillos, haciendo excursiones para contemplar poco menos que extasiado y más de cerca ese bello y admirable conjunto que constituye la creación, encontró, según aseguraba, los placeres más deliciosos de su vida.

Murió su buena madre, y mi biografiado, aunque en edad bastante adelantada, con el fin de tener sucesión, resolvió contraer matrimonio, pero, según él mismo dice en una carta dirigida al Rdo. Padre Navás, no logró lo que deseaba, si bien termina la mentada epístola con la frase: «Cúmplase la voluntad de Dios», que refleja bien á las claras la cristiana resignación de su autor.

Agréguese á lo indicado que Cuní observó siempre una vida metódica y ejemplar; pues sobre haber sabido sustraerse á todo género de vicios y distracciones mundanas, no frecuentaba jamás cafés ni casinos, era muy madrugador y nunca, ni aún de joven, salió de su casa por la noche, á no ser que le obligase á ello algún asunto de gran interés; y todos sus actos y escritos revelan de modo muy manifiesto, un alto fin moral.

Por cuanto de una manera sucinta acabo de exponer, acerca de las condiciones sociales, género de vida é inclinaciones de nuestro difunto compañero, se comprende fácilmente que no habiendo traspasado, apenas, los límites de lo que se acostumbra á llamar primavera de la vida, ó cuando menos siendo aún bastante joven, se halló en circunstancias que le permitieron dar rienda suelta á su fantasía

y obtener el logro de sus más fervientes deseos, que no eran sino poder apreciar debidamente, y contemplar gozoso, la armonía que reina en la obra del Criador, para lo cual se dedicó con gran entusiasmo al estudio de la Historia Natural, ciencia que, según tuve ocasión de afirmar en un acto académico, verificado en este mismo recinto, no hay otra humana que la sobrepuje en importancia, riqueza y atractivo.

Para conseguir su anhelo, lejos de sumirse en la ociosidad, como hacen tantos otros, que una vez han alcanzado cierta posición económica se abandonan y no piensan sino en el tranquilo goce de la misma, nuestro querido amigo, cuya grande alma jamás se halló, ni con mucho, satisfecha en los estrechos límites de las tareas comerciales, pues presentía otros más dilatados horizontes, estudió con gran provecho Botánica y Zoología, no proponiéndose obtener un título universitario, que para nada necesitaba, sino á fin de apreciar por sí mismo, y con conocimiento de causa, lo que en su imaginación se había forjado digno de ser sujeto de estudio, previendo ya, desde un principio, que su trabajo, sobre llenar sus más vehementes aspiraciones, podía ser útil á la Ciencia y á sus semejantes, como en realidad así ha sucedido.

Pertrechado ya con un buen caudal de conocimientos de Zoología y Fitología, dedicóse con ardor á las investigaciones botánicas, y muy especialmente al estudio de nuestra fauna entomológica, á la cual acabó por consagrar todos sus afanes; y durante más de 30 años se vé á Cuní recorrer con febril entusiasmo la mayoría de comarcas y poblaciones que componen particularmente las provincias de Barcelona y Gerona, no dejando de escudriñar, con gran avidez en sus numerosas excursiones científicas, lugar ni rincón que le pudieran proporcionar insectos para aumentar su colección entomológica, que llegó á ser riquísima en especies, sobre todo de lepidópteros y coleópteros, así como también el hallazgo de otras nuevas, á la vez que determinar las múltiples formas, evoluciones y notabilísimas costumbres, poco conocidas, de varios exápodos; para todo lo cual poseía nuestro amigo suma agilidad, pudiendo decirse que su aparato locomotor durante muchos años fué incansable; tenía privilegiada inteligencia, una paciencia á toda prueba y estaba dotado, además, de tan gran espíritu analítico, que muy pocos podrán igualarle.

Los gastos que le ocasionaban las excursiones, medios para poder cazar insectos, preparación y conservación de ejemplares y la adquisición de libros (llegó á reunir una importantísima biblioteca entomológica), los solventaba desahogadamente, según él decía, á veces, hasta en tono casi de broma, con lo que ahorraba no concurriendo á teatros, cafés ú otras distracciones, que aseguraba ninguna falta le hacían.

Con tales elementos y actividades no podía menos de ser meritísima su labor personal para agrandar el radio de la esfera de conocimientos entomológicos en nuestra patria y fuera de España; y á semejanza de los servicios que prestaron á la Ciencia en otra época, Luis Geoffroy escribiendo la «Historia abreviada de los

insectos de las cercanías de Paris»; Scheler describiendo los «insectos de los alrededores de Ratisbona»; Schank con su «Enumeratio insectorum Austriæ indigenarum»; y tantos otros sabios que se manifestaron infatigables para precisar y popularizar el conocimiento de los exápodos. Cuní en nuestros días, poniendo á contribución los potentes medios de observación y análisis, que prestan la física y química modernas para adquirir y extender los conocimientos biológicos, y de cuyos medios carecían aquellos autores, hace otro tanto, pero, como se comprenderá facilmente, con más completos y precisos resultados, por lo que respecta á la fauna entomológica española, con particularidad en lo concerniente á la catalana; y en 1874 publica ya el «Catálogo razonado de los Lepidópteros que se encuentran en los alrededores de Barcelona, pueblos cercanos y otros lugares de Cataluña», con la indicación de las épocas en que aparecen las mariposas, modo de cogerlas, instrucciones sobre la manera de criarlas y otros importantísimos datos; más tarde, y en colaboración de D. Manuel Martorell y Peña, da á luz otro Catálogo metódico razonado, y con grabados, de los Coleópteros observados en Cataluña. Escribió en 1884 la flora de Calella; después la fauna entomológica de dicha comarca; además, sobre los insectos observados en los alrededores de Barcelona; Excursión entomológica y botánica á la Cerdaña española; otra excursión análoga á San Miguel del Fay, Arbucias y cumbres del Montseny; Resultado de una exploración entomológica y botánica por el término de La Garriga; descubrió varias especies de insectos: unas que se ignoraba formasen parte de la fauna catalana, como por ejemplo, el Neuróptero *Urothemis advena*, Selys; otras completamente nuevas para la Ciencia, algunas de las cuales le dedicaron distinguidos naturalistas nacionales y extranjeros, v. gr.: el *Ephippigera Cunii*, Ortóptero que le fué dedicado por el eminente entomólogo español y apreciadísimo amigo nuestro D. Ignacio Bolívar, el Neuróptero *Ascalaphus Cunii* que le dedicó asimismo el sabio naturalista M. Selys, etc.

Son también muy notables sus publicaciones, á consecuencia del gran número de conocimientos entomológicos que han difundido, á la vez que por la belleza y sencillez de su ameno y peculiar estilo (Cuní tuvo la verdadera habilidad de enseñar deleitando) que las hace altamente útiles desde el punto de vista práctico: Las 4 estacións del any, segons llurs plantas é insectes mes caracterisats en la baixa Catalunya; Llissons teórico-prácticas de Entomología; Una excursió entomológica y botánica á Montserrat; Vuit dies á Camprodón, excursió entomológica y botánica; Una excursió entomológica sense sortir de casa; varios trabajos científico-prácticos publicados en el «Art del Pagés»; notas de insectos nuevos ó poco conocidos publicadas asimismo en los «Anales de la Real Sociedad española de Historia Natural»; y en fin (como afirma muy acertadamente el autor de otra Necrología de D. Miguel Cuní y Martorell, que se leyó en junio de 1902 en una sesión de la Sociedad aragonesa de Ciencias natarales), fueron fruto de sus excursiones numerosos artículos y opúsculos que en varias revistas ó separadamente publicaba.

Obrero tan inteligente y laborioso, cuyo utilísimo trabajo contribuía en gran

manera á la construcción del actual edificio científico, hubo de ser necesariamente conocido por cuantos dedicaban sus actividades é inteligencia á los estudios histórico-naturales, y codiciada su cooperación por las sociedades que se proponen como objeto principal el cultivo de los mentados estudios. Esto explica fácilmente el que, á pesar de la grandísima y hasta puede decirse excesiva modestia, de Cuní, se estableciera frecuente é íntima comunicación entre él y casi todos los entomólogos más notables de Europa, á quienes consultaba y por los que era á su vez consultado, sobre la determinación de ciertas especies de insectos raros ó no conocidos; pudiendo asegurarse que, especialmente en los dos últimos lustros de la existencia de nuestro sabio compañero, no venía á Barcelona naturalista alguno distinguido que no se considerase obligado á visitarle, no solamente para evidenciarle la muchísima consideración de que era merecedor, sino también con el fin de ilustrarse con los datos científico-prácticos que siempre proporcionaba, y admirar además sus ricas al par que bien dispuestas colecciones regionales de Lepidópteros, Coleópteros y Arágnidos. Por idénticos motivos no es de extrañar, que sin ostentar mi biografiado título profesional alguno, la Real Sociedad española de Historia Natural, la Sociedad Entomológica de Francia, la de igual denominación de Bélgica y otras sabias Corporaciones, se considerasen honradas nombrándole su socio activo ó correspondiente, así como también que nuestra Real Academia le eligiese en 14 de noviembre de 1883 académico numerario, de cuyo cargo tomó posesión en 9 de abril de 1884, y que desempeñó hasta que el Señor (pensando cristianamente), le llamó á su seno, con la brillantez que todos recordamos y podrá juzgar cualquiera por lo que someramente voy á indicar:

Entre los numerosos é importantísimos servicios prestados por él en nuestra Academia, durante los 18 años que fué miembro activo de la misma, merecen citarse de modo especial la lectura y publicación de las memorias: «Paseo entomológico por los alrededores de Barcelona», «Contribución á la fauna entomológica catalana», «Fauna entomológica de Calella, en la provincia de Barcelona», «Noticia de una especie nueva del orden de los Neurópteros, descubierta en Cataluña», y «Relación de las plantas con los insectos»; y no hay que decir que en todas ellas se reflejan cumplidamente el espíritu de investigación y analítico del autor, su incansable perseverancia en la observación y estudio preciso, á la vez que acabado, del sujeto; por cuyos motivos, al enterarse uno de los aludidos trabajos, no se sabe que admirar más: si el cúmulo de conocimientos entomológicos que proporcionan, ó la ilustración, paciencia y medios de que necesitó estar adornado quien los llevó á cabo.

Son asimismo notables sus luminosos dictámenes acerca de las obras: «Colección universal de animales insectívoros» y el «Protector de los pájaros», escritas respectivamente por D. Miguel Bleach y D. Félix Solá. Desempeñó con gran celo, durante diferentes bienios, el cargo de Secretario de la Sección de Historia Natural: enriqueció nuestra biblioteca académica regalando, con destino á la misma, ejemplares de gran parte de las obras que publicaba; dió asimismo para el

museo una colección de Ortópteros colocados en cuadros, y un Antipathes del Mediterráneo; preparó además para el propio museo otra colección de Lepidópteros, haciéndolo con tanto esmero y buen acierto que la Academia acordó, en sesión celebrada en 6 de mayo de 1899, darle por ello de una manera especial las gracias; finalmente, como coronamiento ó complemento de su utilísima labor académica, tan ilustre compañero manifestó al morir el gran cariño que profesaba á la Corporación de que había formado parte como socio activo durante cerca de cuatro lustros, legándole todos los libros científicos de su biblioteca, importantísima cómo llevo dicho; legado que consta nada menos que de 258 ejemplares entre obras y folletos, la mayor parte de inestimable valor científico, particularmente para el estudio de los insectos y determinación de especies entomológicas, puesto que, sobre todo algunos de los folletos, son verdaderas monografías.

Debe añadirse que para las demás sociedades científicas de las cuales formaba parte, trabajaba también de extraordinaria manera.

Entiendo ser bastante lo apuntado, sin entrar en más detalles, para formar cabal concepto de que el finado fué un académico de excepcional mérito y que su muerte ocasionó á nuestra Corporación, así como también á otras de que era socio, la pérdida de uno de sus más ilustrados y laboriosos individuos.

Si Cuní, por sus investigaciones y conocimientos entomológicos alcanzó notabilidad como hombre de gran saber, hasta el punto de ser citado su nombre en obras nacionales y extranjeras en el concepto de pertenecer á un verdadero sabio, no merece menos el calificativo de buen patricio y ferviente católico.

Que tuvo toda su vida un cariño extraordinario al país en que vió la luz y particularmente á Calella, su pueblo natal, nos lo demuestra, además de lo que llevo manifestado al relatar sucintamente su género de vida ó manera de vivir respecto á que hasta en sus últimos tiempos pasaba gran parte del año en la querida villa, como él la llamaba, y lo más crudo del invierno en Barcelona, el empeño que siempre puso para que los resultados científicos de su preclara inteligencia y laboriosidad fuesen sobre todo provechosos para la patria. En corroboración de este aserto bastará fundarse en dos hechos que lo evidencian, entre otros varios que pueden citarse: Todos sabemos que en esta Universidad se explican las asignaturas de la facultad de Ciencias hasta el grado de Licenciado, menos las correspondientes á la Sección de Naturales, omisión que, entre paréntesis, no tiene razón de ser dada la importacia de nuestro primer Centro docente, además de la predilección que hoy merecen á todas las naciones cultas los estudios comprendidos en dicha sección; por estos y otros motivos nos condolemos de ello cuantos tenemos afición á la ciencia llamada Historia Natural, ó más propiamente Historia de la Naturaleza; y he de permitirme, aunque sea por vía de digresión, hacer notar que en otra época, hará de esto treinta y tantos años, con el fin de subsanar tan lamentable omisión. se convocaron en Barcelona, y hubo reuniones, por cierto muy concurridas, de estudiantes y otras personas que tenían cariño á tal género de estudios, y no faltó quien se brindara al Gobierno para ex-

plicar gratuitamente una cualquiera de las asignaturas comprendidas en el período de la licenciatura de la mentada sección. No obstante, á pesar de las reiteradas gestiones que se hicieron, no se logró alcanzar tan laudable objetivo, fracaso debido á causas cuya enumeración no juzgo pertinente en estos momentos. Pues bien: por efecto de esta falta de estudios universitarios en nuestra ciudad, puede decirse ya desde larga fecha, los jóvenes que aquí se aficionan á los estudios histórico-naturales, que ciertamente no son pocos, han de trasladarse á Madrid si quieren seguir una carrera que llenaría sus deseos y aspiraciones; pero como raro es el que cuenta con medios para ello, sea por falta de recursos pecuniarios, ya porque, aun poseyéndolos, repugna á las familias desprenderse de sus hijos para que éstos, siendo todavía de edad muy temprana, vayan á estudiar á la Central, por múltiples motivos fáciles de comprender, resulta que son muy contados los que, residiendo sus familias en Cataluña, llegan á obtener el título de Licenciado ó Doctor en Ciencias Naturales, viéndose obligados la inmensa mayoría de los que seguirían con fruición y seguramente con aprovechamiento dicha carrera, á emprender otra ó dedicarse á diferentes ocupaciones. De ahí el que en este país decayera bastante el cultivo de la Zoología y Botánica, ramas de la Historia Natural que con verdadera lucidez fueron cultivadas por los catalanes. Viendo esto nuestro ilustre Cuní, dejándose llevar de sus sentimientos puramente altruistas, como dicen hoy, puso á contribución su potente inteligencia y los muchos medios que poseía, é hizo cuanto era dable para propagar en la juventud la afición á las excursiones científicas, fomentando el entusiasmo de los jóvenes mediante una buena dirección y los magníficos resultados científico-prácticos que de aquéllas se obtenían logrando de este modo formar una verdadera escuela, origen de la sociedad denominada «Institució Catalana de Historia Natural», que, según era de presumir, daría ópimos frutos para la Ciencia y sería en nuestro país el verdadero centro al cual acudirían cuantos deseasen y estuvieran en condiciones de desarrollar sus nacientes aficiones á los estudios histórico-naturales. Nadie podrá negar que con lo llevado á cabo por el esclarecido Cuní, en el concepto expuesto, prestó á su patria un eminente servicio; y tanto es así, que á consecuencia de ese despertar científico, son ya en gran número los hijos del país que actualmente dedican su inteligencia y actividades (y por cierto con utilísimos resultados) á estudiar la más frondosa, bella é importante rama del árbol de las ciencias.

Otro hecho, no menos laudable, pone de relieve el acendrado patriotismo de mi biografiado. Llevo ya indicado que su colección de insectos llegó á ser riquísima en especies regionales, sobre todo de Coleópteros y Lepidópteros, y logró también reunir otra bastante notable de Arágnidos, á la vez que un regular herbario. Estas colecciones, de inapreciable valor científico, singularmente la de insectos, porque contiene gran parte de las especies entomológicas de la fauna catalana, y que representaban en síntesis el producto de una asidua y provechosa labor de más de 30 años de la existencia del obrero que las había formado, constituían para él, si así puede decirse, el principal objeto del cariño de sus amo-

res por la Ciencia; mas como sabia lo mucho que habia tenido que hacer para reunirlas y tenía perfecto conocimiento de la gran utilidad científica de las mismas, sobre que cuantos las conocían se lo atestiguaban, guiándole solamente el mucho cariño que sentía por el país, le preocupó bastante cuando conoció que iba perdiendo sus energías, qué debía hacer con el fin de que el fruto de sus afanes quedase después de su muerte vinculado en España y no sirviera para enriquecer museos extranjeros. Por otra parte, como era sumamente cristiano, tenía gran afecto á las comunidades religiosas, y esto hacía que se hallara persuadido de que nadie como una de dichas entidades poseía condiciones para cuidar y conservar sus queridas colecciones. La cuestión para él era elegir la Corporación que ofreciera circunstancias mejores para que se efectuara su deseo, y creyó que las más apropiadas eran: ó la constituída por los discípulos de San Ignacio de Loyola ó por los de San José de Calasanz. Luchó algún tanto en su foro interno sobre cuál llenaría mejor el objetivo que se proponía y por fin juzgó, quizás con buen acierto, á pesar de que sentía gran predilección por la primera, que la segunda era más genuinamente española, y por consiguiente, evitaría con mayor cuidado el que aquellos objetos tan útiles salieran de España. Por esto legó al morir sus valiosas colecciones de insectos á los Padres Escolapios, y la de Arágnidos, á la vez que el herbario, á los Padres Jesuítas. Ya queda hecha mención del legado que destinó á nuestra Academia. Si los citados hechos no manifiestan claramente un verdadero amor á la patria por quien los realizó, que venga Dios y lo vea.

Era también un verdadero cristiano. Sin manifestar mojigatería (se le veía por lo común muy alegre, decidor y hasta chistoso, cuando menos, en el seno de la amistad) practicaba con suma escrupulosidad los preceptos de nuestra santa religión, de manera que, no solamente cumplía con exactitud, en cuanto le era posible, lo ordenado por la iglesia, sino que cabe asegurar se excedía en ocasiones: díganlo si no, entre otros muchos rasgos que podrían citarse y le caracterizan, el que durante su vida procuró evitar toda distracción supérflua; asistía con gran fervor á las funciones religiosas y aseguraba que le eran más gratas aquellas que por su forma convidaban al recogimiento, que los oficios solemnes en los cuales resonaba una nutrida orquesta; además, bastará decir que hasta el fin de su existencia, y eso que murió á los 75 años, ayunaba toda la cuaresma, desatendiendo las amonestaciones que en contrario le hacían muchas personas religiosas amigas suyas, porque juzgaban que á tan avanzada edad podía, con tal práctica, perjudicarse la salud.

Su ardiente piedad se refleja asimismo en todas sus publicaciones; proponiéndose con sus escritos, no tan sólo difundir la ciencia, sino un fin esencialmente moral, haciendo que los jóvenes que por su posición no estuvieran obligados al trabajo, se aficionasen á los gratos é inocentes estudios de la Botánica y Entomología, y ocupados en ellos les fuera más fácil abandonar los frívolos y afeminados pasatiempos que por lo regular degeneran en otras cosas peores» (son pro-

pias palabras suyas) (*), y aun no se fiaba de su buena y santa intención, sino que, por lo regular, antes de dar á luz sus opúsculos los hacía revisar por personas que á su juicio fuesen idóneas y además sacerdotes.

Agréguese á todo esto que fué sumamente amable, sencillo y humilde, y poseía un carácter tan bondadoso, que sobre ser pródigo en hacer favores, temía siempre agraviar á los demás, por cuyas circunstancias, cuantos tuvieron la fortuna de tratarle, aun sin querer, se veían precisados á quererle. Por consiguiente, en hecho de verdad, bien puede hacerse esta innegable afirmación: durante su vida no tuvo enemigo alguno, y al morir no dejó en el mundo sino amigos.

Concluiré manifestando que con mi sencillo y desaliñado trabajo necrológico me he propuesto: primero, cumplir un sagrado deber; luego, que el relato de hechos realizados por el finado y muy dignos para honrar su memoria, sirviera de lenitivo ó al menos mitigase algún tanto el sentimiento de pesar que aún hoy día aflige á sus deudos (algunos aquí presentes) por tan dolorosa separación; y por último, demostrar que con la muerte de mi llorado amigo, perdió la Ciencia un obrero de gran saber, preclara inteligencia y grandísima laboriosidad y, por lo tanto, de difícil substitución; nuestra Real Academia y otras Corporaciones científicas, un ilustre colaborador; la patria un excelente ciudadano digno de ser imitado; la religión un cristiano fervoroso; su familia el principal apoyo; cuantos le conocieron un sincero y leal amigo.

Si no he conseguido el propósito, cúlpese á mi pobreza de ingenio, nunca á mi falta de buena voluntad y cariño, que lo fué grande, por D. Miguel Cuní y Martorell, y mucho menos á su carencia de eminentes méritos que bien sabéis cuántos y en cuán alto grado los poseía

---

Dió fin al acto el Sr. Presidente pronunciando las siguientes frases:

Señores:

Al llevar en estos momentos la voz de la Academia, creo interpretar fielmente sus sentimientos, dirigiendo, ante todo, palabras de gratitud hacia las autoridades que nos honran con su presencia, hacia las corporaciones tan dignamente representadas en este acto, y hacia el escogido público, en general, que acude solícito á él para rendir un testimonio de afecto, consideración y respeto á la labor que se realiza en esta casa, en pró de la cultura del país y del progreso de la Ciencia.

Hoy por segunda vez en este curso venimos aquí á cumplir un deber del

(*) Carta dirigida al P. Navás, de la Sociedad de Jesús, en abril de 1899.

corazón y del reglamento. Venimos á honrar la memoria del que fué nuestro antiguo consocio, el distinguido entomólogo D. Miguel Cuní y Martorell.

No he de insistir, señores, en los diferentes puntos de vista, tan magistralmente desarrollados, respecto á la personalidad del Sr. Cuní. por el Dr. Mir y Navarro, cuya labor todos hemos oído con interés y aplaudido con justicia. Yo sólo me permitiré trasladaros en brevísimas palabras, mis impresiones personales, recojidas en los pocos años en que tuve el honor de conocer y tratar al Sr. Cuní, como miembro de esta Academia.

Era el Sr. Cuní y Martorell un espíritu sereno y apacible, que se hallaba tiernamente enamorado de la naturaleza. En sus maneras y semblante mostrábanse, desde luego, la condición modesta y sencilla de su caracter, y el curso tranquilo de su vida, que á manera de manso y tímido arroyuelo. deslizábase, suavemente, á través del tiempo, sin agitación ni sobresaltos. Tan lejos, por su posición modesta, pero desahogada de los anhelos de la necesidad, como de las preocupaciones de la opulencia, hallábase rodeado por aquel ambiente de áurea medianía que tan favorable fué para el desonvolvimiento de las cualidades de su espíritu, y que tanto contribuyó á mantenerle en el perfecto y armónico equilibrio de sus facultades y sentimientos. Una feliz circunstancia, la amistad trabada con un distinguido naturalista alemán, inclinóle al cultivo de la entomología, despertando en él aficiones que tan de acuerdo se hallaban con el conjunto, de sus prendas de caracter. Fruto de esta nueva labor de su tranquila existencia fué la recolección de interesantes ejemplares, y el hallazgo á la vez de algunas especies desconocidas. En relación con sabios nacionales y extranjeros que cultivaban también aquella rama especial de la Zoología, todos hubieron de apreciar el mérito relevante de nuestro antiguo compañero, y tuvieron la atención de dedicarle ciertas especies, por ellos descubiertas, como justo tributo rendido á su laboriosidad y talento.

Bien hace hoy la Academia en honrar su memoria, enviando á la vez á sus virtuosas viuda, hermanas y demás familia la manifestación de su particular afecto, que á la vez que testimonio ofrecido al recuerdo del que fué un día nuestro bondadoso compañero y querido amigo, ha de ser también bálsamo de consolación, que mitigue en parte la pena natural que sufren, por la pérdida irreparable que, tanto ellas como nosotros, hemos experimentado.

Grabados quedarán en nuestra memoria los ejemplos de laboriosidad, de virtud y patriotismo que nos ha legado en su modesta y tranquila existencia el señor Cuní; ellos desde el acta de esta sesión extraordinaria que á su memoria se consagra, y sus libros desde el fondo de nuestra biblioteca, pregonarán á las generaciones que nos sucedan el paso por esta Academia de un hombre modesto y bien equilibrado, en cuyo espíritu hermanábanse y confundiánse, sin conflictos de ninguna especie, el amor á la Religión y el amor á la Ciencia; la aspiración á la suprema Verdad, á la suprema Belleza y al sumo Bien.

٢٩٤١

MEMORIAS

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS Y ARTES

DE BARCELONA

TERCERA ÉPOCA — VOL. VII. NÚM. 13

NOTAS SOBRE EL TERREMOTO DE MESINA

DEL 28 DE DICIEMBRE DE 1908

REGISTRADO EN EL OBSERVATORIO FABRA

ESTADÍSTICA SISMOLÓGICA DE 1908

(OBSERVATORIO FABRA)

OBSERVACIONES SÍSMICAS

EFECTUADAS DURANTE EL AÑO 1908

POR EL ACADÉMICO

D. JOSÉ COMAS SOLÁ

LIBRARY
DEC
UNIVERSITY OF TORONTO

Publicada en abril de 1909

BARCELONA

A. LÓPEZ ROBERT, IMPRESOR. — CONDE DEL ASALTO, 63

1909

522a

NOTA SOBRE EL TERREMOTO DE MESINA

DEL 28 DE DICIEMBRE DE 1908

REGISTRADO EN EL OBSERVATORIO FABRA

por el Académico

D. JOSÉ COMAS SOLÁ

Sesión del día 21 de enero de 1909

A las $4^h\,23^m\,50^s$ del 28 de diciembre de 1908 (t. m. de Gr.), los microsismógrafos del Observatorio Fabra comenzaron á registrar los movimientos precursores de un violento terremoto lejano. Transcurridos $2^m\,19^s$, se iniciaron ondas de considerable amplitud, que supuse, en principio, correspondían á la segunda fase, ó en otras palabras, á las vibraciones transversales. A las $4^h\,30^m$, la máxima fase (la «haupphause» de los alemanes) alcanzaba su mayor intensidad, con oscilaciones de 21″, 4 para el péndulo vertical del microsismometrógrafo de Cancani; el período de oscilación fué de 10 á 12 segundos para estos grandes movimientos, por consiguiente, bien distinto del período de oscilación pendular del Cancani (3,5 segundos). A este grupo de grandes ondas sucedieron unos 10 grupos más, cada vez decrecientes en intensidad, terminando el movimento á las 5^h aproximadamente para este instrumento, cuyo sismograma es de una limpieza exquisita. Los movimientos fueron también muy bien registrados por la componente vertical del Vicentini, pero muy poco en las componentes horizontales del mismo, probablemente por una falta accidental de sensibilidad. Para esta componente vertical, la duración del terremoto fué de 58^m poco más ó menos.

Como de costumbre, mandé pasar inmediatamente nota á la prensa local, indicando al propio tiempo la distancia teórica á que debía hallarse el epicentro de este Observatorio. Esta distancia la calculé apoyándome en el tiempo transcurrido entre los primeros temblores y la iniciación de la segunda fase, sirviéndome de la fórmula empírica de Laska, aplicable, según su autor, á distancias comprendidas entre 500 y 14.000 kilómetros. La única duda que cabía en este cálculo era de si, en realidad, la iniciación de las primeras grandes ondas correspondía á la segunda fase. Habiendo comparado los sismogramas del Observatorio Fabra con otros anteriores, y en especial con el de un terremoto de la Rumelia, registrado en Roma por el malogrado sismólogo Cancani, saqué la consecuencia de que era altamente probable de que se trataba, en efecto, de las oscilaciones de la segunda fase. Re-

presentando la distancia consabida en megámetros y la diferencia de tiempo en minutos, la fórmula de Laska se expresa por $(t_2 - t_1 - 1) = l$, siendo l dicha distancia. El resultado fué 1 320 km., y así se publicó en la prensa local de Barcelona. Inspeccionando en el mapa de Europa qué puntos, á tal distancia de Barcelona, ofrecen caracteres de sismicidad notable, vacilé entre los Balkanes, la Calabria y la Argelia; y teniendo en cuenta la frecuencia de violentos terremotos que ocurren en los Balkanes, de origen tectónico, y cuyas oscilaciones se trasmiten á grandes distancias, mientras los de Calabria y Sicilia son de origen volcánico por lo común y por consiguiente de área de conmoción reducida; no olvidando, además, que la intensidad de las oscilaciones registradas era excepcional, supuse en fin que el epicentro debía hallarse probablemente en los Balkanes, ó cuando menos en territorio de la Albania, ó Alpes albaneses. Así lo comuniqué á la prensa y en forma dubitativa. La realidad aclaró las dudas.

El terremoto se había realizado y había sido horroroso, estando situado su epicentro en el estrecho de Mesina; la distancia epicentral resultaba ser sensiblemente de 1.200 kilómetros.

El error cometido es relativamente de muy poca cuantía; no obstante, juzgo de interés fijarnos un momento en esta diferencia que se revela entre el cálculo y la realidad.

Desde luego, las fórmulas de Omori dejan un vacío entre distancias de 1.000 y 2.000 km., haciéndose inaplicables á nuestro caso. Ensayé luego otras fórmulas, suponiendo que las primeras grandes oscilaciones no correspondían á la iniciación de la segunda fase sino á la de la tercera. A este objeto, apliqué las fórmulas de Omori y de Sttiatessi, siendo los resultados inaceptables; solamente, una fórmula, la de Jordan, dió un valor aproximado de la distancia epicentral, pero el error resultaba esta vez en defecto. En resumen, que ninguna expresión empírica da para este terrible terremoto un resultado aceptable, por lo menos tratándose de la distancia de 1.200 km. que nos separa de Mesina. De momento, es imposible dar más extensión al estudio de esta anomalía porque faltan elementos ú observaciones para dilucidar el asunto. Los únicos datos que hasta ahora conozco, á más de los del Observatorio Fabra, son los del Parque de Saint-Maur (París), los de Leipzig y los del Observatorio de Tortosa, no constando en estos últimos (C. R. de la Academia de Ciencias de París, sesión del 4 de enero de 1909) el principio de la segunda fase. Por lo demás, es de suponer que esta tremenda tempestad subterránea podrá estudiarse con excepcional perfección, por cuanto mi sabio colega, el Sr. Oddone, de la Universidad de Pavía y encargado técnico en la Oficina central sismológica de Estrasburgo, pudo llegar á Mesina el día 1 de enero y penetrar, saltando por una de las ventanas del Observatorio, en el sótano de la instalación sísmica del mismo, donde encontró intacto, por fortuna, el sismograma del Vicentini (instrumento gemelo del que existe en el Observatorio Fabra) y que marcó todos los movimientos precursores y el tiempo hasta el momento de las terribles sacudidas que aterraron Mesina. Esta hoja, si su conser-

vación ha sido posible, como es de suponer, constituirá un documento preciosísimo para el estudio de dicho fenómeno, desde el punto de vista de los movimientos preliminares y del conocimiento exacto de la hora en que se inició la primera sacudida desastrosa en el epicentro, dato este último hace que falta casi siempre tratándose de terribles terremotos.

En fin, escribí á raiz del suceso, al académico corresponsal de nuestra Academia, Sr. A. Riccó, director del Observatorio de Catania, no sólo en demanda de datos, sino suplicándole noticias referentes á su familia y á los Sres. Rizzo y Guzzanti, directores respectivamente de las estaciones sísmicas de Mesina y de Mineo. Hasta este momento (1), no he recibido ninguna noticia, por más que por otros conductos he podido enterarme de que el Sr. Rizzo vive por fortuna; por lo que se refiere al Sr. Riccó, creo inútil decir que no sufrió directamente daño personal alguno del desastre, por cuanto, en Catania, el movimiento sólo produjo pánico.

El terremoto de Mesina, registrado en Barcelona, ofrece, además, una circunstancia importante desde el punto de vista científico.

Es común repetir que los movimientos precursores se propagan por el magma interno de la Tierra, y que, suponiendo que la conmoción se extiende en ondas esféricas, estos movimientos precursores recorren la cuerda que separa el epicentro del punto de observación; además, de conformidad con las leyes de la elasticidad, estas vibraciones internas se desdoblarían en dos categorías: vibraciones longitudinales (primeros movimientos precursores) y vibraciones transversales (segundos movimientos precursores). Pero la hipótesis de ondas esféricas y de propagación uniforme, aún cuando resulta confirmada sensiblemente por la práctica, no es satisfactoria en atención á que su velocidad de propagación exigiría una rigidez en el magma interno de la Tierra doble de la del acero, y á un líquido, aunque se le sujete á una presión de algunos millones de atmósferas, de ninguna manera puede atribuírsele tal rigidez. En los grandes fondos oceánicos, cuya presión hidrostática se eleva á más de 600 atmósferas, no constituye ningún obstáculo la enormidad de esa presión para que los seres vivientes que en su fondo pululan puedan moverse libremente; y aún cuando se multiplicara por 2 ó 3 mil esta compresión no alcanzaríamos con toda seguridad una cohesión ó rigidez comparable á la que exige la teoría. Algunos sismológos, especialmente japoneses, como Omori, Imamura, Kasukabe, etc., lo creen así, pero no son de la misma opinión la mayoría de los sismólogos europeos. Por lo demás, las observaciones teóricas de Kovesligety, aceptando una refracción sensible en las tra-

---

(1) Ayer, 20 enero, recibí una comunicación del Sr. Rizzo, de Mesina, en que me da cuenta de que él y su familia se han salvado de la catástrofe. Sigue á tan feliz noticia una solicitación de los datos registrados en el Observatorio Fabra para efectuar un estudio de dicho terremoto, á lo cual, inútil es decirlo, he accedido con la mayor satisfacción.

yectorías sísmicas y suponiendo que la densidad interna de la Tierra está sujeta á la ley de Roche, no han dado resultado en la práctica. No pretendo ahora profundizar más este punto, pues sería inoportuno en este instante, y pasaré á hacer algunas consideraciones sísmicas referentes á la situación de Mesina respecto de Barcelona.

Siendo la distancia que separa ambas poblaciones, medida sobre un arco de de círculo máximo de la esfera terrestre, igual á 1.200 Km., fácil es calcular que si el hipocentro se encuentra á 30 Km. de profundidad (término medio de la profundidad de los hipocentros), la profundidad máxima de la cuerda no es superior á unos 45 Km , cantidad, por consiguiente del mismo orden que la profundidad de los hipocentros. Suponiendo que el grado geotérmico sea de 30 metros, á unos 45 Km. de profundidad la temperatura será de unos 1.500° centigrados, temperatura incapaz de mantener fundidas las rocas de primera consolidación terrestre, lo que demuestra evidentemente que la trayectoría de las vibraciones no ha pasado por el magma.

De estos precedentes indiscutibles, considero legítimo sacar las siguientes conclusiones: 1.ª Los movimientos precursores, cuando menos los longitudinales, ó correspondientes á la primera fase, se generan y se propagan en las rocas más profundas de la litosfera, sin requerirse para ello la intervención del núcleo líquido interno. 2.ª En atención á la vaguedad todavía subsistente respecto á las leyes de la velocidad de la propagación de las ondas sísmicas, la propagación de los movimientos precursores entre un hipocentro y un punto de observación muy alejado, pudiera no propagarse por la cuerda, sino por la corteza de la Tierra á una profundidad relativa, pero siempre completamente diferenciadas de las ondas de superficie ó de Rayleigh, que como es sabido, son de propagación más lenta.

La discusión del terremoto de Mesina, cuando se posean todos los datos necesarios, permitirá aclarar con toda seguridad alguno de estos importantes puntos.

Prematuro también sería en este momento calificar con certeza la causa de este desastre. De momento, me atrevería á calificarlo de mixto, es decir, de tectónico y volcánico. Tectónico por lo que indudable tiene de orogénico el movimiento en una región como aquélla, profundamente dislocada; volcánico, porque los carácteres del volcanismo no pueden ser más evidentes en aquel país, y por la gran cantidad de réplicas que han sucedido al violento terremoto inicial. En fin, la intensidad inaudita que ha revestido el terremoto de Mesina del 28 y la amplitud de las oscilaciones registradas en el Observatorio Fabra, hasta ahora sin ejemplo en este establecimiento, contribuyen á hacer suponer que el terremoto ha sido directamente ocasionado por enormes conmociones á grandes profundidades, ó en otras palabras, que el hipocentro ha sido muy profundo, circunstancia que caracteriza los terremotos orogénicos.

Refiriéndonos á hechos observados en el Observatorio Fabra, debo hacer otras observaciones que juzgo muy importantes.

Es de notar, en efecto, que desde principios del octubre próximo pasado los llamados barosismos y que yo denomino siempre, por creerlo más propio, microsismos, han sido de una intensidad y constancia como nunca se había observado hasta ahora en el Observatorio. Bien pudiera calificarse todo este periodo, de unos tres meses de duración, de tempestad microsísmica.

Sin pretender establecer una relación segura, lo cierto es que hacia el periodo máximo de los microsismos de Barcelona (que se extendían sin duda en todo el Mediterráneo), tuvo lugar el terremoto de Mesina. Otra circunstancia notable: el terremoto de Mesina correspondió, dentro de un periodo álgido de microsismos, á un descenso brusco en la intensidad de éstos, fenómeno que se repitió poco antes del terremoto de V grado de Mercalli, de Florencia y Bolonia, ocurrido en la noche del 12 al 13 de enero, y que también se ha observado con motivo del terremoto de Zamarraga (prov. de Granada), ocurrido en la noche (?) del 19 al 20 de enero. Por el momento, me limito á citar el hecho y á poner de manifiesto la importancia del estudio de los microsismos, de los cuales se lleva una estadística rigurosa en el Observatorio Fabra.

El terremoto de Mesina, como era de prever, ha sido seguido por gran número de réplicas que todavía no han cesado, y ha repercutido á distancias grandes, produciendo el desencadenamiento de algunos terremotos sensibles, como los de Argella, la propia Italia, España, Portugal, Azores, etc.

Considerando que cerca de Barcelona existe un distrito volcánico importante, escribí al Sr. Alcalde de Olot, suplicándole noticias referentes á los fenómenos que se hubiesen podido observar en aquella región. La contestación de dicho señor fué de que nada anormal se había observado en aquella localidad.

Por otra parte, me enteré por la prensa local de que en Bañolas había ocurrido una *lluvia de cenizas,* fenómeno que, según se aseguraba en dichos informes, ocurría siempre que tenía lugar algún fenómeno sísmico importante. Para saber á qué atenerme sobre el particular, escribí al Sr. Alcalde de Bañolas, quien con la mayor amabilidad me contestó que en dicha información periodística había un error, pues no se trataba de lluvia de ceniza (*pluja de cendra*, en catalán) sino *puja de cendra* (ascenso de ceniza), fenómeno especial que se observa con cierta frecuencia en el *Estanyol de la Cendra,* sin que este fenómeno coincida precisamente con fenómenos sísmicos. Este ascenso ó subida de la llamada ceniza, en realidad consiste en una eyección de lodo que se efectúa en el fondo del Estanyol. Precisamente de este Estanyol habló nuestro distinguido compañero don Luis M. Vidal en su reciente estudio sobre el lago de Bañolas, y á él me remito por cuantos caracteres geológicos se refieran á dicha localidad. Lo cierto es que el fenómeno descrito se observó el día 31 de diciembre, tres días después del desastre de Mesina. Me limito únicamente á citar el hecho.

Muy de desear sería, y lo he publicado en diferentes sitios, que cuantos tu-

vieran conocimiento de cualquier fenómeno especial de esta índole que ocurriera en nuestra región, se sirviera comunicarlo al Observatorio Fabra. Es verdaderamente lamentable esta escasez de información tratándose de una región que, como Cataluña, tiene indudablemente importancia sísmica.

Es posible que en otra nota pueda completar y discutir todos los resultados adquiridos referentes al horrible terremoto que ha asolado Mesina y otras poblaciones vecinas.

ESTADÍSTICA SISMOLÓGICA DE 1908

Observatorio Fabra (Barcelona)

Durante el año 1908 han funcionado regularmente y sin interrupción el microsismógrafo de tres componentes de Vicentini y el microsismometrógrafo á grande velocidad de dos componentes horizontales, de Cancani.

Para cuantos detalles se refieren á estos aparatos, véase «Estadística sismológica de 1907, en Barcelona (Observatorio Fabra)», publicada asimismo por la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona.

Los elementos de los microsismógrafos citados han sido sensiblemente los mismos que los del año pasado. Los reproduzco aquí:

Microsismógrafo de Vicentini

Longitud de la plomada	1,20 metros.
Peso de la masa de plomo.	100 kgs.
Amplificación de la comp. horizontal E. W.	75 veces.
Amplificación de la comp. horizontal N. S.	82 veces.
Longitud de la barra horizontal.	1,28 metros.
Peso de la masa de plomo	50 kgs.
Amplificación de la comp. vertical. . . .	158 veces.
Velocidad del papel	30 cm por hora.
Dirección de las comp. horizontales. . . .	NS. y EW.

Microsismometrógrafo de Cancani

Longitud de la plomada	3,60 metros.
Peso de la masa de plomo.	220 kgs.
Amplificación de ambas comp. horizontales.	17,3 veces.
Velocidad del papel.	2,20 metros por hora.
Dirección de las comp..	NE-SW y SE-NW.

Durante el año 1908, se han registrado en el Observatorio Fabra los siguientes desastrosos movimientos lejanos: 9 enero: epicentro desconocido; 26-27 marzo: epicentro en Chilapa, Méjico; 27 marzo: réplica probablemente del anterior; 2 abril: epicentro desconocido; 23 abril: epicentro desconocido; 1 julio: movimiento dudoso y epicentro desconocido; 4 agosto: epicentro en Argelia; 16 agosto: epicentro desconocido; 17 octubre: movimiento dudoso, epicentro desconocido; 19 noviembre: movimiento dudoso, epicentro desconocido; 12-13 diciembre: indicios de grandes movimientos lejanos; 28 diciembre: epicentro en Mesina:

En cuanto á movimientos próximos y locales, se han registrado 36, si bien puede existir cierta vaguedad en este número por efecto de los microsismos, que unas veces pueden parecernos sacudidas próximas, así como, por su frecuencia, pueden ocultar ó disimular otras veces las leves sacudidas locales. El más notable de los movimientos de epicentro próximo fué el del 26 de marzo, que alcanzó el grado VI de Mercalli y cuyo epicentro estuvo emplazado en la sierra que separa la comarca del Vallés del Campo de Tarragona. Otro movimiento importante por su proximidad fué el del 10 de noviembre, de grado IV, percibido en Lladó, provincia de Gerona, á las $5^h\ 30^m$, de área epicentral muy reducida. El mayor número de terremotos locales corresponde al mes de marzo (8) y el menor al mes de julio, en que no hubo ninguno.

El terremoto lejano más importante ha sido el que tuvo el epicentro en Mesina, el 28 de diciembre. (Véase la Nota aparte que tuve oportunamente el honor de comunicar á esta Academia).

Desde el punto de vista sísmico, el año 1908 ha sido indudablemente uno de los más notables, y lo ha sido, en mi concepto, por las estrechas relaciones que considero haberse manifestado con toda evidencia entre los microsismos y los demás movimientos endógenos, relación sobre la cual ya llamé la atención en la «estadística» del año pasado.

Los días con microsismos, en 1908, han sido 126, distribuídos en la forma siguiente:

Enero, 8; febrero, 9; marzo, 4; abril, 4; mayo, 1; julio, 12; julio, 24; agosto, 16; septiembre, 9; octubre, 4; noviembre, 12, diciembre, 23. En 1907, se registraron nada más que 57 días con microsismos.

La importancia mensual de los microsismos se mostrará mejor atendiendo al *valor total;* este valor lo he determinado por estima, en función de la intensidad y de la duración de cada día, considerando el número 10 como grado máximo de la escala convencional de valores. He aquí los resultados:

Enero	16	Julio	29
Febrero. . . .	47	Agosto	22
Marzo	33	Septiembre. . .	14
Abril.	10	Octubre. . . .	36
Mayo.	3	Noviembre. . .	42
Junio.	45	Diciembre . . .	132

Del conjunto de observaciones que he efectuado en 1908 pueden deducirse, por lo menos provisionalmente, las siguientes consecuencias, algunas de ellas desde luego evidentes: 1.ª Los movimientos sísmicos, en general, son más abundantes en invierno; el mínimo corresponde á los meses de mayo y junio; 2.ª Los movimien-

tos sísmicos, en general, son más abundantes por la noche, y dentro de la noche, hacia la madrugada; 3.ª La frecuencia de los movimientos próximos y locales corresponde á la frecuencia de los terremotos desastrosos lejanos; 4.ª Los terremotos próximos y locales suelen seguir á los terremotos desastrosos lejanos; 5.ª Los movimientos sísmicos, en general, son tanto más frecuentes cuanto más bruscas son las variaciones barométricas. 6.ª Ninguno de ellos guarda relación sensible con la temperatura, aparte de la distribución anual consignada más arriba; 7.ª Ninguno de ellos ofrece relación sensible con las fases de la Luna, el estado de la actividad solar, el magnetismo terrestre, etc.; 8.ª Los grandes y pequeños movimientos suelen ocurrir pocos días después de un período importante de microsismos.— Esta última consecuencia es dudosa; en caso afirmativo, su importancia sería capital; 9.ª Los microsismos, en especial, son más abundantes en los solsticios que en los equinoccios (esta ley que por primera vez formulé en 1907, se ha cumplido de la manera más perfecta en 1908).

La indicación que hice en 1907 sobre la hora en que ocurren los macrosismos locales (hacia las 16) se ha cumplido también, como una excepción local á la ley general indicada más arriba; en todo caso, esta excepción local no altera la generalidad de la citada ley.

Los microsismos, según el resultado de las observaciones de 1908, más que repercusiones de movimientos lejanos, deberían ser considerados como resultado de la actividad de una considerable cantidad de hipocentros distribuídos en la corteza terrestre, actividad que obedecería á un estado de desequilibrio general de la corteza terrestre producido por un trabajo de expansibilidad y de contracción de extensas regiones de la misma. Por ejemplo, me atrevería á afirmar que la excepcional tempestad microsísmica y macrosísmica que venimos registrando aquí desde el pasado octubre y que en estos momentos todavía dura, obedece á un trabajo lento y colosal de dislocación de la depresión mediterránea, que á su vez ha dado lugar á complicaciones volcánicas de consecuencias terribles. En efecto, esta gigantesca tempestad subterránea ha dejado tranquilos, por ejemplo, las regiones de los Andes y las regiones asiáticas del Pacífico y otras muchas muy lejanas. En cambio, viene sacudiendo casi sin interrupción las cadenas de montañas que limitan la cuenca mediterránea. Véanse las continuas sacudidas del Cáucaso, de los Balkanes, de los Alpes Ilíricos, de los Apeninos, de los Pirineos, de la Cordillera Bética y del Atlas. Y como centro de esta faja de hundimiento, tenemos la región volcánica calabro-siciliana rodeada por las mayores profundidades mediterráneas, ya que alcanzan más de 4.000 metros. Esta región, que bien pudiéramos calificar sísmicamente de *crítica*, ha sido quizás el foco de convergencia de esta manifestación dinámica, dando lugar como fenómeno máximo al terrible terremoto de Mesina del 28 de diciembre, que ha constituído el día más aciago que registra la historia de la humnanidad.

OBSERVACIONES SÍSMICAS

EFECTUADAS DURANTE EL AÑO 1908

Enero, 9 . . . . Hacia las 7^h 12^m, se manifiestan en el Vincenti muy largas oscilaciones, irregulares y de muy pequeña amplitud. Con repetidas interrupciónes, estos movimientos, que afectan exclusivamente á la componente NS, terminan hacia las 9^h 40^m. Se trata de la repercusión de un violento terremoto ocurrido á una distancia probablemente superior á 15 mil kilómetros. Durante las primeras horas de la noche del mismo día, se registran otra vez algunas leves oscilaciones, diseminadas, casi imperceptibles, y que pueden considerarse como una réplica del movimiento anterior.

Durante el resto de la semana, sólo se han observado algunos microsismos.

» 21 . . . . A las 12^h 37^m 48^s, se inicia en el Vicentini una serie de pequeñas oscilaciones que influyen sobre las tres componentes, y en especial sobre la EW. El movimiento, cuyo foco de conmoción no está muy lejos, dura unos 50 segundos. Probablemente, este movimiento es la repercusión de fuertes sacudidas que han ocurrido en diversas poblaciones de la Calabria (Italia).

» 29 y 30 . . Con mucha frecuencia durante estos dos días, se suceden numerosos temblores microscópicos.

Febrero, 3 y 4 . . Durante estos dos días, se registran, casi contínuamente, temblores microscópicos en las componentes NS. y vertical.

» 10 . . . A las 18^h 15^m 0^s, se inician pequeñas oscilaciones horizontales, que influyen sobre las dos componentes. La duración del movimiento es de 40 segundos.

» 11 . . . Microscópico movimiento, en la dirección EW, á las 8^h 8^m 10^s. Su duración no pasa de 10 segundos. (Vicentini).

» 11 . . . A las 21^h 19^m 52^s, se inician oscilaciones horizontales de cierta importancia, que se manifiestan en las dos componentes del Vicentini. Su duración es de 80 segundos.

Todos estos movimientos proceden de epicentros muy próximos al Observatorio.

» 20 . . . A las 16^h 30^m 8^s, se inician en el Vicentini microscópicas vibraciones que se transforman en anchos y cortos movi-

mientos á las $16^h\ 31^m\ 43^s$. Estas grandes oscilaciones terminan, simultáneamente con el temblor, al cabo de 22 segundos. El movimiento, que es de epicentro próximo, ha influído casi exclusivamente sobre la componente EW.

Febrero, 21, 22 y 23 Durante los días 21, 22 y 23, los microsismógrafos permanecen contínuamente intranquilos, registrándose repetidas desviaciones de la vertical, no acompañadas de microsismos.

» 24, 25 y 26 Desde las 22^h del 24 hasta las 4^h del 25, se registran en el microsismógrafo de Vicentini contínuos microsismos en la componente EW. En el microsismometrógrafo de Cancani, se manifiestan de una manera inusitada estos mismos microsismos, los cuales continúan más débilmente en el propio instrumento, los días 25 y 26.

» 27 . . . Durante la mañana del 27, se registran considerables y no periódicas desviaciones de la vertical.

Marzo, 7 . . . . Casi durante todo el día, el péndulo vertical de Cancani registra incesantes grupos de oscilaciones microsísmicas, principalmente en la dirección NE-SW.

» 8 . . . . A las $7^h\ 52^m\ 35^s$, empieza un microscópico movimiento horizontal, cuya duración no pasa de 25 segundos.

» 9 . . . . A las $21^h\ 37^m\ 37^s$, el microsismógrafo de Vicentini registra un movimiento microscópico que sólo se manifiesta en la componente NS. y cuya duración es poco inferior á 20 segundos.

» 9 . . . . A las $15^h\ 58^m\ 37^s$, el propio microsismógrafo registra un movimiento notable de epicentro poco lejano y que influye sobre las tres componentes. La duración total del movimiento es de $3^m\ 30^s$.

» 12 . . . . Movimiento horizontal pequeñísimo, que se manifiesta en las dos componentes, á las $9^h\ 53^m\ 13^s$. Su duración es de 15 segundos.

» 13 . . A las $16^h\ 29^m\ 30^s$, empieza una microscópica serie de oscilaciones en el sismógrafo de Vicentini, la cual termina á las $16^h\ 32^m\ 10^s$. Influye este movimiento sobre las tres componentes, y su epicentro está próximo.

» 16 y 17 . . En el propio sismógrafo de Vicentini, se registran supuestos barosismos desde las $7^h\ 30^m$ á las 9^h del día 17, especialmente en la componente EW. El microsismometógrafo de Cancani extiende de un modo notable estos supuestos barosismos, pues los registra desde las 16^h del día 16 hasta las 11^h del día 17, manifestándose la máxima acti-

vidad en la componente NW-SE.—Hay que notar la aparición de una intensa depresión barométrica en nuestra zona á partir del día 14, acompañada de fuerte oleaje en nuestras costas, la cual puede haber influído en los movimientos oscilatorios registrados en este Observatorio durante los días 16 y 17.

Marzo, 23. . . Desde las 3^h á las 24^h, se registran incesantes microsismos en ambas componentes horizontales.

» 26 . . . . A las 13^h 16^m 19^s, se inicia un notable terremoto de epicentro muy próximo, que influye muy principalmente en la componente vertical, poco en la EW. y es casi insensible en la NS. (Vicentini). Consta el movimiento de dos sacudidas, siendo la primera de menor intensidad que la segunda. La duración total del movimiento registrado ha sido de 44 segundos —Este terremoto ha sido inmediatamente confirmado por el maestro de Torredembarra (Tarragona), D. Federico Monserrat, quien me escribe que, á las 13^h 12^m, se percibieron en dicha población dos sacudidas muy sensibles (probablemente del grado V de Marcalli) acompañadas de ruídos subterráneos y de desprendimientos de burbujas gaseosas en un pozo de la propia población darante casi todo el día. Este terremoto es tanto más importante por coincidir casi con el siguiente movimiento intenso y lejano.

» 26 y 27 . . A las 23^h 17^m 30^s, se inician los temblores precursores de un violentísimo terremoto lejano que se manifiestan en la componente EW. y poco en la vertical. A las 23^h 50^m empiezan las grandes ondas, las cuales terminan á las 0^h 5^m del día 27. El movimiento cesa sensiblemente por completo á las 0^h 38^m. La duración total de este movimiento ha sido, por consiguiente, de 1^h 20^m. El epicentro de este desastroso terremoto ha debido tener lugar en un punto que dista 9.540 km. de Barcelona.

» 27 . . . . A las 4^h 12^m 20^s, se inician otros movimientos, precursores de una réplica del anterior terremoto (su distancia epicentral es la misma). A las 4^h 32^m, comienzan las grandes ondas, menos intensas que en el primer choque sísmico. A las 5^h 8^m, cesan las oscilaciones de este terremoto secundario, pero de gran violencia en su foco.

Nota.—El intenso terremoto lejano registrado á las 23^h 17^m 30^s del 26 y la réplica de las 4^h 12^m 20^s del día 27, de los que se ha dado oportuna cuenta y cuya distancia epicentral la

fijé teóricamente en 9.540 kilómetros, han sido confirmados, habiendo ocurrido tales desastrosos movimientos en Méjico, sobre todo en la población de Chilapa, cuya distancia ha resultado ser sensiblemente igual á la distancia teórica calculada.

Marzo, 31. . . . A las $16^h\ 44^m\ 43^s$, empieza un pequeñísimo movimiento horizontal que dura 55^s.

Abril, 1 . . . . A las $10^h\ 52^m\ 12^s$, se manifiesta un grupo de microscópicos temblores en la dirección EW. Su duración es de 88 segundos.

» 2 . . . . A las $6^h\ 20^m$ (hora incierta), se inician algunos grupos de largas oscilaciones en las componentes horizontales, las cuales duran 5 minutos. Es la repercusión de un lejano y violento terremoto, probablemente americano también, pero mucho menos intenso que los del 26 y 27.—A las $17^h\ 48^m\ 34^s$, se registran microscópicos movimientos horizontales durante 40 segundos.

Nota.—El terremoto local registrado en este Observatorio el 26 de marzo á las $13^h\ 16^m\ 19^s$, tuvo su epicentro, según noticias recibidas, especialmente del Alcalde de Valls y de diferentes vecinos de algunas poblaciones de aquélla región, hacia la sierra que separa la comarca del Vallés del campo de Tarragona. En Roda de Bará, por ejemplo, las sacudidas revistieron suficiente violencia para que los vecinos salieran de sus casas con espanto (grado VI de Mercalli), aunque sin registrarse desperfectos materiales en las construcciones. Es de notar la intensidad de los ruídos subterráneos, que fueron generales en dicha región, y probablemente perceptibles muy cerca de Barcelona.

» 5 y 6. . . Durante casi todo el día 5 y hasta las 10^h del día 6, se suceden en la componente EW., contínuos microsismos, relacionados, indudablemente en parte, con las grandes variaciones barométricas que en estas fechas se señalan en toda Europa.

» 23 . . . . A las $0^h\ 26^m\ 10^s$, empiezan anchas oscilaciones en la componente NS, las cuales se distribuyen en grupos. Termina el movimiento á las $0^h\ 48^m$. Se trata de la repercusión de un terremoto violento muy lejano, cuya distancia epicentral es imposible fijar por la ausencia de vibraciones precursoras en los sismogramas (Vicentini).

» 25 . . . . A las $0^h\ 24^m\ 20^s$, pequeño temblor local compuesto de dos

sacudidas, la primera menos intensa que la segunda; su duración total es de 15 segundos. Este movimiento sólo afecta à la componente vertical.

Abril, 25 . . . . Desde las $15^h\ 10^m$ á las $15^h\ 38^m$, la componente NS. registra contínuas oscilaciones irregulares, mezcladas con microsismos.

» 27 . . . . A las $17^h\ 31^m\ 50^s$, se reproducen los mismos movimientos irregulares, con microsismos, en la componente NS. Estas oscilaciones duran, en total, $4^m\ 35^s$.

Mayo, 9 . . . De las 20^h á las 24^h, se registran muy débiles microsismos en el microsismógrafo de gran velocidad ó de Cancani.

Junio, 15, 16, 17 y 18 Durante la noche del 15 al 16 y hasta medio día del 17, el microsismometrógrafo registra contínuas y microscópicas trepidaciones ó microsismos. Estos movimientos continúan con menor frecuencia durante el resto del día 17 y durante todo el día 18.

NOTA.—Por procederse á la limpia y reparación de sismógrafos, el sismometrógrafo no funcionó desde las $16^h\ 30^m$ del día 17 hasta las 19^h del propio día, y el microsismógrafo no ha funcionado desde las $16^h\ 30^m$ del día 17 hasta transcurrido el día 18.

» 19 y 20 . . Durante la noche del 19 y primeras horas de la mañana del 20 (hasta las 5^h), se registran contínuos microsismos en el sismometrógrafo y en el sismógrafo, y en las tres componentes. A las $15^h\ 30^m$ del día 20, empiezan rápidas oscilaciones microscópicas en la componente EW.; la duración total es de 6 minutos.

» 23 . . . . Durante todo este día, se registran con frecuencia muy acentuadas pulsaciones en la componente EW.

» 23 . . . . A las $11^h\ 15^m\ 0^s$, pequeño movimiento instrumental, que afecta á las dos componentes horizontales, y de epicentro próximo. Duración total del movimiento: 55 segundos.

» 26 . . . . A las 5^h y 15^m, se manifiestan irregulares y anómalas oscilaciones en la componente NS. del microsismógrafo durante 8 minutos.

» 27, 28, 29 y 30 Durante estos días se registran frecuentes grupos de movimientos irregulares, de cierta intensidad y de origen dudoso. Estos movimientos se manifiestan principalmente en la componente NS. Algunos de ellos coinciden con microscópicas oscilaciones de la componente vertical. La intensidad y frecuencia de tales movimientos han alcanzado su máximo el día 28.

Julio, 1 y 2 . . . Continúan los mismos movimientos débiles é irregulares.

» 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 Durante estos días se han repetido con inusitada frecuencia los mismos movimientos de la semana pasada. La máxima frecuencia de tales movimientos ocurrió el día 3 y la máxima intensidad el día 7. Los movimientos de este último día fueron excepcionalmente notables hácia las $13^h\ 0^m$, pues se registraron unos veinte choques en menos de 7 minutos, choques que influyeron con notable intensidad sobre las tres componentes. En general, se han manifestado estos movimientos sólo en la componente NS. Aunque ofrezcan caracteres anómalos, es indudable que el origen de dichos movimientos es geodinámico.

» 10, 11, 12, 13, 14, 15 y 16 Como en las dos semanas anteriores, todos los días se registran grupos de vibraciones irregulares en la dirección NS. acompañados muchos de ellos de pequeñas vibraciones en las demás componentes

El día 13, á las $12^h\ 0^m$, empieza una serie de microscópicos microsismos junto con otras oscilaciones irregulares de la misma naturaleza que las anteriores; termina el movimiento á las $13^h\ 21^m\ 15^s$. Esta clase de movimientos se repiten con frecuencia durante todo el día hasta las $0^h\ 5^m\ 15^s$ del 14, en que aparece un reducido grupo de microsismos.

» 19 . . . . Frecuentes microsismos desde las $0^h\ 45^m$ hasta las $3^h\ 15^m$. A las $13^h\ 40^m$, empieza una serie de oscilaciones de gran periodo y de pequeña amplitud que termina á las $14^h\ 20^m$. Este movimiento se reproduce á las $14^h\ 45^m$ con mayor intensidad, durando hasta las $20^h\ 15^m$, y termina por una serie de oscilaciones no tan marcadas. Estas oscilaciones, que pudieran ser repercusión de un intenso terremoto lejano, aparecen muy perturbadas y casi desfiguradas por continuos microsismos.

» 20 . . . . Los microsismos continúan durante toda la madrugada y desde las $20^h\ 20^m$ hasta las 21^h.

Además, desde el 17 al 23 inclusives, se registran con gran frecuencia los mismos movimientos irregulares que han sido señalados en las semanas anteriores.

» 24, 25, 26, 27,

» 28 y 29 . . Durante estos días continúan registrándose los movimientos irregulares de la componente NS. ya señalados en las semanas anteriores, pero con menor frecuencia é intensidad.

Agosto, 3. . . . Desde las $13^h\ 6^m\ 25^s$, se registran cuatro grupos de microsismos en la componente horizontal NS.

» 4 . . . . El día 4 del corriente se ha registrado en el Observatorio Fabra la repercusión de un violento terremoto relativamente próximo. Los movientos preliminares empiezan á á las $2^h\ 11^m\ 31^s$ y las grandes ondas $2^m\ 34^s$ después, siguen luego cuatro grupos de anchas ondas y termina el movimiento hacia las $2^h\ 24^m$. Este terremoto ha afectado casi exclusivamente á la componente horizontal NS.; la componente vertical señala ligerísimos trazos de oscilaciones. La distancia del Observatorio al epicentro, teóricamente, es de 858 kilómetros. Este teremoto, según noticias, ha ocurrido en Argelia, y el epicentro está probablemente situado en las cordilleras del Atlas, que separan las altas mesetas argelinas de las llanuras del Sahara.

» 6 . . . . A las $4^h\ 50^m\ 17^s$, empieza una serie de ondas ó pulsaciones muy dilatadas y poco regulares que llevan superpuestos incesantes microsismos. Este movimiento, que afecta exclusivamente á la componente horizontal NS., termina á las $5^h\ 43^m\ 45^s$.

Aparte de estos movimientos especiales, se manifiestan con gran frecuencia, aunque con débil intensidad, los movimientos irregulares señalados en semanas anteriores.

» 8 . . . . Desde las $11^h\ 45^s$ hasta las $11^h\ 57^m\ 30^s$, se registra una serie de oscilaciones irregulares que afectan á las tres componentes, especialmente á la horizontal NS. Este movimiento es de la misma naturaleza, aunque más intenso, que los registrados durante las últimas semanas.

» 9 . . . . Rapidísimas oscilaciones ó microsismos en la componente horizontal NS., desde las $19^h\ 2^m\ 29^s$.

Además, todos los días siguen registrándose algunas oscilaciones aisladas del mismo carácter que las del movimiento señalado el día 8.

» 14 . . . . Frecuentes microsismos en la componente EW., desde las $4^h\ 25^m$ hasta $4^h\ 48^m\ 30^s$.

» 16 . . . . A las $10^h\ 20^m\ 19^s$, comienza, sin temblores preliminares, un movimiento constituído por tres grupos de ondas muy regulares, de poca amplitud y de largo período, que afecta á la componente horizontal EW. y á la vertical. El movimiento termina á las $11^h\ 49^m\ 21^s$.

Agosto, 17 . . . Desde las $13^h\ 4^m\ 5^s$ hasta las $13^h\ 5^m\ 5^s$, se registra un grupo de seis pequeñas ondas en la componente EW.

» 18 . . . . Desde las $17^h\ 19^m\ 15^s$ hasta las $17^h\ 31^m\ 29^s$, han sido registrados tres grupos de oscilaciones irregulares y muy pequeñas.

Aparte de esto, durante toda la semana han continuado los movimientos irregulares que vienen señalándose desde primeros de julio.

» 22 . . . . Desde las $12^h\ 15^m\ 40^s$ hasta las $13^h\ 30^m\ 25^s$, se registran con mucha frecuencia pequeños grupos de oscilaciones microscópicas y muy rápidas en la componente vertical.

» 23 . . . . Se han registrado algunos grupos de oscilaciones de la misma naturaleza que las del día anterior, desde las $9^h\ 1$ minuto 20^s hasta las $9^h\ 28^m\ 15^s$.

Además, durante los cuatro primeros días de la semana han sido registrados algunos movimientos irregulares del mismo carácter que los inscritos durante varias semanas anteriores, pero con bastante menor intensidad y frecuencia.

» 29 . . . . A las $9^h\ 35^m\ 35^s$, empieza un pequeño movimiento de origen local constituído por tres grupos de pequeñas oscilaciones que afectan exclusivamente á la componente vertical. La duración de este movimiento es de 2^m.

» 30 . . . . Frecuentes microsismos en la componente horizontal EW. desde las $14^h\ 28^m$ hasta las $21^h\ 10^m$.

» 31 . . . . Frecuentes microsismos en la componente horizontal EW., desde las $9^h\ 4^m\ 55^s$ hasta las $10^h\ 25^m\ 58^s$.

Septiembre, 1. . . A las $3^h\ 15^m\ 21^s$, comienza un débil movimiento constituído por algunos grupos de cortas oscilaciones que afectan únicamente á la componente horizontal EW. Este movimiento dura $13^m\ 26^s$.

» 4 y 5. . . Frecuentes microsimos en la componente NS., desde las $23^h\ 30^m$ del día 3 hasta la $1^h\ 35^m$ del día 4.

» 6 . . . . Desde las $12^h\ 30^m$ hasta las 20^h, se registran con mucha frecuencia grupos de oscilaciones irregulares en la componente NS. y del mismo carácter que los señalados casi todos los días de los meses de julio y agosto.

» 9 y 10. . . Frecuentes microsismos en la componente EW., desde las 21^h del día 9 hasta las $24^h\ 30^m$ del día 10.

» 11, 12 y 13 . Durante los días 11, 12 y 13, se registran con mucha frecuencia microsismos en la componente horizontal EW.

» 21 . . . . Desde las $15^h\ 45^m\ 20^s$ hasta las $15^h\ 47^m\ 52^s$, se registran

dos movimientos irregulares en la componente horizontal NS. acompañados de pequeñas oscilaciones en la otra componente horizontal.

Septiembre, 22 . . Frecuentes grupos de microsismos en la componente horizontal EW., desde las $12^h\,43^m$ hasta las $13^h\,31^m$.

» 24 . . . . A las $10^h\,19^m\,20^s$, empieza un movimiento irregular que afecta exclusivamente á la componente horizontal NS. y cuya duración es de 2^m.

Desde las $22^h\,9^m$ hasta las $22^h\,32^m$ del mismo día, se registran cuatro grupos de pequeñas oscilaciones en la componente vertical, afectando algunos de ellos también á la componente EW. Estos movimientos coinciden sensiblemente con los truenos más intensos que se sintieron durante la tempestad que tuvo lugar á la misma hora.

» 25 . . . En este día se ha registrado un movimiento constituído por dos grupos de ondas. El primer grupo empieza á las 7 horas $41^m\,37^s$ y dura 26^s y el segundo comienza á las 7 horas $43^m\,19^s$ y termina 13^s después. Se trata quizás del fuerte terremoto de grado VII ocurrido en Mula (Murcia), en aquella fecha.

» 27 . . . Hácia las $0^h\,35^m$, empieza un ligero movimiento irregular en la componente NS. de unos 5^m de duración. Desde las $3^h\,30^m$ hasta las 4^h, se registra otro movimiento del mismo carácter que el anterior.

Octubre, 6. . . . A las $7^h\,15^m\,50^s$, se registra el principio de un leve temblor de epicentro muy próximo que influye únicamente sobre las dos componentes horizontales; su duración es de 16 segundos.

» 17 . . . . Desde las $5^h\,35^m$ á las $5^h\,50^m$ apróximadamente, se registran muy débiles oscilaciones en la componente horizontal NS. que pudieran atribuirse á la repercusión de un movimiento sísmimo intenso y de epicentro lejano.

» 23, 24, 25, 26 y 29 . . . Durante los días 23, 24, 25 y 26, es decir, durante unas setenta horas, se suceden casi cesar oscilaciones microsísmicas del suelo que afectan á las tres componentes, sobre todo á la vertical (microsismógrafo de Vicentini) y á la horizontal NE.-SW. (microsismometrógrafo Cancani). Por momentos, la intensidad de las oscilaciones linda con el II grado de Mercalli. El máximo principal ocurre el día 25; otros máximos secundarios se registran en la madrugada del 24. En fin, durante del día 29, se repiten estos

mismos movimientos, aunque con menor intensidad, y sobre todo, de mucha menor duración. No corresponde indudablemente llamar barosismos á estos movimientos, por cuanto no muestran ninguna correlación evidente con las variaciones barométricas.

Octubre, 27.. . . A las $21^h\,14^m\,10^s$, se registra un movimiento débil, instrumental, de epicentro muy próximo, y que influye sobre las tres componentes, especialmente en la EW. Su duración total es de 40^s.

Noviembre, 3. . . Durante la mañana, especialmente hacia las 8^h, se registran, por grupos, repetidas oscilaciones verticales.

» 3 . . . . A las $16^h\,43^m$, se manifiesta una leve sacudida vertical, sin influencia, sobre las componentes horizontales.

» 16 . . . . Desde las $7^h\,10^m$ hasta las $13^h\,30^m$, se registran intensos microsismos verticales.

» 17 . . . . Desde la $1^h\,30^m$ hasta las $8^h\,45^m$, se registran los mismos movimientos, los cuales influyen, además, sobre las componentes horizontales.

» 19 . . . . Entre $9^h\,40^m$ y $9^h\,46^m$, se registran anchas é irregulares oscilaciones verticales, que pudieran tener por origen un movimiento intenso muy lejano.

» 19 . . . . Desde las $12^h\,1^m$ hasta las $12^h\,10^m$, se registran nuevamente microsismos verticales.

Nota.—Según noticias particulares recibidas en este Observatorio, el 10 del corriente, á las $5^h\,30^m$, ocurrió un terremoto de grado IV, en Lladó (provincia de Gerona).

» 21 . . . . A las $21^h\,23^m$, se registra un leve movimiento vertical, de 22^s de duración y de epicentro muy próximo.

» 23 . . . . Desde la 1^h hasta las 7^h, no cesan las trepidaciones verticales de mínima amplitud, pero de periodo relativamente largo.

» 24 . . . . Desde las $2^h\,30^m$ hasta las 7^h, se repiten estos movimientos con mayor intensidad.

» 24 . . . . Entre $14^h\,35^m$ y $14^h\,45^m$, se registra un notable grupo de oscilaciones verticales del mismo carácter que las anteriores.

Es interesante notar que estas mínimas oscilaciones ó temblores no han coincidido con notables variaciones barométricas, ni termométricas, y que, como los microsismos, se han registrado preferentemente desde las primeras horas de la mañana hasta la aurora.

Diciembre, 3. . . Aparte de algunos pequeñísimos microsismos verticales que se han registrado esta semana, durante el día 3, desde las 9^h 20^m hasta las 12^h 30^m, se manifiestan, casi sin interrupción, diferentes grupos de intensos microsismos verticales parecidos á los que se han registrado con excepcional frecuencia en el curso de los dos últimos meses.

» 7, 8, 9 y 10. Aparte de algunos choques microsísmicos insignificantes que se registran los días 7, 8, 9 y 10 (á pesar de la considerable y extensa depresión barométrica que se inicia el día 8), el día 7, desde las 11^h hasta las 12^h 25^m, y especialmente alrededor de las 12^h 18^m, se manifiestan notables grupos de microsismos verticales. Comparando estos resultados con la curva barométrica, se confirma una vez más que no siempre, ni mucho menos, coinciden los microsismos con las variaciones de la presión atmosférica, sino que son, con frecuencia, de origen endógeno, es decir, interno.

» 11 . . . . Desde las 7^h à las 16^h, se registran microscópicas oscilaciones en la componente vertical, y sobre todo en la horizontal NS. del microsismógrafo Vicentini.

» 12 y 13 . . Desde las 18^h del 12 hasta las 7^h 50^m del 12, el mismo microsismógrafo registra microsismos horizontales, dispuestos en grupos, y de notable amplitud. Entre estos movimientos aparecen intensas pulsaciones, algunas periódicas ú oscilatorias, que pudieran atribuirse à la repercusión de muy lejanos é intensos terremotos.

» 16 y 17 . Desde la 1^h 30^m del 16 hasta las 10^h del 17, ó sea durante más de 32 horas, no cesan de registrarse, por el microsismógrafo de gran velocidad, grupos de temblores instrumentales, de notable intensidad y sin relación evidente con las variaciones barométricas y térmicas.

» 18, 19, 20 y 21. . . . Desde las 11^h del día 18 hasta las 20^h del día 21, casi no cesan los microsismos, generalmente débiles. El momento de máxima intensidad corresponde á los alrededores de las 18^h del día 18, constituída por un grupo de microsismos de unos 5 minutos de duración.

» 19 . . . . A las 8^h 11^m 45^s, se registran en la componente horizontal EW. varias oscilaciones instrumentales que duran en conjunto 15^s.

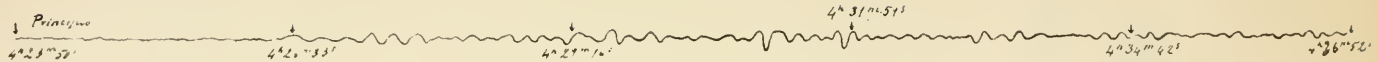
» 25, 26 y 27 . Los pequeños temblores ó microsismos, aunque muy débiles, son frecuentes durante el día 25, y aumentan notable-

mente en intensidad los días 26 y 27, disminuyendo con rapidez en la madrugada del 28.

Diciembre, 28 . . A las $4^h\,23^m\,50^s$ del 28 del corriente, los microsismógrafos del Observatorio Fabra han empezado á registrar temblores precursores de un violento terremoto no muy lejano. Al cabo de $2^m\,22^s$ se manifiestan las grandes oscilaciones, que se van sucediendo por grupos cada vez más debilitados. El terremoto dura unos 58 minutos. La componente vertical de Vicentini ha marcado perfectamente estos movimientos, permaneciendo inertes las componentes horizontales, por efecto, sin duda, de una causa accidental é instrumental; en cambio, las componentes horizontales del microsismógrafo de gran velocidad lo han registrado con inaudita intensidad. La distancia del epicentro es teóricamente de unos 1.320 Km.

» 28, 29, 30 y 31 . . . . A las $4^h\,23^m\,50^s$ del día 28 (conforme queda dicho en la noticia preliminar apuntada más arriba), se registra el desastroso terremoto de Calabria y Mesina, del que se dió por este Observatorio, oportuna cuenta á la prensa local. La distancia teórica anunciada fué de 1.320 Km. y la real 1.200 Km. Transcurridas las grandes oscilaciones, que en este Observatorio duraron 58 minutos, aumentan rápidamente en intensidad los microsismos ó leves temblores, ofreciendo durante el resto del día 20 y durante los días 29, 30 y 31 una continuidad é intensidad excepcionales, en cuyos fenómenos puede haber influído el viento huracanado reinante, pero con seguridad también, reales movimientos endógenos.

Comp. NE-SW



Facsimil del sismograma del terremoto de Mesina - 28 diciembre de 1908 (continúa) →

Microsismometrógrafo Cancani - Observatorio Fabra Barcelona

Comp. SE-NW

El Director del Observatorio

José Tomas Solá

Comp. NE-SW

Terremoto de Mesina del 28 diciembre de 1908 - Obs. Fabra Barcelona (continúa) →

(continuación)

Comp. SE-NW.

Termina sensiblemente el movimiento á las 4h 62m en la comp. NE-SW, y á las 5h 0m en la comp. SE-NW. Ambos valores son aproximados, pues los últimos movimientos se confunden con los microsismos habituales

J. C. S.

544 a

MEMORIAS

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS Y ARTES

DE BARCELONA

TERCERA ÉPOCA — VOL. VII. NÚM. 14

NOTAS FITOGEOGRÁFICAS CRÍTICAS

POR EL ACADÉMICO NUMERARIO

DR. D. JUAN CADEVALL Y DIARS

Publicada en abril de 1909

LIBRARY
DEC 7
UNIVERSITY OF TORONTO

BARCELONA

A. LÓPEZ ROBERT, IMPRESOR. — CONDE DEL ASALTO, 63

1909

B,
S44

NOTAS FITOGEOGRÁFICAS CRÍTICAS

Memoria 5.ª [1]

por el Académico numerario

Dr. D. Juan Cadevall y Diars

Sesión del día 27 de febrero de 1909

Un año más ha transcurrido y otra vez me cabe la satisfacción, al cumplir con un deber reglamentario, de dar cuenta á esta Real Academia del resultado de las exploraciones botánicas durante el curso realizadas, con el fin de acumular material científico para emprender en breve la publicación de la *Flora Catalana*.

Si deberes profesionales contuvieron algo durante aquel período nuestro entusiasmo excursionista, el celo y actividad de nuestros amigos y discípulos han suplido con creces aquel relativo y obligado quietismo.

Aunque en estos últimos años se han multiplicado las excursiones, haciéndolas extensivas á comarcas poco exploradas, no por eso decae su interés ni mengua su utilidad, á juzgar por el éxito alcanzado. Recorrida, empero, la casi totalidad de la provincia de Barcelona, que por otra parte ha sido objeto de preferente estudio por los botánicos catalanes, encaminamos nuestros pasos á la de Gerona, ya con objeto de apreciar *in situ* algo de las novedades descubiertas por nuestros malogrados compañeros *Trémols* y *Vayreda*, ya con la esperanza, que las recientes exploraciones de *Frère Sennen* nos hicieron concebir, de recoger algo de particular interés para nuestra Flora.

No salieron defraudadas del todo nuestras esperanzas.

Así que, después de alguna visita al *Pla del Llobregat*, en el mes de marzo, el día 30 de abril partíamos con el Dr. Llenas en el rápido de Francia, recorriendo en menos de 3 horas los 160 km. que separan Barcelona de Figueras.

Allí pernoctamos, pasando por la mañana siguiente á inspeccionar las inmediaciones de aquel extenso Castillo, cuyo perímetro alcanza 5 km., donde pudimos reconocer algunas especies referidas al litoral de Barcelona y otras propias de aquella comarca ampurdanesa, sin que faltara alguna, á nuestro entender, nueva para ella.

Por la tarde de aquel mismo día salimos para Cadaqués con el propósito de llegar hasta el Cabo de Creus, en cuya ladera meridional, por razón de su exposición y proximidad al mar, debía estar la vegetación más adelantada.

---

(1) Véanse en las Memorias de esta Real Academia correspondientes á los años 1905, 1906, 1907 y 1908. (Mem. 12 y 22 del vol. V, y 5 y 26 del vol. VI).

Al pisar por vez primera la patria del Dr. Trémols, mi bondadoso amigo é ilustre predecesor en esta Real Academia, un sentimiento de respeto y de noble emulación inundó mi espíritu, ante el que se presentaba espléndida la paciente y en gran parte ignorada labor de aquel modesto sabio. ¿Por qué, me decía, llevó aquel hombre benemérito su modestia hasta el extremo de no publicar apenas nada de lo mucho que había observado al recorrer Cataluña y especialmente su país natal que conocía en sus menores detalles?

Afortunadamente queda su herbario, modelo de paciencia y habilidad en la preparación de las plantas, el cual, gracias á la generosidad de la familia, ha venido á honrar nuestra Corporación y á perpetuar entre nosotros la memoria de tan preclaro académico.

Examinadas sin pérdida de tiempo las cercanías de Cadaqués, pasamos el día siguiente al Cabo de Creus, examinando de paso, olivares, viñedos, yermos y alguna cala, que presentaban variada y espléndida vegetación.

Aprovechamos las últimas horas de la tarde para visitar la Sabolla, célebre por las citas de Trémols y Vayreda, y nos retiramos rendidos de cansancio después de una caminata de diez horas por un país pedregoso y escarpado.

Durante nuestra brevísima estancia, pudimos recoger la mayor parte de especies críticas citadas por dichos botánicos, con alguna que, al descubrirla años atrás, creíamos circunscrita á la comarca del Vallés, además de otras dos rarísimas en España.

Apremiados por el deber y con el sentimiento de no poder dedicar más detenido estudio á aquellas sinuosas costas y abruptos acantilados, nos despedimos de aquella solitaria y risueña población á las primeras horas de la madrugada, con el fin de explorar durante el día las lagunas próximas á Castelló de Ampurias.

Más que pestilentes aguas encharcadas, vimos allí verdaderos jardines flotantes, entre cuyas plantas descollaban las níveas flores de los ranúnculos acuáticos. Como Llenas había recorrido algunas veces aquella localidad, remitiéndonos luego las plantas recolectadas, pocas fueron las novedades descubiertas, excepción hecha de algunos *Carex*.

A las dos y media de la madrugada partía de Castelló para tomar en Figueras el rápido de Barcelona, con el fin de hallarme en mi cátedra de Tarrasa, á las nueve y cuarto de la mañana. En tanto Llenas, se dirigía de Castelló á S. Pere Pescador y á la Armentera para reconocer de nuevo sus aguas estancadas.

Retenidos en Tarrasa por los exámenes durante el mes de junio, solo pudimos efectuar pequeñas excursiones por la localidad y montes vecinos, en una de las cuales nos sorprendió, ciertamente, la relativa profusión de especies, alguna exclusiva de aquel lugar, que hasta entonces debían considerarse como raras.

Por fin, el día 29 de dicho mes, partimos con el Dr. Sallent para Gualba, con el intento de explorar minuciosamente las cumbres y región oriental del Montseny que, por su exuberante vegetación, es, sin duda alguna, la más interesante.

Después de recorrer los campos y prados de Gualba y el *Salto* del mismo nombre, con las frondosas orillas del río junto á la *Farga,* remontamos por el *Gorch negre* hasta Santa Fé, para hacer un detenido estudio de su pintoresco valle. Ya manifestamos en la Memoria anterior que, no obstante haber sido visitado por todos los botánicos catalanes, desde Salvador y Minuart á Trémols y Vayreda, la Flora del Montseny distaba mucho de estar suficientemente estudiada. Las plantas allí descubiertas durante estos últimos años y algunas, de gran interés, que en esta excursión recogimos, confirman cumplidamente nuestro aserto.

En el espacio de cinco días que permanecimos allí, examinamos el vallecito poco menos que palmo á palmo; subimos, además, á las Agudas, y siguiendo por Puigsacarbassa, avanzamos por la cumbre hasta más abajo del *Turó del Home,* en cuyo largo trayecto la vegetación, aunque no carece de interés, es en conjunto pobre.

Visitamos también San Marçal, donde parecen darse la mano plantas propias de los altos valles con otras, venidas hasta allí, de las opuestas comarcas del Vallés y Guillerías.

Como la masa arbórea del Montseny, especialmente representada por hayas y abetos en la región subalpina, ha sido objeto de sensibles talas, es de temer que hayan desaparecido del todo algunas especies herbáceas que vivían bajo su sombra en tiempos de Salvador y aún de Costa. En tal caso se hallan, seguramente, las *Dentarias* que buscamos con empeño, pero en vano.

Lo más saliente de esta excursión fué el descubrimiento de una especie nueva para la Ciencia, de otra rara y nueva para la Flora de España, objeto de animada controversia entre los botánicos contemporáneos, y alguna más, crítica ó nueva para la Flora Catalana.

A fines de julio visitamos el Montserrat, con el principal objeto de estudiar algunas variedades notables que allí ofrece el *Thalictrum minus* L. Acompañados de nuestro buen amigo el P. Marcet, recorrimos parte de aquella incomparable montaña, no sin recoger interesantes datos para nuestro objeto.

Pocos días después efectuamos otra excursión al Penadés, deseosos de fijar por aquel lado el área de dispersión de alguna especie.

Como la visita de primavera al Alto Ampurdán nos sugirió la idea de que otra practicada en otoño podría ser de algún provecho, para allí salimos el día 14 de Septiembre, permaneciendo seis días en dicha comarca.

Después de visitar por segunda vez los alrededores de Figueras y Castelló de Ampurias, donde, como es natural, la vegetación presentaba muy diferente aspecto que en el mes de mayo, pasamos á La Escala, pintoresca población situada á la entrada y orilla sur del golfo de Rosas. ¡Qué hermoso espectáculo presentaban aquellas aguas que, al reverberar tranquilas la luz del sol, formaban ancha y argentina faja que se perdía á lo lejos, tierra adentro, hacia Palau y Castelló de Ampurias!

A menos de dos kilómetros se encuentra la vetusta Ampurias, cuyas recien-

tes excavaciones, al poner de manifiesto sólidas construcciones y caprichosos mosaicos, evocan en el turista recuerdos de pasadas glorias, de grandezas griegas y romanas, que constrastan, ciertamente, con el mísero aspecto que ofrece ahora.

No fué estéril esta última excursión, puesto que junto á La Escala vimos especies de verdadero interés, particularmente dos no citadas todavía en España. Creemos que un estudio detenido de las costas y colinas comprendidas entre La Escala y Torruella de Montgrí, daría por resultado el descubrimiento de interesantes novedades.

Aquí termina la sucinta relación de nuestra modesta labor personal, durante el último año realizada. A ella hay que agregar la muy valiosa de nuestros amigos, en parte verificada con sujeción al plan que previamente nos habíamos trazado.

Con efecto, mientras el Dr. Sallent recorría Matagalls, en el Montseny, y seguidamente Puigllançada, Comabella y *Pedró dels Quatre Batlles,* punto el más culminante del Cadí, el Dr. Llenas, por encargo de la Junta municipal de Ciencias naturales, visitaba el Valle de Arán, donde desde Costa y Compañó ningún botánico catalán había herborizado.

Desde Bosost al Puerto de Pallars ó de la Bonaigua, siguiendo el eje sinuoso del Valle, y desde la capital á los Puertos de la Picada, Benasque, Viella y Caldas, en dirección de sus laderas, con las localidades de Artiga de Lin, Tredós y Salardú, repetidamente citadas por Costa, y las menos conocidas de Canal de Pumero, Safarrera, Baricauba, Aiguamoix y Saburedo, fué sucesivamente recorrido, por espacio de varios dias, con el interés que inspira un ideal científico con entusiasmo profesado.

Si las investigaciones de Sallent proporcionaron plantas de particular estima, las de Llenas, practicadas en mayor escala y en un país menos estudiado, dieron á conocer especies críticas, algunas nuevas para nuestra Flora y otras solo por botánicos extranjeros mencionadas. De las plantas por él traídas se desprende que el Valle de Arán posee una riqueza de vegetación muy superior á la que nos ofrecen los Pirineos orientales. Y no hablamos solamente de plantas de un valor científico, sí que también de las más importantes que usa la Terapéutica, como el *árnica*, la *genciana*, el *acónito*, la *digital* y la *belladona*.

A buen seguro que un par de excursiones más, efectuadas, respectivamente, en el mes de junio y á fines de verano, se verían coronadas por un éxito lisonjero. ¡Lástima que la carencia de vías de comunicación haga tan penoso el acceso por la parte de España, dificultándose por este motivo un estudio útil, instructivo y ameno!

Mientras nuestros delegados desempeñaban cumplidamente su honroso cometido, el P. Marcet y D. Conrado Pujol, en el Miracle y en el Bergadán, respectivamente, proseguían, en la medida de sus particulares ocupaciones, su patriótica labor, facilitándonos muy apreciables datos.

Justo es mencionar también á D. Mariano Masferrer, pariente del autor de

los *Recuerdos botánicos de Vich y de Tenerife,* nuestro antiguo condiscípulo y malogrado amigo D. Ramón Masferrer y Arquimbau, que nos ha favorecido con algunas plantas de particular interés, recogidas en San Pere de Casserras y Collsacabra.

Pero debemos hacer muy particular mención del joven médico de La Sellera, D. Joaquín Codina, que sólo y aislado en aquella población de la provincia de Gerona, en medio de sus deberes profesionales y á los dos años apenas de herborizar, ha hecho ya descubrimientos notabilísimos, alguno de los cuales llamará seguramente la atención de los botánicos.

¡Que Dios premie á todos su generosidad y les conceda alientos y abnegación para proseguir esta labor científica, á fin de que en el concierto general de las naciones cultas, no sea en este ramo del saber una triste nota discordante nuestra patria!

Como resultado y resumen de todos los trabajos fitográficos llevados á cabo durante el año que acaba de transcurrir, mencionamos á continuación 190 plantas que conceptuamos críticas ó raras, 4 de las cuales son nuevas para la Ciencia, 18 lo son para la Flora española y 22 deben añadirse al ya rico catálogo de plantas catalanas.

Las cuatro plantas nuevas cuyos dibujos se acompañan, son: *Geum Pauí* Cad., *Euphrasia Marceti* Cad. et Pau, *Stachys annua* L., var. *Llenasi* Cad., y *Pteris Codinae* Cad. et Pau, que gustosos dedicamos á nuestros entusiastas colaboradores en los trabajos de exploración para la Flora catalana.

Debemos advertir que casi todas las especies nuevas ó dudosas han sido consultadas con nuestro particular amigo y compañero de Academia, el eximio botánico Dr. D. Carlos Pau, de Segorbe, por cuya atención y bondad le enviamos desde aquí público testimonio de nuestra gratitud más sincera.

1.—*Ranunculus confusus* Gr. et G.—*R. Baudotii* Godr., subspec. *R. confusus* Gr. et G , sec. Rouy (Flore de France.—I.—65).

Aguas estancadas y prados húmedos de Castelló de Ampurias, con las var. α. *heterophyllus* Freyn., de hojas flotantes trilobadas; γ. *submersus* Freyn., *acuático* y con todas las hojas divididas en lacinias capilares; y δ. *succulentus* Freyn., *terrestre* y con las hojas divididas en lacinias cortas y algo gruesas.—Abr.—May.

2.—*R. flabellatus* Desf.—*R. chaerophyllos* L., γ. *flabellatus* Desf.

Señalado por Vay. con referencia á Trem. en Cadaqués, abunda en los prados de Vidreras, c. del Empalme (Llenas!).—Abr.

3.—*R. alpestris* L.

Llenas lo ha traído del Pto. de Benasque, en cuyo punto, lo propio que en otros del Valle de Arán, lo había citado Costa. Lap., Rouy y Gaut., lo señalan también en el Valle de Eyne, del Pir. Or., donde, al parecer, no abunda.—Jul.

4.—*R. sceleratus* L.

Lejos de ser común en Cataluña, como se ha dicho, solo se ha visto hasta

ahora en las aguas inmediatas al Golfo de Rosas (Vay., Llen!). Además los autores franceses lo dan como raro en la región mediterránea.—May.

5.—*Meconopsis Cambrica* Vig.

Verdaderamente abundante en parajes húmedos del Valle de Arán, donde ya lo citaron Salv. y Csta. (Llen. !). No se ha indicado aún en el Pir. Or. español, ni debe abundar en el francés, puesto que Gaut. lo da como muy raro en la *Font de Comps.*—Jul.

6.—*Fumaria major* Bad.—*F. agraria* Lag. auct. catal.

Muy diseminada por Cataluña, especialmente por la provincia de Gerona, puesto que remonta desde Barcelona á Figueras y otros puntos del Alto Ampurdán.—May.—Jun.

La *F. capreolata* L. α. *albidiflora* Hamn., y β. *speciosa* Hamn., en La Sellera (Cod.!), y la δ. *atrosanguinea* Broch et Neyr., abundante en los altos de Rosas, hacia Cadaqués.—Abr.—May.

7.—*Brassica Robertiana* Gay. subspec. de la *Br. oleracea* L., sec. Rouy.

Petja de S. Martí, c. Osor y despeñadero de S. Roch (Cod.!)

Vay. cita allí, con ciertas reservas, la *Br. montana* Pourr.—*Br. Pourreti* Fouc. et Rouy; pero por sus hojas medias *pecioladas,* flores grandes y pálidas y semillas manifiestamente *alveoladas,* creemos que se trata de la primera. Mayo.

Los autores franceses la consignan en las rocas del litoral cerca de la frontera española.

8.—*Malcolmia binervis* Boiss.

Arenales de Castelldefels (Llen.!), mezclada con la *M. parviflora* DC., con la que es fácil confundirla; pero se distingue de ella por los tallos más endebles, hojas más diminutas y sobre todo por el tabique de las silículas, mucho más angosto y menos opaco, recorrido en su centro por una *finísima línea transparente*, como las anchas bandas que lo rodean.—Marz.—Abr.

No la citan los autores catalanes, ni tampoco figura en el Prodr.. Coste y Rouy la señalan en los Pir. Or. y litoral mediterráneo.

9.—*Arabis bellidifolia* Jacq.; β. *Soyeriana* Gr. G.

Valle de Arán, rocas de Safarrera (Llen.!)—Jul., en fr.

Sólo la vemos citada en los Pir. de Aragón, pues si bien Lap. la refiere al Valle de Eyne, ni Gaut. ni Rouy confirman esta cita.

10.—*Teesdalia Lepidium* DC.

Citada por Salv., de Perelada á Campmany, y por Vay. en los prados de Puigalt y Paní, abunda en el litoral de Blanes (Llen.!).—Abr.

La *T. nudicaulis* R. Br., desde la región media del Montseny al *Turó del Home* y comarca de las Guillerías. También Codina nos la ha remitido de La Sellera.

11.—*Helianthemum hirtum* Pers., β. *procumbens* Wk., subv. *angustifolium* Rouy.

Laderas áridas del Castillo de Figueras.—Abr.—May.

12.—*Reseda litigiosa* Sennen et Pau.

«*Habitu Resedae Aragonensis* Loscos et Pardo, *vel R. collinae* J. Gay *sed diversa, primo aspectu, sepalis non accrescentibus.*» (C. Pau.—Bolet. de la Soc. Aragonesa de Ciencias Naturales.—Tom. IV.—Dicbre. de 1905).

Efectivamente, tiene el porte de la *R. Aragonensis* Losc. et Pard., de la que se distingue al punto por sus pétalos de un *blanco níveo,* racimo más corto y mucho más denso, con los filamentos estaminales *blancos* y *alesnados* en vez de *anaranjados* y *mazudos,* en la planta viva.

Pau sospecha la posibilidad de formas intermedias entre esta planta y la *R. Jacquini* Rchb. Por nuestra parte sólo podemos añadir que algunos piés llevan hojas caulinares *quinquepartidas,* en vez de *tripartidas,* y que poseemos algunos con cálices *acrescentes*, cuyos sépalos alcanzan de 10 á 12 mm. La inmensa mayoría, sin embargo, carecen de este carácter.

Abunda en olivares y viñedos desde los altos de Rosas al Cabo de Creus, mientras que al descender hacia el primer punto y Castelló de Ampurias, va cediendo su lugar á la *R. Aragonensis*, Losc. et Pard.—2 mayo 1908 legi.

13.—*Drosera longifolia* L.

Valle de Arán, sitios aguanosos de Ruda con los *Sphagnum* y la *D. rotundifolia* L. (Llen.!)—Jul. 908 legit.

De esta especie dice el Prodr. (III-704): «*Indicata a cl. Colm. in Pyrenaeis Catalauniae*»; pero luego con referencia á Costa, añade: «*sed recentiore tempore ibi non observata.*» Efectivamente, Costa dice que *no ha sido encontrada aún en nuestros Pirineos* (Supl. 9.)

Bubani (Flora Pyrenaea.—III.—108), consigna: *rarissima certe per Pyren. species, quibus denegatur a Timbal.* Lapey. (Hist. abrégée des Plantes des Pyrénées.—173) la refiere á *Anas*, en el Valle del Carol, próximo á Puigcerdá. Coste (Flore de la France.—I.—167) la considera también rara en los Pirineos, Rouy (Flore de la France.—IV.—4) la excluye de España, y Gaut. no hace mención de ella. Tampoco la mencionan Losc. y Pard. en su *Serie imperfecta.*

La *D. rotundifolia* L., no escasea en los prados inundados de Santa Fe de Montseny, como ya había notado Vay.

14.—*Frankenia intermedia* DC.

Además de Rosas y La Escala (Csta., Llen.!), en el Cabo de Creus.—May.

15.—*Silene crassicaulis* Wk. et Csta.

A las pocas localidades de la provincia de Gerona citadas por Vay., debe añadirse el *Pasteral,* camino de Osor, c. La Sellera, de donde nos la ha remitido Codina.—May.

16.—*Sagina maritima* Don., δ. *elongata* G. et G.—*S. filiformis* Kze.

Cadaqués, playa de *Port-lligat.* También en *S. Pere Pescador* (Llen.!)—May. La especie fué ya citada en las mismas localidades por Trem. y Vay.

17.—*Cerastium glaucum* γ. *quaternellum* G. et G.

Referido por Vay. á S. Hilario y Monsolí, se extiende hasta La Sellera (Cod.!)—May.

18.—*Lavatera maritima* Gou., var. *incana* Vay., β. *trilobata* Rouy.

Despeñadero de S. Roch, en La Sellera (Cod.!)—Mayo. Comparada la planta de La Sellera con el tipo cogido por Vay. en S. Aniol de Uija, *loco classico*, y con otra de Bourgeau, procedente de *Baou-de 4 heures*, c. Tolón, no hallamos diferencia alguna. Pero la var. *incana* de Vay. se publicó en el tom. XI.—1.°, pág. 70 de los Anal. de la Soc. Española de Hist. Natural, correspondiente á 1882, mientras que la β. *trilobata* Rouy aparece en el tom. IV de la Flore de France, pág. 46, correspondiente á 1897: por tal motivo, si no existe otra cita anterior de Rouy, por derecho de prioridad, debe prevalecer la denominación de Vay.

19.—*Geranium phaeum* L.

Citado en el Valle del Hospital de Benasque por Zett., en los prados de Bosost del Valle de Arán por Compañó y cerca de Camprodón por Vay., no escasea en Artiga de Lin (Llen.!)– Jul.

El *Prodr.* lo da como raro en el Pir. catalán, donde ni Bubani ni Gaut. lo mencionan.

El *G. nodosum* L., además de Ripoll (Salv., Ferrer!), en la Sellera (Cod.!) y otros puntos de la provincia de Gerona; y el *G. pusillum* L. en Santa Fe de Montseny, entre otros sitios de Cataluña.

20.—*Erodium littoreum* Léman, forma del *E. Chium* Wild., sec. Rouy.

Además de Gavá y de Castelldefels, en Cadaqués, mezclado con el tipo.—May.

Los filamentos de los estambres estériles son, efectivamente, *lampiños* en el *E. littoreum*, como dice Rouy, mientras que son *pestañosos* en el *E. Chium*.

El *E. macradenum* L'Hérit. no sólo en Montserrat, Ubach y S. Llorens del Munt, sí que también en Espunyola del Bergadán (Puj. C.)

21.—*Hypericum Richeri* Vill., forma *H. Burseri Spach.* — *H. fimbriatum* Lamk. var. *Burseri* DC.

Pastos de Artiga de Lin (Llen.!)—Jul.

Zett. lo refiere al Pto. de Benasque y Gaut. al Valle de Eyne.

El *H. hirsutum* L., además de los puntos indicados por Vay. en la provincia de Gerona, en La Sellera (Cod.!)

22.—*Trifolium tenuiflorum* Ten.—*T. striatum* L.; β. *elongata* Lojac.

La Sellera, *Prat del Bayé*, Osor, r. (Cod.!)—Jun.

«*In Gall. austro-occid., fortasse in Cantabria*» (Prodr.—III.—417.—Species inquirendae).

Rouy (V.—101) lo da como raro en la *Alsacia-Lorena* y *Córcega*.

El *T. striatum* L., además de las localidades citadas en la Memoria anterior, en el Valle de Arán (Llen.!) El *T. Lagopus* Pourr. en S. Marçal y el *T. laevigatum* Desf., en Sta. Fe de Montseny.

23.—*T. uliginosus* Schk., *a. glabriusculus* Bab.

No solamente en los riachuelos de Montseny y Sta. Fe, como consignamos en la Memoria anterior, sí que también en el Valle de Arán (Llen.!)—Jul.

24.—*Oxytropis pyrenaica* G. et G.

En la cumbre de la Picada (Llen.!)—Jul.

Costa lo cita en el Pto. de Viella. No parece existir en el Pir. Or.

25.—*O. Halleri Bunge.—Astragalus variabilis* Rouy; γ. *sericeus* Rouy.—*O. Uralensis*, β. *sericea* DC.

Referida en la Memoria anterior á los altos de Nuria, ha sido cogida por el Dr. Sallent en el *Pedró dels Quatre Batlles*, del Cadí, sobre Puigllançada.—Ag.

26.—*Vicia Orobus* DC.

Referida por Tex. al Valle de Arán y por Timb. al de Baños, c. Mongarri, ha sido recolectada por Llenas en las inmediaciones de Viella.—Jul.

Rouy la supone en toda la cadena pirenaica, y Gaut. la señala en los bosques de la región del haya y del abeto, Fontpedrosa, Valle de Prats-Balaguer, etc.

27.—*Pisum arvense* L.

No sólo entre las mieses de los campos de Tarragona (Wbb., Csta.), sí que también en los sembrados del Valle de Arán (Llen.!) y Sta. Fe de Montseny. —Jul.

28.—*Lathyrus montanus* G. et G.—*Orobus luteus* L.

Valle de Arán, parajes herbosos de Viella (Llen.!)—Jul.

Unicamente lo vemos citado por Isern en el Valle de Arán y por Bubani en Mongarri.

También se hallan en los prados de Viella el *L. canescens* G. et G. y el *silvestris* L., γ. *latifolius* Peterm. éste ya citado por Costa.

29.—*Ornithopus perpusillus* L.

Además de algunas localidades del Pir. Or. (Vay.) y central (Compñ.), en los prados secos de Sta. Fe de Montseny, frente á *Can Mas*.—Jul.

Es fácil que por su pequeña talla pase inadvertido entre la hierba.

El *O. ebracteatus* Brot. y el *O. compressus* L. en los viñedos del Cabo de Creus.—May.

30.—*Spiræa Aruncus* L.

Valle de Arán, bosques de Artiga de Lin (Llen!)—Jul.

Costa la señala como poco común en la Ribera de Viella.—No parece existir en el Pir. Or.

31.—*S. thalictroides* Pall.

Collsacabra, S. Pere de Casserras (M.° Masferrer).—May.

Esta planta se ha tenido por *S. hypericifolia* L. y se publicó como *S. flabellata* Bert.; mas al compararla con el grabado que de la primera consigna Coste y con la descripción de la segunda, dada por el Prodr., se advierten al punto notables diferencias.

Pau, que es quien la determinó, la considera importada, por más que, según

afirma Masferrer, abunda tanto que se emplea como combustible, lo cual probará que halló en la localidad condiciones muy propicias á su existencia.

Lámina I.

1. *Geum Pauí* sp. nov. 1 : 2.—2. Hoja basilar.—3 y 4. Flor.

32.—*Geum Pauí* sp. nov. (Lám. I.)

Planta 30-50 cm., rhizomate obliquo, caule ascendenti-erecto, bifurcato,

2-4 floro, foliato, in basi villoso, superne, villoso-glanduloso; foliis basilaribus longe vel breve petiolatis, interrupto-pinnatisectis, segmento terminali attenuato-cuneato, 3-5 lobo; segmentis lateralibus triplo brevioribus, alteris minutis alternantibus, utrisque crenatis, basi integra cuneata; foliis caulinis pinnatisectis vel pinnalipartitis, partitionibus angustioribus longiori busque, crenato-serratis; stipulis subrotundis, magnis vel non, foliaceis, inciso-crenatis; floribus paucis, mediocribus (10-12 mm.), longe pedunculatis, erectis vel in maturitate sub-reflexis; phyllis epicalycis minutis (1 mm.) sepalis ovatis apice lanceolato, submucronato, rubro-virentibus, suberectis; petalis ellipticis, flavis atque rubellis venulis reticulatis, duplo longioribus calyce; nuculis villosis in capitulo sessile congestis; articulo superiore styli, in basi villosulo, inferiore glabro triplo breviore.

A G. albarracinense Pau.—G. hispidum Lge. (non Fries).—G. molle auct. hispan. cui valde simile, villositate rariore foliis basilaribus ambitu oblongo, uniformiter segmentatis, segmento tamen terminali multo minore, lobisque ejus segmentis lateralibus æquantibus, differt.

A G. hispidum Fries (non Lge.) villositate breviore, foliis densioribus sed basilaribus crenis minoribus, segmento terminali attenuato-cuneato, calyce suberecto, rubro-viride, laciniis amplioribus atque minus in acumine angustis; petalis paululum majoribus, distat.

A G. molle Vis. et Pauc. segmento terminali foliorum basilarium multo minore, attennuato-cuneato (non cordato neque reniforme) phyllis epicalycis duplo vel triplo minoribus, laciniis calycis non lanceolatis, nec acuminatis, nec cuspidatis, discrepat.

A G. pyrenaicum Willd. segmento terminali foliorum basilarium multo minore, attenuato-cuneato, lateralibus 3-5 mediocribus (non 5-7 minutis); floribus mediocribus ejusmodi calyce rubro-viride, petalisque, ellipticis, aberrat.

In pratis humidis Sancta Fe (Montseny), 3 jul. 1908, *legi, et dilecto amico, insigni botanico segobricensi Carolo Pau, libenter dicavi.*

Según datos recogidos por Pau, se extiende desde la provincia de Gerona á Galicia, de donde desciende á Teruel y Castilla. Ulteriores observaciones le asignarán, seguramente, una área aun más extensa.

La manifiesta afinidad que entre todas las referidas plantas existe prueba, á nuestro entender, que proceden por mera diferenciación de un mismo tipo específico, el cual, como más antiguo, podría ser el *G. hispidum* Fries.

Por tanto, si no se admite nuestra especie, que no creemos de menor categoría que sus afines, hay que modificar este grupo de formas de la manera siguiente:

Geum hispidum Fries.
var.) *molle* (Vis et Pauc.) Cad. et Pau.
var). *albarracinense* (Pau) Cad. et Pau.
var). *Pauí* Cadevall.

33.—*Rubus serpens* Weihe et Nees

Bosques umbrosos de la región media de Montseny, hacia el *Salto de Gualba*.—Jun. 908 legi.

Creemos que la planta que allí cogimos pertenece á esta especie colectiva, en vista de la descripción de Rouy y el grabado de Coste.

34.—*R. hirtus* Waldst. et Kit.

Valle de Arán, Ribera de Viella (Llen.!)—Jul.

Esta planta parece muy distinta del *R. hirtus* Weihe et Nees, citado en otros puntos de Cataluña por Vay.

35.—*R. corylifolius* Sim.

Común en el Valle de Arán (Llen!); Vidit Pau.—Jul.—Ag.

A pesar de que, «sec. cl. Laguna, *per omnem Hispaniam borealem et centralem disseminatus et quoque in meridionali occurrens* (Suppl. Prodr.—225)», no vemos cita alguna de esta especie en Cataluña, porque, si bien Vay. lo refiere á los bosques de *Monsoli*, la planta de Vay. es el *R. corylifolius* Weihe et Nees (non Sim.)

También Bub. (II-607) lo indica con duda en *Prats de Molló;* pero lo da como sinónimo de *R. nemorosus* Hayn., y éste, según el Prodr., es sinónimo de *R. corylifolius* DC., non Sim.

36.—*R. Idaeus* L.; var. *denudatus* Schimp. et Spenn., vel var. *inermis* G. Br.

Valle de Arán, bosques de Baricauba (Llen!)—Jul.

Cree Rouy que ésta y otras numerosas variaciones que ofrece la especie son poco estables.

37.—*Rosa villosa* L.—*R. mollis* (Sm.)

Vay. la vió en fruto por el mes de Junio de 1878 en lo más alto del pico de las Agudas del Montseny. Nosotros la encontramos en flor el dia 2 de julio último al pie del sendero que desde el Collado de las Agudas conduce al *Turó del Home*. Creemos, sin embargo, que no tardará en desaparecer comida por el ganado.

38.—*Epilobium virgatum*.—G. G.—*E. obscurum* Schreb.

Montseny, riachuelos de Sta Fe.—Jul.

Por las líneas del tallo, poco salientes, pero manifiestas, hojas aovado-lanceoladas, denticuladas, y por las flores erectas antes de la antesis, no puede ser *E. palustre* L., que es la especie referida á aquel punto, y que nosotros no hemos observado todavía. La presencia de estolones y la escasa prominencia de las expresadas líneas le distinguen también perfectamente del *E. tetragonum* L., que existe también allí y abunda hoy en el torrente de la *Xuriguera*, cerca de Tarrasa, donde años atrás lo citamos como raro.

El *E. palustre* L., juntamente con el *E. spicatum* Lamk., los ha traído Llenas de los alrededores de Viella.

39.—*Myriophyllum verticillatum* L.

Común con el *M. spicatum* L. y el *Ceratophyllum demersum* L. en las aguas

estancadas de Castelló, Palau, La Escala, Ampurias y otras, inmediatas al Golfo de Rosas.—May.

40.—*Paronychia echinata* Lamk.

Rocas y sitios pedregosos del Cabo de Creus. Trem. la había ya señalado en Cadaqués, y Vay. desde el referido Cabo á la Selva.—May.

La *P. polygonifolia* DC., además de las localidades del Valle de Arán, citadas por Costa, hállase en Salardú (Llen!)

41.—*Corrigiola telephiifolia* Pourr.

Indicada en varios puntos de la provincia de Gerona, cogióla M.° Masferrer en la cumbre de Matagalls.—Jun.

42.—*Scleranthus uncinatus* Schur.—*S. annuus* L., γ. *alpestris*, *calycis lobis uncinatis* (Gillot et Coste.—Boletín de la Soc. botánica de Francia.—XXXVIII.—114).

Valle de Arán, sitios pedregosos de Salardú (Llen.!)—Jul.

Por más que el Prodr. (III.—148) dice: *in locis arenosis glareosisque regionis mont. et subalpin. Pyr. Aragon. et Catalaun. passim*, ni los autores franceses ni los catalanes parecen haberlo citado hasta ahora en el Pir. Or.

Según Lacroix (ex Gillot et Coste) existen todos los tránsitos entre la forma de sépalos marcadamente ganchudos y la de sépalos rectos; y Bub., con referencia á Loret, añade que en un mismo individuo se han visto cálices con sépalos de las dos formas. Creemos, sin embargo, que difiere lo bastante del *S. annuus* L. para formar especie distinta.

43 —*Tillaea muscosa* L.

No solo en los arenales marítimos de Casa Antúnez, junto á Barcelona, y otros sitios indicados por Vay., sí que también abundante en Cadaqués sobre *Port-lligat* y en el mismo Cabo de Creus.—May.

44.—*Sedum Fabaria* Koch.

Citada por Costa en el Valle de Arán, trájola Llenas de Tredós.—Jul.

Está hoy reconocida su existencia en el Pir. Or. catalán y francés.

El *S. Cepaea* L. en Viella (Llen.!) y abundante en prados y márgenes de Gualba, al pie del Montseny.

45.—*Torilis heterophylla* Guss.

Hállase esta planta, de la que no vemos cita en Cataluña, en la cordillera superior del Vallés, desde Montserrat al Montseny.—May.

En cambio no creemos que sea común el *T. Anthriscus* Gmd., que sólo poseemos del Bergadán, remitido por Puj. C., y de La Sellera, como r. r. por Cod.

El *T. neglecta* R. et S. abunda, con el *T. infesta* Hoffm. en parajes herbosos de Tarrasa.

46.—*Sambucus racemosa* L.

Además de las pocas localidades en que se ha citado, en Matagalls (Sallent!), Collsacabra (M.° Masferrer!) y en Artiga de Lin (Llen.!)—Jul., en fr.

La planta del Valle de Arán presenta los foliolos mucho más cortos y angostos que la del Pir. Or.

47.—*Viburnum Opulus* L.

Referida por Isern al Valle de Arán, fué cogida por Llenas en los prados de Vilac.—Jul.

48.—*Galium rotundifolium* L.

Parajes umbrosos de Viella (Llen!)—Jul.

Costa lo refiere al Pto. de Viella y á la costa de Castelldefels, de cuya última localidad procede, según reza la etiqueta, el ejemplar que figura en su herbario.

G. et G. lo refieren al valle de Eyne; pero según Gaut., no se ha vuelto á ver allí.

49.—*Vaillantia muralis* L.

Además de Castelldefels (Vay., Llen.!), abunda en las rocas del Cabo de Creus, de la Sabolla, junto á Cadaqués, y de La Escala, y sin duda en todo el litoral.—May

50.—*Valeriana tripteris* L.

Efectivamente en Montseny (Vay.), rocas umbrosas de Puigsacarbassa; pero no en Montserrat, como se ha dicho, pues la que vive allí es la var. *ambigua* G. et G. de la *V. montana* L., que presenta las hojas caulinares ternadas.

La *V. pyrenaica* L., en Artiga de Lin (Llen!), y la *V. globulariæfolia* Ram., además de verla en el Cadí, donde la cogimos en 1905, en el Pto. de Caldas (Llen!)—Jul.

51.—*Cephalaria syriaca* Schr.

Plana de Vich, Gurb, r. r. (M.° Masferrer!)

Por más que Colm. afirma con su acostumbrada vaguedad que se halla «in Catalaunia» (Prodr.—II.—15), Costa dice que no la ha observado, y ningún botánico catalán hace mención de ella.

52.—*Knautia dipsacifolia* Host.

Además de las localidades de Camprodón y Talaxá, citadas por Vay., en la Ribera de Viella (Llen!)—Jul.

53.—*Adenostyles pyrenaica* Lge.—*A. albifrons* β *viridifrons* Csta., subsp. de la *A. albida* Cass., sec. Rouy.

Valle de Arán, Canal de Pumero (Llen!)—Jul.

Difiere de la *A. albida* Cass., no escasa en los torrentes de Nuria, por las hojas de un *verde más claro*, no algodonosas por el envés, *más regularmente dentadas* y con el *seno basilar casi cerrado; calátides mayores*, *multifloras*, en vez de *3-5 floras*; periclinio formado por 8-9 brácteas *subagudas*, de unos 7 mm. de longitud, en lugar de 5 brácteas *obtusas* y largas de 4-5 mm.

54.—*Solidago Virga-aurea* L., form. *S. alpestris* W. et K., α. *genuina* Rouy.

En la Picada (Llen!)—Jul.

No parece haberse citado esta forma en Cataluña.

55.—*S. glabra* Desf.—*S. serotina* Ait.

Procedente de la América septentrional y naturalizada en Europa, fué cogida por Codina á orillas del Ter.—Octubre 1908.

56.—*Aronicum Clusii* Koch.—*Doronicum Clusii* Tausch.

Costa lo citó en el Pto. de Benasque y Llenas lo trajo como raro del Pto. de la Bonaigua ó de Pallars.—Jul.

57.—*Arnica montana* L., α. *obtusifolia* Schur.

Valle de Arán, Aiguamoix (Llen.!)—Jul.

58.—*Leucanthemum subglaucum* Laramb.—*L. vulgare* Lamk. δ. *subglaucum* Rouy.—*L. vulgare* Lamk. δ. *auriculatum* Peterm.

Bosques de Montserrat, hacia Santa Cecilia (P. Marcet!) y de S. Pere Sacama.—Jun.

Según el Prodr. (II.—96) «in Cantabria», prope Vergara.

59.—*L. cebenense* DC.—*L. palmatum* Lamk.—*Chrysanthemum monspeliense* L.

Nuria, pizarrales del Puigmal y altos de Coma de Eyne, mezclado con el *L. alpinum* Lamk.—Ag. 1891 y jul. 1907 legi.

No parece que esta planta haya figurado hasta ahora entre las especies españolas, puesto que el Prodr. (Suppl. 84), con referencia á Vay., dice: *L. palmatum* Lamk. et *L. graminifolium* Lamk. *á cl. Vay. inter species catalaunicas enumerata in Pyrenæis quidem orientalibus crescunt sed in declivi hispanico hucusque nondum reperta fuerunt.*

Vay., con referencia á *Companyo* la supone en Prats de Molló, subiendo á Notre Dame du Coral. Rouy (VIII.—276) afirma que es *planta exclusivamente francesa.* Gaut. (pág. 232) la señala en la *montagne de Ceret, Lègue de Corsavy, Saint-Laurent de Cerdans et Prats de Molló;* y Coste la refiere, entre otras localidades, á los Pir. Or.

60.—*Pulicaria sicula* Moris.

Además del Llano de Llobregat, donde ya la señaló Costa, abunda en los prados de Castelló de Ampurias,—Septb.

La *P. odora* Rchb., en Blanes (Llen.!), donde también la cita Costa.

61.—*Helichrysum decumbens* DC.

Rocas del Cabo de Creus, en el punto llamado *Sernella de Culip.*—May.

62.—*Filago arvensis* L.

Terrenos pizarrosos del Guitart, c. Tarrasa, r.—May.

63.—*Evax pygmæa* Pers.

Llenas, confirmando la cita de Vay., la encontró en Cinclans, c. de La Escala, única localidad segura, hasta ahora, de Cataluña.—Jun.

64.—*Cirsium eriophorum* Scop., ζ. *Corbariense* Rouy.—*C. eriophorum* Csta, *C. Corbariense* Senn.

Figueras, prados secos al pie del Castillo.—15 septb. 908 legi.

65.—*Rhaponticum cynaroides* Less.

Pastos de Pumero y Pto. de Pallars (Llen!)—Jul.

Había sido ya citado en el Valle de Arán por Costa é Isern.; pero no se indica en el Pir. Or., y por tanto no se confirma la cita de Colm. (Prodr. II.—174): *Coll de Tou* (será Collado de Tosas ó Coll de Jou?), *versus Puigcerdá*.

66.—*Serratula tinctoria* L.; γ. *polycephala* Rouy.

Setos de S. Hilario.—Ag.

67.—*S. monticola* Bor.—*S. tinctoria* β. *montana* Gren.—*S. tinctoria* L., form. *macrocephala* Bert., ε. *monticola* Rouy.

Valle de Arán, pastos del Canal de Pumero (Llen.!).—Jul.

68.—*Tolpis barbata* Willd.

Presenta muy dilatada área de dispersión, pues no sólo se extiende desde Calella á Prats de Molló (Csta., Vay.), sí que también desde Mollet al Cabo de Creus.-May.

69.—*Arnoseris pusilla* Gaertn.—*Hyoseris minima* L.

Sembrados de Sta. Fe de Montseny, frente á *Can Mas*.—Jul.

Vay. lo refiere á los campos de Espinabell y Molló; Coste lo da por raro ó nulo en la región mediterránea, y Gaut. lo indica en las costas secas y arenosas de la región de la haya.

70.—*Thrincia tuberosa* DC.

Contra lo que se ha dicho, es frecuente en Cataluña, como había afirmado Salv., pues además de abundar en Gavá, la hemos visto en el Ampurdán, desde La Escala y Ampurias al Castillo de Figueras, internándose desde allí hasta Lladó y Beuda, según Vay. También se halla en La Sellera (Cod.!) y en el Campo de Tarragona. Ver.

71.—*Tragopogon porrifolius* L.

Prados secos al pie del Castillo de Figueras.—1 Jun. 1908 legi.

Costa cita esta planta como poco cultivada; pero en la expresada localidad parece enteramente espontánea.

72.—*Taraxacum palustre* DC.—*T. paludosum* (Scop.) Schlechtr.

La Sellera, á orillas del Ter. r. (Cod!)

Parece que solo Wk. lo había señalado en el Llano del Llobregat, en Cataluña, y Reverchon en parajes pantanosos de Serres (La Coruña) (Hand.—Mzt., *Monographie der Gattung Taraxacum*.—81).

73.—*T. megalorrhizon* (Forsk.) Hand.—Mzt.—*T. gymnanthum* DC.

La Escala, sitios áridos y orillas de los caminos, hacia la *Clota*, nada escasa. —17 Setpb. 1908 legi. (Vidit Pau).

Sin duda se encontrará en otros puntos inmediatos al Golfo de Rosas esta interesante especie, nueva para la Flora española.

74.—*Leontodon hispanicum* Mérat.

Sierra de Cañellas (Lérida).—May.

Esta planta, que en su dia remitimos á Vay., aparece en su trabajo póstumo como *Spitzelia cupuligera* Dr.?, sin duda por ignorar que, determinada por Pau, la habíamos publicado ya con su verdadero nombre.

75.—*Lactuca chondrillæflora* Bor., forma de la *L. viminea* Link., sec. Rouy. *L. viminea* var. *chondrillæflora* Car.

La Sellera, camino de Osor, r. Cod.!)—Ag. 907.

Difiere de la *L. viminea* Link. por las hojas inferiores mucho mayores (hasta 20 × 14 cm.). sinuato-bi-pinnato-partidas, con lacinias lineares; tallo *fistuloso*, con las ramas *abiertas*, no erguidas; *5 lígulas*, de un *amarillo vivo por ambas caras*, una vez más largas que el periclinio; pico del aquenio de unos 2 mm., ó sea la *mitad del aquenio*, que mide 5 como en el tipo, cuyo pico iguala al fruto.

Costa lo refiere al Valle de Arán, c. de Viella, y los autores de floras pirinaicas no la mencionan ó la dan como sinónima de la *L. viminea* Link.

76.—*Prenanthes purpurea* L.

Presenta una área de dispersión bastante extensa, puesto que se ha visto en el Bergadán (Puj. C.!), Montseny (M.° Masferrer!), Matagalls (Sallent!) y Artiga de Lin (Llen.!)—Jul.

77.—*Pterotheca sancta* Schultz.

Abundante en tierras labrantías inmediatas al Castillo de Figueras.—1 jun. 1908 legi.

78.—*Sonchus Dianæ* Lacaita.—*S. pectinatus* DC.—*S. tenerrimus* β. *perennis* Lge.

Abundante en rocas y olivares de Cadaqués y La Escala.—May.—Septb.

Vay. y Bub. lo indicaron ya en el primero de los expresados puntos, y el segundo lo señaló, además, en Palamós y San Feliú de Guíxols.

Lo que distingue al punto esta planta del *S. tenerrimus* L., es. además del tallo leñoso y *macizo* y de los pedúnculos generalmente glandulosos, la regularidad de los segmentos foliares más apretados, más cortos y dirigidos hacia atrás. La planta de Denia, á juzgar por un ejemplar remitido por Pau, se aparta menos del tipo linneano.

79.—*Mulgedium Plumieri* DC.—*Sonchus Plumieri* L.

Parajes herbosos de Viella (Llen.!)—Jul.

Isern, Costa, Zett. y Bub. lo refieren á otros puntos del Valle de Arán. También se ha citado en el *Salt del Sastre*, de Nuria, donde hasta ahora lo hemos buscado en balde.

80.—*Campanula latifolia* L.

Señalada por Costa en el Valle de Arán y en Baguergues y Salardú por Timb., hallóla también Llenas en Artiga de Lin..—Jul.

81.—*C. subpyrenaica* Timb.—*C. persicifolia* L., δ. *lasiocalyx* G. et G.

No parece que haya diferencias esenciales respecto de la magnitud de las flores y forma de las hojas entre esta planta y el tipo como se indica en el Supl. del Prodr. (pág. 129); pero sí que son manifiestas en el indumento del tubo del cáliz, cubierto de cerditas apretadas y reflejas.

Señalada por Pau en Montserrat, nos ha sido remitida por Codina, de La Sellera.—May.—Jun.

82.—*Pyrola minor* L.

Bosques de Artiga de Lin, Viella y Tredós con la *P. secunda* L., en el primer punto (Llen.!)—Jul.

Zett. la señaló en el Portilló y Vay. en el Pir. Or., junto á la frontera.

83.—*Utricularia minor* L.

Valle de Arán, sitios aguanosos de Ruda (Llen.!)—Jul.

La única cita que vemos de esta especie es la del Prodr. (II.—634), que dice: «in uliginosis ad Lugo Galleciæ (Lge.)»

84.—*Androsace pyrenaica* Lamk.—*Aretia pyrenaica* Lois.

Rocas del Pto. de Benasque (Llen.!)—Jul.

Como rara la cita allí el Prodr. con referencia á Boileau.

85.—*Menyanthes trifoliata* L.

Valle de Arán, sitios aguanosos de Ruda (Llen!)—Jul.

Colm. la refiere á Set-Cases y Puigcerdá, y Gaut. á la Cerdaña.

86.—*Pulmonaria affinis* Jord.—*P. saccharata* Mill.

No solamente en Ribas y Ripoll, sí que también en el Valle de Arán, en la Ribera de Viella (Llen.!)—Jul.

Esta es, á nuestro entender, la especie más difundida por Cataluña.

87.—*Lithospermum Apulum* Vahl.

Además de Lérida y Montcada, lo hemos visto en los prados secos al pie del Castillo de Figueras. También en Cadaqués (Trem.!) y en alguna otra localidad de la provincia de Gerona (Vay.)—Abr.—May.

88.—*Echium creticum* L.

Abundante en Cadaqués y partes altas inmediatas en dirección á Rosas, en las orillas de los caminos y terrenos incultos.—Abr.—May.

89.—*Linaria italica* Trev.—*L. genistæfolia* DC. (Suppl. Prodr.—178).

Junto á la carretera que conduce de Castelló á Cadaqués, hacia Rosas. —May.

También Trem. la cita allí y Vay. en algún otro punto del Ampurdán.

90.—*L. vulgaris* Mill.

Como dice Costa, no es vulgar en Cataluña. No la hemos cogido todavía. Llenas la trajo de Vilac, en su excursión al Valle de Arán.—Jul.

91.—*L. petræa* Jord. (Coste.—III.—19).

Pto. de Viella (Llen.!)—Jul.

Como *Species nomine tantum nota, incertæ sedis,* de este género, dice Wk. en el Suplemento del Prodr. 178: «L. petræa *Bub.* indicatur in Pyren. Aragoniæ (Vallier)». Ignoramos si la planta de *Bubani* es la misma que la de *Jordan.*

Coste la refiere al Pirineo, sin concretar localidad alguna.

92.—*L. supina* Des.; ε. *glaberrima* Freyn (Suppl. Prodr. 177).

Rocas del Cabo de Creus, *Sernella de Culip.*—2 may 1903 leg. Cad. et Llen.

La única cita española que de esta variedad hay en el Prodr. es: *in Aragonia australi* (Sierra de Camarena, Reverch.!—Jun. 1892).

La *L. striata* DC., no sólo abunda en el Pir. Or., sí que también en el Alto Ampurdán, como en las inmediaciones del Golfo de Rosas, Figueras, Afra, etpassim.

93.— *Veronica præcox* All.

Señalada por Vay. en Camprodón, cogímosla en el pico mismo de las Agudas de Montseny, mezclada con otras varias congéneres, el 2 de julio último.

94.— *V. acinifolia* L.

Común en tierras cultivadas de Vidreras, cerca del Empalme (Llen.!)—Marz.

Parece que sólo había sido indicada vagamente en la Cerdaña por Ortega exColm in litt. (Prodr. II.—597).

95.— *V. verna* L.— *V. triphyllos* auct. cat. (non L).

Agudas del Montseny.—2 jul.—1908 legi.

Aún cuando se trata de especies distintas y de diferente sección, fáciles de distinguir, entre otros caracteres, por presentar la *V. verna* L. las semillas *planoconvexas*, y la *V. triphyllos* L., *pelviformes*, no cabe duda de que se han confundido en Cataluña, habiéndose publicado la primera con el nombre de la segunda en el tomo IX, pág. 58, de los Anal. de la Soc. Española de Hist. Natural y en alguna otra obra contemporánea.

Sin embargo, justo es confesar que el error no debió luego pasar inadvertido por Costa, puesto que en el mismo pliego de su herbario que contiene dicha planta, se ve una etiqueta de propio puño y letra, que dice textualmente: *V. triphyllos* L. *apud nos deest ut videtur.* (1)

96.— *V. Dillenii* Crantz.— *V. verna* L. var. *longistyla* Ces., Pass. et Gib.

Planta parum cognita, nova Floræ Hispaniæ, sec. Pau.

Por eso consideramos oportuno dar su descripción en vista de los ejemplares que hemos recogido.

Planta 5—15 cm., caule erecto, simplice vel paululo ramoso, inferne pubescente, superne glanduloso-puberulo, ramis erectis; foliis inferioribus petiolulatis, ovatis, subintegris caulinis 3—5 partitis partitionibus lanceolato linearibus, terminali reliquis majore; racemo elongato, laxiusculo, bracteis linearibus, pedicelo longioribus, calycis laciniis subæqualibus; lineari-lanceolatis, vix capsulam superantibus; corolla calyci æquante vel eum parum superante; capsula compressa, suborbiculari, breviter emarginata, puberulo-ciliata, loculis 9—12—spermis; stylo exerto, 1 mm. longo.

A *V. verna L., cui valde affinis, caule robustiore, sepalis subæqualibus. vix fructum superantibus, capsula suborbiculari, majore (5 mm. diam·),*

(1) En la Memoria correspondiente al año anterior, pág. 14, dimos como nueva para la Flora catalana la *V. verna* L., por no habernos sido entonces posible consultar el trabajo póstumo de Vay. sobre *plantas catalanas*, publicado en los *Anal. de la Soc. Esp. de Hist. Natural*, en el cual, según hemos visto después, se hace mención de dicha especie. Lo mismo decimos de una ó dos plantas más que por igual motivo se consignaron también como nuevas.

leviter (non profunde) emarginata; stylo exerto, duplo vel triplo longiore; loculis 9—12—spermis, differt.

Ad rupes *Agudas* Montseny, die 2 jul. 1908 *legi* (Vidit Pau).

97.—*V. saxatilis* Jacq.—*V. fruticulosa* var. *pilosa* G. et G.

Citada en los Ptos. de Viella, La Picada y Benasque, por Costa y Zett., ha sido recolectada entre las rocas del segundo por Llenas—Jul.

98.—*Euphrasia pectinata* Ten., var. *puberula* Wettstein.

Parajes herboso-húmedos de la *Font de Tagast*, en el Bergadán.—26 Jul. 1905 legi.

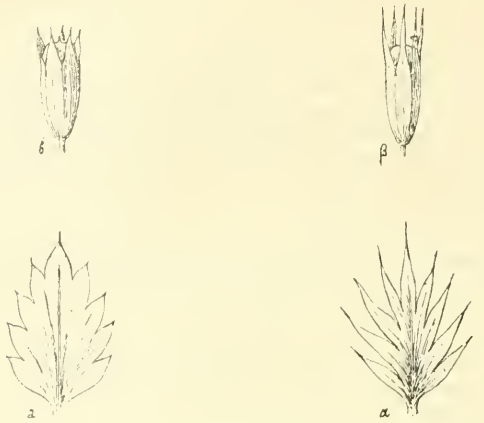


LÁMINA II.

a, *b*. Hoja y fruto de la *Euphrasia pectinata* 2 : 1

α, β. Hoja y fruto de la *Euphrasia Marcetí* sp. nov. 2 : 1

99.—*Euphrasia Marcetí* Cad. et Pau. sp. nov. (Fig.s α et β). (Lám. II).

Planta 10—30 cm. alta, caule erecto, gracile, simplice vel in basi paululo ramoso, ramis erectis, pilis crispulis reversis brevibus obsitis; foliis bracteisque ovatis, cuneatis, acutis, viridibus, tenuibusque, utrinque dentibus 3—4 longissime aristatis, glabris. Spica valde elongata, laxa; calyce 5—6 mm., subglabro, dentibus aristatis atque patulis tubo ejusdem æquantibus; corolla 7—10 mm., lilacina-alba, striis violaceis notata, valde patula, labiorum lobis emarginatis, subtus puberulis. Capsula 5—6 mm. cuneata, truncata, dentibus calycis longe superata, pilosa et in margine ciliata.

A E. pectinata Ten., cui simillima est, caule graciliore, foliis bracteisque tenuioribus atque dentibus magis aristatis, capsula breviore atque dentibus calycis longioribus, differt.

In nemorosis Montserrat, prope Sancta Cecilia die 2septembris 1884 legi et unde mihi-nuper a P. Marcet ea remissa fuit.

100.—*E. salsburgensis* Funck.—*E. officinalis* δ. *alpina* G et G. (Wettstein.)

Puigllançada y *Pedró dels Quatre Batlles*, en el Cadí (Sallent!).—5—VIII—1908 legit.

En Cataluña, solamente Timb. la señala en Tredós, y Vay. en la Montaña del Mont. Por lo que dice Gaut., no escasea en el Pir. Or. francés y creemos que tampoco en el español.

101.—*E. minima* Jaq.—*E. officinalis* γ *parviflora* G. et G. (Wettstein—152).

Citada por Trem., Zett. y Lge. en los Ptos. de Benasque y de la Picada, trájola Llen. de los prados secos de Saburedo.—Jul.

102.—*Rhinanthus major* Ehrh.; forma *R. arvensis* Chab.

Prados secos de Saburedo, en el Valle de Arán (Llen.!)—Jul.

103.—*Pedicularis comosa* L.; β *asparagoides* G. et G.

Indicada por Vay. en las Agudas de Montseny, cogímosla en las inmediatas rocas de Puigsacarbassa, á primeros de julio último, y de allí también nos la remitió posteriormente el Sr. Masferrer, Mariano.

Esta es la planta designada por Colm., quien debió de verla en el herbario Salv., como *P. tuberosa* L., sin duda por la forma de las raíces, que por otra parte no difieren esencialmente en ambas especies; pero basta fijarse en los dientes cortos y obtusos del cáliz y en los terminales del pico de la corola, para distinguirla sin dificultad alguna.

El tipo de la *P. comosa* L. lo hemos recolectado en Nuria, junto al *Salt del Sastre*, y se distingue perfectamente de la planta del Montseny por su espiga más floja, doble larga (de 15 á 20 cm.) y corola rojiza, aunque este carácter no parece tan constante.

104.—*Lathræa clandestina* L.

Parajes umbrosos de Artiga de Lin (Llen.!)—Jul.

Había sido indicada como rara por Costa en el propio Valle de Arán.

La *L. squamaria* L. no parece ser más frecuente que la anterior, puesto que Vay. sólo la cita en dos localidades y nosotros únicamente la observamos hace años abundante sobre las raíces del avellano en S. Llorens del Munt; pero también pudiera ser su rareza más aparente que real, á causa de su precoz florescencia, de manera que ya no quedan vestigios de la misma en la época normal de las excursiones.

105. *Calamintha nepetoides* Jord.—*C. officinalis* var. *nepetoides* Costa.

Abundante en parajes áridos de Figueras.—Septbre.

106.—*Salvia Verbenaca* L., forma *longistyla*.

Al pie de la carretera que, desde la ciudad, conduce al Castillo de Figueras.—Septbre.

Es una forma curiosa de esta especie polimorfa.

107. —*Lamium Galeobdolon* Chrantz.

Bosques de Viella, r. (Llen.!)—Jul.

Solamente citado en la comarca de Olot (Bolós) y en la Dehesa de Gerona y Blanes (Salv!).

El de S. Llorens del Munt, Montseny, et alibi es el *L. flexuosum* Ten.

108.—*Stachys arvensis* L.

A las pocas localidades catalanas en que se ha citado, debe añadirse La Sellera, r. (Cod.!) y Blanes, donde no escasea (Llen!). —May.

LÁMINA III.

b. Hoja de la *Stachys annua* L., var. *Llenasi*, var. nov. 1 : 1

a. Hoja de la *Stachys annua* L.

109.—*St. annua* L. var. *Llenasi* mihi (Fig. b). (Lám. III.)

Foliis longe petiolatis, late ovatis; et basi rotundata floralibus autem calyce longioribus; corollæ labio superiore roseo, a typo differt.

In agris Castelló de Ampurias (Llen.!)—May.—Jun.

110.—*St. brachyclada* de Noé.—*St. hirta* var. *parviflora* de Noé.

Parajes pedregosos del Cabo de Creus.—2 mayo 908 legí.

Por el trabajo póstumo de Vay, vemos que tanto él como Trem. la habían observado ya en dicho sitio. No creemos que se haya encontrado en otro punto de España. Gaut. la cita en el Cabo Cerbère.

La *St. ambigua* Sen. se ha encontrado también en S. Pere Pescador, al pie del Golfo de Rosas.

111.—*Betonica Alopecuros* L.

Rocas de Pumero (Llen.!)—Jul.

Fué vista por Costa desde el Pto. de Pallars á Esterri de Aneo y Ptos. de los Pir. centrales, y por Isern en el Valle de Arán.

112.—*Sideritis hirtula* Brot. – *S. ruscinonensis* Timb. (Coste—III—126).

Abundante al rededor del Castillo de Figueras—15 septbre.—908 legi.

Aunque muy afine de la *S. hirsuta* L., difiere principalmente por tener las flores totalmente amarillentas, los glomérulos más numerosos y apretados en largas espigas.

113.—*Scutellaria galericulata* L.; β *emporitana* Vay.

Parajes herboso-húmedos de Castelló de Ampurias, no escasa á un km. al N. de la población.—16 septbre. 908 legi.

Citada por Vay. como r. r. en Cortals de Castelló, recogida por Llen. el año pasado y estudiada por nosotros *in situ*, como deseaba Vay., no hemos podido deducir otra diferencia entre la planta catalana y las descripciones de G. et G. y Coste, que el presentar aquélla el *cáliz floral pubescente*, en vez de *lampiño* ó *glanduloso*.

Las hojas, en los muchos ejemplares observados, miden de 2 á 3 cm., son aovado-cordiformes y solo parecen diferir del grabado de Coste por ser, como dice Pau, *parum brevioribus*. De todo lo cual se infiere que si puede admitirse la variedad, no hay diferencias especificas bastantes para formar una nueva especie, comprendida entre la *Sc. galericulata* L. y la *Sc. hastifolia* L., con lo cual queda desvanecida la duda que, por no haber *estudiado vivos los órganos florales y el fruto*, abrigaba Vay. (Obra póstuma—78).

114.—*Plantago carinata* Schrad.

Creemos, de acuerdo con lo que ya sospechaba Costa, que á esta especie, y no á la *P. subulata* L., pertenece la planta del Montseny y Cadaqués.—May. —Jul.

115.—*Armeria ruscinonensis* Gir.

Rocas del Cabo de Creus, donde ya la citaron Trem. y Vay.—May.

116.—*A. filicaulis* Boiss.

Referida por Timb. á Salardú, Tredós, Valle de Baños, c. Mongarri y Bonaigua, la trajo Llen. de Aiguamoix.—Jul.

117.—*Statice serotina* Rchb.

No sólo en el Prat de Llobregat, sino que infesta algunos campos del Ampurdán; como en Castelló de Ampurias, donde se destacan de lejos por el tinte violáceo que les comunica.—Septbre.

La *St. virgata* Willd., no sólo en el litoral de Barcelona, sí que también abunda en el de La Escala.—Septbre.

118.—*Phytolacca decandra* L.

Abunda en márgenes y setos de Gualba, al parecer completamente espontánea.—Jul.

119.—*Atriplex crassifolia* G. et G.—*A. Tornabeni* Tint. (Coste—III—177).

Arenales marítimos de La Escala, en el punto llamado la *Clota*—18 sptbre.—1908 legi.

No hallamos cita alguna de esta planta en España, puesto que el Prodr.—(I—269) la incluye entre las *Species inquirendæ* diciendo: *in Gallia australi, fortasse in Catal. v. regno Valentino;* pero el Prodr. se refiere á la *A. crassifolia* Mey. (non G. G.), que se da como var. de la *A. rosea* L.

A nuestro entender, la planta de La Escala es muy distinta de la *A. Rosea*, que hemos visto en varios puntos de Cataluña.

Coste refiere la *A. Tornabeni* Tin. al litoral del Mediterráneo, y Arcangeli á la Italia meridional.

120.—*Chenopodium hibridum* L.—*Ch. angulosum* Lamk.

Cultivos de Viella (Llen.!)—Jul.

Fué citado por Costa en S. Juan del Herm *et usque ad vall. de Aran in Pyr.*, y también en el litoral, y por Vay. en algunas localidades de Gerona.

121.—*Kochia prostrata* Schr.

Paredes de la Iglesia de Ampurias y sitios áridos del Alto Ampurdán, Figueras, Castelló, etc.

122.—*Rumex tingitanus* L.

Arenales marítimos de La Escala—18 septbre.—1908 legi.

El año anterior lo había también cogido Llenas. Vay. lo refiere á la misma localidad y otras inmediatas de la costa,

123.—*Passerina calycina* DC.—*Thymelaea calycina* Meissn., α *glabra* Lge.

Rocas de Saburedo (Llen.!)—Jul.

Propia del Pir. central, solamente Lap la indica en el Pla de Beret, y Costa en el Pto. de Pallars y Sierra de Ruda.

124.—*Aristolochia Clematitis* L.

Márgenes y tierras de cultivo en Castelló de Ampurias, abundante como mala yerba. Desciende hasta Malgrat (Llen.)—May.—Septbre.

125.—*Quercus pedunculata* Ehrh.

Referido al Pir. y montes de Olot por Vay , nos lo ha remitido M.° Masferrer, de Collsacabra.

126.—*Euphorbia palustris* L.

Parajes pantanosos próximos á La Escala (Llen.!)

Unicamente Bolós, ex Costa, la señala en las cercanías de Olot.

Gaut. dice: *Xatard l'indique aux environs de Prats de Molló, où sa présence nous paraît au moins douteuse.* Bub. (I.—108) consigna: *ad Perpignan vidit* Timb.

La *E. hiberna* L., que el año pasado señalábamos en Montseny, también cerca de Viella, y la *E. dulcis* L., en Artiga de Lin (Llen.!).

La *E. dendroides* L. parece localizada cerca de Cadaqués, en la ladera y torrente de S. Pio V, donde ya en 1851 la vió Bubani.

127.—*Salix fragilis* L.—*S. decipiens* Hoffm. (Lap. 596).

Armentera, orillas del Fluviá (Llen.!)—May.

Por más que el Prodr. dice *per Hispaniam omnem hinc inde culta et spontanea*, no la vemos citada por los autores catalanes. Lap. la refiere á Tolosa y Gaut. la da como cultivada y espontánea junto á las aguas de la llanura y de los bajos valles.

128.—*Alisma ranunculoides* L.

Prados pantanosos de Castelló de Ampurias á Palau.—3 may.—1908 *legi*.

Costa lo considera raro en Cataluña; pero no lo parece en el Alto Ampurdán. Salv. lo señaló en La Llacuna, y Vay. en el Plá de la Piña (Olot).

El *Triglochin palustre* L. en sitios inundados de la Ribera de Viella (Llen.!) —Jul.

129.—*Narthecium ossifragum* Huds.

Terrenos aguanosos al pie de la Picada (Llen.!)—Jul.

Zett. ex Costa lo señala al pie del Pto. de Benasque hacia Luchon.

También Tex. ex Vay. lo indica en Nuria, donde no lo hemos observado en ninguna de las muchas excursiones que allí hemos efectuado.

También recogió Llenas al pie de la Picada la *Tofieldia calyculata* Wahl.

130. *Scilla verna*. Huds.

Parajes pedregosos de la Picada (Llen.!)—Jul.

También en Bosost (Timb. in hb. Cad.). Contra lo que se ha dicho, no parece hallarse en el Pir. Or.

La *Sc. autumnalis* L., abunda, realmente, en la provincia de Gerona, puesto que además de varias citas de Vay. la tenemos de Cadaqués (Trem.!), S. Pere Pescador (Llen.!) y S. Martín Sapresa, c. La Sellera (Cod.!)

131.—*Streptopus amplexifolius* DC.

Rocas húmedas de Tredós, en el Valle de Arán (Llen.!)—Jul.

Ha sido también indicado en algunos puntos del Pir. Or. por Isern y Vay.; Collsacabra (M.º Masferrer!).

132.—*Galanthus nivalis* L.

No solo en los Pir. Or. de Costabona y Camprodón y en el Pla de la Piña y otros de la cuenca del Fluviá, si que también abundante en Vidreras (Llen.!)— Abr.

133.—*Aceras densiflora* Boiss.

Después de haber señalado hace años la presencia de esta planta en San Llorens de Munt y otros puntos del Vallés, la encontramos más tarde en la región litoral, sobre Gavá, y en mayo último en Cadaqués, en la cuesta de S. Pio V, lo que prueba que su área es muy extensa.

134.—*Ophrys arachnitiformis* Gren. et Philip. (Coste.—III—391).

No podemos referir á otra especie esta planta que Codina nos remitió de La

Sellera, pues la falta de gibosidades en la base la separan de la *D. arachnites* Murr. y la brevedad y dirección del apéndice terminal del tablero la distinguen de la *D. Bertolinii* Moretti, de las cuales debe ser muy afine.—Abr.

135.—*Goodyera repens* R. Br.

Valle de Arán, bosques de Baricauba, r. (Llen.!)—Jul.

El Prodr. (I—177) la coloca entre las *Species inquirendae,* diciendo: *in Pyrenaeis gall., fortasse etiam in hispanis.* Bub. (IV—54) la señala *in Pyr. septr. med. editioribus, rarissima.* Ex *Saleix* stat in Lapeyrousei Herbario.

Gren. et Godr. la indican también in Pyr., *Saleix* et *Luchon.* Coste (III—408) la refiere á los bosques de las montañas del Este, del Centro y del Mediodía; Gaut. no hace mención de ella, y Arcangeli (162) dice que se encuentra en los bosques de pinos y abetos de los Alpes.

136.—*Potamogeton lucens* L.

Referido por Costa al llano del Llobregat, y por Puj. J. á la marina de Blanes, hállase también en las aguas de Ampurias (Llen.!)—May.

137.—*P. densus* L.; β. *laxifolius* G. et G.

Aguas estancadas de Ampurias (Llen.!)—Jul.

138.—*P. crispus* L.

Común en las aguas estancadas de Castelló de Ampurias, Palau, et alibi.—May.

139.—*P. pectinatus* L.

No solo en las aguas de Castelldefels (Csta., Vay., Puj. C.!), si que también en La Sellera (Cod.!) y en el canal de La Escala.—May.—Septbre.

El *P. natans* L. en diferentes puntos del Ampurdán (Vay.), Cadaqués (Llen.!) y Viver, del Bergadán (Puj. C.!), y el *P. fluitans* Roth., en las aguas de Castelló de Ampurias con otras especies y la *Hydrocaris Morsus-ranae* L.

140.—*Najas major* Roth.

No solo en las lagunas de Salou, Tarragona, donde la señalamos hace años, si que también en las aguas de Castelló de Ampurias, mezclada con los *Potamogeton.*—16 sptbre.—1908 legi.

141.—*Sparganium minimum* Fries.

Aguas del Pto. de Pallars y de la Ribera de Ruda (Llen.!)—Jul.

Zett. y Gr. G. lo refieren al Pto. de Benasque; Bub. y Gaut. lo señalan en la Cerdaña.

Nuestra planta, por sus hojas dilatadas en la base y las cabezuelas masculinas á veces en número de 2-3, se aproxima al *Sp. affine* Schnizl., que sólo conocemos por la descripción; pero por la pequeña talla de la planta, parece corresponder al *Sp. minimum* Fries.

142.—*Juncus subulatus* Forskal.—*J. multiflorus* Desf.

Parajes húmedos del Prat de Llobregat.—Jul.—Ag.

La única cita que hallamos de esta especie en Cataluña es de Bubani, quien dice (IV—180): «legi in Pyr. Catal. ad. *Rosas*, die 21 jun. 1851. E viciniis de *Nar-*

bone habeo á Delort». Coste lo refiere á la región mediterránea; Gr. et. G. lo señalan en Tolón, Montpeller, Narbona, etc.; pero no lo consigna Gaut.

143.—*J. alpinus* Vill.

Terrenos húmedos de Artiga de Lin (Llen.!)—Jul.

Refiérelo Vay. á Nuria, Tragurá y la Toza.

J. Fontanesii Gay.—J. lagenarius Gay.

Litoral de Barcelona, c. la Farola (Llen.!)—Ag.

El Prodr. (Suppl.—46) únicamente lo refiere á Jerez y Gibraltar.

Vay. dice que «uno de Ciurana y Basea, que se parece al *J. lamprocarpus* Ehrh., tiene las piezas perigonales externas é internas agudas, podría ser quizá *J. lagenarius* Gay., pero no tiene los ramos extra-axilares, etc.» Coste lo supone en lugares húmedos de la región mediterránea y lo mismo afirman Gr. et G. Tampoco lo señala Gaut.

Un *Juncus* cogido por C. Pujol, en Clariana (Lérida), parece ser el *J. Gerardi* Lois., muy afine del *J. compressus* Jacq., lo cual por el estado de la planta no se puede asegurar.

144.—*Luzula pilosa* Willd.—*L. vernalis* DC.

Bosques de Artiga de Lin (Llen.!)—Jul.

En el Pirineo catalán, dice Colm. ex Wk., con aquella vaguedad que le es propia: probablemente en el Valle de Arán, añade Costa; en el Conflent y Bernet les Bains, según Gaut.; nula en la región mediterránea, afirma Coste. No la menciona Bub.

145.—*L. pediformis* DC.

Citada por Costa en los Ptos. de Benasque y la Picada y por Vay. en los peñascos de la Toza, fué recogida por Llenas á orillas del *Río Negro*, junto á Viella.—Jul.

La *L. silvatica* Gaud. en Artiga de Lin, y la *L. spadicea* DC., en Benasque, en cuyo Pto. la señaló ya Costa.

146.—*Cyperus setaceus* L., β. *pseudo-Savii* Pau.

Parajes húmedos de Serrateix (Puj. C!)—May.

147.—*C. diformis* L.

Litoral de Barcelona, casa Antúnez (Puj. C.!, Llen !)—Ag.—Oct.

In regno Valent. (Pourr. hb.), dice el Prodr., referente á esta especie procedente del Africa ó del Oriente. Ni Coste ni Gaut. hacen mención de ella; Arcangeli la refiere á sitios pantanosos de la Italia superior y á Sicilia.

148.—*Carex pyrenaica* Vahl.

Pastos del Pto. de Viella (Llen.!)—Jul.

Hállase, realmente en el Pir. Or., como sospechaba Costa, pues si bien no lo citan los autores catalanes, Bub. lo señala sobre *Set-Cases* y Gaut. en los altos de Nuria.

149.—*C. Schreberi* Schrank.

La Sellera (Cod.!)—Abr.

No lo citan los bótanicos catalanes, y el Prodr. únicamente lo menciona en Aranjuez y en Játiva. Creemos, sin embargo, que no debe ser tan raro; pero seguramente se le confunde con el *C. Chaetophylla* Steud *(C. setifolia* God.), cuyo porte presenta, pero del cual es fácil distinguirlo por llevar las espiguillas femeninas en el *ápice,* y no en la *base,* y los utrículos con una *estrecha ala* desde la parte media á la superior.

150.—*C. echinata* Murr.—*C. stellulata* Good.

Prados húmedos de Sta. Fe de Montseny, abundante.—Jun.

Llenas lo trajo también de la Picada y de Viella. Vay. lo cita en lugares turbosos de Nuria; Lap. en Prats de Molló y Bub. en *Artigues* (Artiga de Lin ó en *Arties?)*

151.—*C. Linkii* Schk.

No solamente en la comarca del Vallés, de donde la publicamos hace años, si que también en la provincia de Gerona, puesto que á primeros de mayo la recogimos en la *Sabolla,* de Cadaqués.

152.—*C. hispida* Willd.

Referida por Vay. á las lagunas de *Porqueras,* Bañolas, hállase en las acequias de Lérida. Equivocadamente se dió por *C. paludosa* Godr. en la *Flora del Vallés.*—Jun.—Septbre.

153.—*C. riparia* Curt.

Aguas estancadas de Castelló de Ampurias, hacia Palau.—May.

Wbb. lo indica cerca de Tarragona, y Vay. en aguas de la Piña, c. de Olot.

154.—*C paludosa* Godr.—*C. acutiformis* Ehrh. var. *Kochiana.*—*C. Kochiana* DC.

Prados húmedos de Castelló de Ampurias, á 1 km. norte de la población.—May.

Gaut. lo señala en Colliure, *Pla de las Forcas.*

155.—*C. ampulacea* Good.

Aguas estancadas de Pallars, Aiguamoix y Ribera de Ruda (Llen.!)—Jul.

Idéntica á un ejemplar cogido por Reuter *in paludibus Mtium Jurae.*

En el Prodr. (1—129) hallamos esta única cita: *in paludibus regionis alpinae Astur.* (Pico de Arvas, Dur.).

Bub. afirma haberlo visto en *Montlouis,* Pir. Or. y Gaut. en la Cerdaña.

156.—*C. sempervirens* Vill.

Pastos secos de la Picada (Llen.!)—Jul.

En el mismo sitio lo cita Bub., y Zett. en el Pto. de Benasque.

También en el Valle de Eyne y otros puntos del Pir. Or. (Gaut.).

157.—*Mibora verna* P. B.

Además de varias localidades del Alto Ampurdán (Vay.), en Vidreras, c. del Empalme (Llen.!)—Abr.

158.—*Panicum glabrum* Gaud.—*Digitaria filiformis* Koel.

Campos de Vidreras, c. (Llen.!)—Jul.

Unicamente Vay. lo cita en terrenos cultivados de Olot.

159.—*Calamagrostis arundinacea* Roth.

Referida por Vay. á los pastos de Tozas, La Molina, Cerdaña, Eyne y Nuria, fué también recolectada por Llen. en Viella.—Jul.

160.—*Agrostis alpina* Scop.

Además de los Rasos de Peguera, donde la cogimos en julio de 1905, en el *Pedró dels Quatre Batlles,* Cadí (Sallent!)—Ag.

161.—*A. Castellana* Boiss. et Reut., var. *mutica* Hack.

Pastos de Puigllançada y *Pedró dels Quatre Batlles* (Sallent!)—Ag.

No parece diferir de la remitida por Pau, procedente de la Sierra de Espadán. Obsérvase alguna variación en las lígulas, cortas en las hojas inferiores y algo más largas en las superiores.

162.—*Stipa capillata* L.

Prados secos al pié del Castillo de Figueras, 15 septbre. 1908 legi.

Las unicas citas auténticas que hallamos de esta especie en Cataluña son: *Villacoluma sub Figueras* (Bub.—IV—297), y Cabanas, Vilarnadal (Plantas observadas en el Ampurdán por el hermano Sennen (Bolet. Soc. Arag. Cien. Nat.—Dicbre. 1905—pág. 30, por C. Pau).

163.—*Corynephorus canescens* P. B.

A las pocas localidades catalanas en que se ha citado, debe añadirse: yermos inmediatos á S. Marçal de Montseny, donde abunda.—Jul.

El *C. fasciculatus* P. B. se halla también en La Sellera (Cod.!).

164.—*Piptatherum cœrulescens* P. B.

Parajes pedregosos del Cabo de Creus.—2 may.—1908 legi.

Bub. y Vay. lo citan en Cadaqués, y el primero, además, en S. Feliú de Guixols.

165.—*Trisetum flavescens* P. B.

Citado por Vay. en los prados de la zona superior y del Alto Ampurdán, extiéndese también hacia el Sur, puesto que Codina lo ha cogido en Contestin, c. La Sellera.—Jun.

166.—*Holcus mollis* L.

Parajes herboso-húmedos de La Sellera, r. (Cod.!)—Jul.

Unicamente Masf. lo encontró en Castanyadell, y Vay. en S. Hilario, hacia el Pla de las Arenas.

167.—*Schismus marginatus* P. B.

A las dos ó tres localidades catalanas en que lo hemos citado, debe agregarse: tapias y muros de Castelló de Ampurias, donde lo hallamos algo pasado á primeros de mayo último.

168.—*Danthonia decumbens* DC., *α. breviglumis* Wk.

No solamente en el Bergadán (Puj. C.!), si que también en Montseny (Llen.!) y en S. Martín Sapresa, r. (Cod.!)—Jul.

No la citan los autores catalanes. Unicamente Bubani (IV—336) dice: *ex*

Prats de Molló accepi á Massot. Gaut. la refiere al Valle del Tech y á La Presta.

169.—*Elymus europaeus* L.

Bosques de hayas de Artiga de Lin (Llen.!)—Jul.

Lap. (Hist. abrégée des plantes des Pyrénées—53) lo refiere á los bosques de Viella; Zett. á Artiga de Lin, y Bub. (IV—401) *ad Camprodon;* pero ni Gaut. ni otros autores franceses lo citan en el Pir. Or., por más que bien pudiera hallarse allí cuando se encuentra en el Piamonte é Italia meridional (Arcangeli—73).

170.—*Agropyrum repens* P. B.

Referido por Vay. á la zona superior, no escasea en Montserrat, camino de Santa Cecilia.—Jul.

171.—*Goulardia canina* Husn. —*Agropyrum caninum* R. et Sch.

Referido igualmente por Vay. á la zona superior, hállase también en Montserrat, camino dels *Degotalls.*—Jul.

Pourr. ex Wk. lo cita de igual modo en Montserrat.

172.—*Nardurus unilateralis* Boiss.—*N. tenellus* Rchb.

A las pocas localidades en que se cita, deben añadirse: Armentera (Llen.!); Miracle (P. Marcet!)—Jun.

173.—*Lepturus filiformis* Trin.

No solamente en el Prat de Llobregat, donde lo cogimos en jun. de 1907, si que también en La Escala y Ampurias (Llen.!).

174.—*Nardus stricta* L.

Parece que los botánicos catalanes lo refieren exclusivamente á la región pirenaica; pero abunda también en los prados de Santa Fé del Montseny, donde alcanza una talla doble mayor, por lo menos, que en el Pirineo.—Jul.

175.—*Botrychium Lunaria* Sw.

Además de Montseny, Rasos de Peguera, Nuria, Coll de Pal y otros puntos del Pir. Or.,abunda en el Valle de Arán, en los prados de Aiguamoix, donde alcanza mayor desarrollo que en los expresados sitios (Llen.!)—Jul.

176.—*Ophioglossum vulgatum* L., var. *polyphylla* A. Braun. (var. *ambigua* Coss.).

Citado el tipo por Bub. (IV—439) en el *Pla de Sirera*, sobre *Solsona,* por Vay. ex Bolós en las cercanías de Olot y por Puj. J. en el Valle de Carol, hacia Andorra, abunda la var. en sitios incultos de S. Pere Pescador (Golfo de Rosas), junto al mar. (Llen.!)—Jun.

El *O. lusitanicum* L. abundante en La Sellera, riera de Osor. (Cod.!)—Marz.

177.—*Notochlaena Vellea* Desv.

Rocas y sitios áridos de los altos de La Sabolla, en Cadaqués.—May.

Allí la habían observado ya Trem. y Llen.

La *N. Marantae* R. Br. no escasea al pié del *Salto de Gualba,* en Montseny, entre las piedras.

178.—*Gramnitis leptophylla* Sw.

No solamente hacia Tortellá (Cuffí) y Cadaqués (Trem.), si que también en La Sellera, Anglés, Osor, etc. (Cod.!)—Abr.

179.—*Polypodium Phegopteris* L.

Lugares húmedos del Pto. de Caldas y de Tredós (Llen.!)—Jul.

Fué indicado por Zett. debajo del Pto. de Benasque, y por Vay. en bosques y sitios húmedos de Set-Cases y Costabona, en cuyo último punto, lo propio que en el Valle de Llo, lo cita también Gaut.

El *P. vulgare* L.; β. *serratum* Gr. et. G., en Montserrat (Cad.) y en Cadaqués (Llen.!). El *P. Dryopteris* L. no escaso en el *Bosque de Sagalés*, y en Nuria; también en Tredós (Llen.!).

180.—*Aspidium aculeatum* Doll., subsp. *A. lobatum* Sw. (C. de Rey—Pailhade.—Les Fougères de France—13).

Bosques de hayas de Artiga de Lin. (Llen.!)—Jul.

Cítalo Rey-Pailhade, como raro, en los Altos Pir., Pir. Or. (Fuente del Segre).

El *A. aculeatum* Doll., subsp. *A. angulare* Mett.—*A. angulare* Willd. (Rey-Pailhade—15), que difiere principalmente del anterior por las frondas generalmente *caedizas* en invierno y por los lóbulos distintamente *peciolulados* y *auriculados* en la base por el borde superior, y que el Prodr. parece considerar como raro, es bastante común en Cataluña.

Conviene advertir que estas plantas son muy polimorfas y que según Robert du Buysson (Monographie des Filicinées—29), las *formas lobatum* Sw. y *angulare* Willd. del *A. aculeatum* L., no forman *variedades*, porque, mediante el cultivo, se obtienen de una misma planta frondes típicos ó intermedios.

181.—*Polystichum spinulosum* DC.

A las pocas localidades que le asignamos en la Memoria de 1907, hay que añadir el Pto. de Pallars, de donde lo ha traido Llenas.—Jul.

182.—*P. Filix-mas* Roth., var. *deorsó-lobata* Moore vel var. *incisa* Moore. (Rey—Pailhade—87).

Bosque y rocas de Baricauba, c. de Viella (Llen.!)—Jul.

En Baréges (Altos Pirineos), con el tipo, según el expresado autor.

183.—*Cystopteris montana* Bernh.

Ribera de Viella, del Valle de Arán, en algunos puntos del mismo, ya citado por Costa. (Llen.!)—Jul.

También se encuentra en el Pir. Or., puesto que Gaut. lo refiere á la Cerdaña y al Valle de Llo.

184.—*Asplenium lanceolatum* Huds.; β. *obovatum* Gren.

Rocas marítimas de Cadaqués, hacia la Sabolla, donde lo habían ya cogido Trem. y Llen.—May.

El *A. marinum* L., abundante también en Cadaqués, en el punto llamado *Cova dels Capellans*.

185.—*Blechnum Spicant* Both.

Es bastante menos raro en Cataluña de lo que se había creído, puesto que á las localidades conocidas hay que agregar: Sta. Fe de Montseny (Llen.!); Santa Creu de Horta, c. La Sellera (Cod.!), y Mallorquinas c. Sta. Coloma de Farnés (Font y Sagué!).—Jul.

LÁMINA IV.

1. *Pteris Codinæ*, sp. nov. 1 : 2.—2. Pínula (envés).—3. Borde de la pínula con esporangios.

186.—*Pteris Codinæ* Cad. et Pau, sp. nov. (Lám. IV).

Frondes caducæ, coriaceæ, limbo erecto, 5—15 cm. longo, petiolo nigro, ful-

gidoque parum longiores; ambitu ovato vellanceolato, bipinnatisecto, pinnulis 3 vel 5—lobatis, glaucis, glabris, manifeste petiolatis: sori lineares in serie marginali pinnulas circumdante dispositi; indusio lineari, continuo, integro, glabro atque persistente e margine frondis reflexo formato; nervis secundariis multoties divisis.

In fissuris inaccessarum rupium granitico-feldespaticis loco dicto el Pasteral, prope La Sellera (Gerundæ) Codina *(Novembre 1908 legit et nos ei libenter dicamus.*

Damos provisionalmente como especie nueva del género *Pteris* esta curiosísima planta, *cuyos próximos parientes no parecen existir en Europa*, y de la cual un más detenido estudio obligue, quizás, á formar un género distinto, comprendido entre el *Pteridium* Gledisch y el *Pteris* L. (1)

El *Allosurus crispus* Bernh. en el Pto. de Viella (Llen.!)—Jul.

187.—*Cheilanthes odora* Sw.

Después de haberla observado en Montserrat, Olot y Cadaqués, ha sido hallada por Sallent en S. Llorens del Munt, en las rocas umbrosas de la meseta, y por Llenas, con relativa abundancia, en el Tibidabo. Ultimamente observada en Tarrasa.

No es tampoco rara en la comarca de La Sellera (Cod.!)

188.—*Equisetum hiemale* L.

Riera de Viella, en el Valle de Arán (Llen.!)—Jul.

Aunque se ha indicado en varios puntos de Cataluña, y nosotros mismos respetando el parecer de otros en la *Flora del Vallés*, lo referimos á sitios aguanosos, creemos hoy que más de una vez se ha confundido con otras especies, singularmente con el *E. palustre* L. y alguna forma del *E. limosum* L.

189.—*E. variegatum* Schl.

Vista la *Monografía de las Equisetíneas* de Robert du Buysson, no podemos referir á otra especie una planta algo deteriorada de la sección *Hiemalia*, cogida por Llenas en Ampurias, á nuestro entender idéntica á la recolectada por Vay. cerca de Valldoreix del Vallés, y considerada por este botánico como forma del *E. hiemale* L., *enteramente igual á un ejemplar de Etruria*, que le remitió Levier, con el nombre de *E. variegatum* Schl.?

190. *Lycopodium Selago* L.

Esta especie, que no parece rara en los altos de Nuria, abunda en el Valle de Arán, especialmente en Aiguamoix y Safarrera (Llen.!)—Jul.

En cuanto al *L. inundatum* L. citado en algunas localidades de Cataluña, donde inútilmente lo hemos buscado hasta ahora, parece que se tomó por tal la *Fontinalis antipyretica* L.

(1) Según opinión *provisional* de un eminente especialista extranjero, grandemente sorprendido por el descubrimiento de esta planta que califica de *maravilla*, se trata de la *Pellæa hastata* Sw., ó de una especie muy afine encontrada por vez primera fuera del Sur de Africa. Así, aunque no resultase especificamente nueva, quedarían confirmadas nuestras sospechas sobre el carácter extra europeo de esta planta y su inclusión en género distinto del *Pteris* y del *Pteridium*, como en la descripción indicamos.

MEMORIAS

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS Y ARTES

DE BARCELONA

TERCERA ÉPOCA — VOL. VII. NÚM 15

EL ECLIPSE TOTAL DE LUNA

DE LA NOCHE DEL 3 AL 4 DE JUNIO DE 1909

POR EL ACADÉMICO

D. LUIS CANALDA

Publicada en mayo de 1909

BARCELONA

A. LÓPEZ ROBERT, IMPRESOR. — CONDE DEL ASALTO, 63

1909

578

EL ECLIPSE TOTAL DE LUNA

DE LA NOCHE DEL 3 AL 4 DE JUNIO DE 1909

por el Académico

D. LUIS CANALDA

Sesión del día 29 de Marzo de 1909

PRIMERA PARTE

La teoría de los eclipses ha constituído siempre, desde los más remotos tiempos, uno de los capítulos más importantes de la Astronomía, no tan sólo por la curiosidad y emoción que estos fenómenos excitan en el público, convenciéndole de la exactitud de aquella ciencia, sino también por las interesantes aplicaciones astronómicas y geográficas á que la observación de los mismos dá lugar. Y efectivamente, la precisión con la cual se llega á predecir, con tantos años ó siglos de anticipación como se quiera, el instante, la duración y demás circunstancias de los eclipses, ha podido convencer á los más incrédulos de la exactitud de las teorías astronómicas; pues ellos dependen del movimiento relativo de los dos astros, es decir, del Sol y la Luna, de sus volúmenes, de sus diámetros aparentes, de sus distancias á la Tierra y de sus paralajes. Los que dudan que tales elementos puedan determinarse, se convencen de ello al ver la perfecta coincidencia entre las predicciones y los resultados. Pero no es tan solo bajo el punto de vista abstracto ó contemplativo que los eclipses han llamado poderosamente la atención de los astrónomos, sino también por las útiles aplicaciones que han hecho de su estudio á los más importantes problemas de la Astronomía, de la Geografía y de la Navegación. De las observaciones de numerosos eclipses de Luna hechas por los Caldeos en Babilonia, por Ptolomeo en Alejandría de Egipto y otros, pudieron deducir con grande exactitud los más antiguos astrónomos desde Hiparco, los diversos períodos del movimiento de la Luna y los elementos de la órbita de este astro; y lo que sorprende más es que llegasen á determinar así, no sólo los movimientos medios, sino también las más importantes desigualdades de los movimientos lunares, lo que revela en la antigua ciencia un espíritu de inducción muy desarrollado que no se descubre en la moderna, por predominar en ésta la deducción basada en principios fijos y sobre todo en el principio de la gravitación universal.

Fecunda ha sido también, hasta en nuestros días, la observación de los eclipses, principalmente los de Sol y las ocultaciones de estrellas por la Luna, para

corregir la teoría de los movimientos y las Tablas astronómicas del Sol y la Luna; habiendo suministrado además un método precioso para determinar ó corregir las longitudes geográficas, con gran provecho para la Geografía y la Navegación. Y la moderna Astronomía física, ó Física astronómica, ha podido deducir del estudio de la corona luminosa que caracteriza los eclipses de Sol totales, importantes conclusiones acerca de la constitución física del Sol.

Por todo lo expuesto, el cálculo y predicción de los eclipses es tal vez el problema que ha dado más juego en la Astronomía, existiendo numerosos métodos, así geométricos como de carácter analítico, para resolver esta importante cuestión. Los métodos fundados en las proyecciones alcanzan un gran desarrollo en la Astronomía antigua, como puede verse en las obras de Cassini, La Hire, Lacaille, Lalande y otras; pero el cálculo analítico de los movimientos aparentes, mediante la consideración de las paralajes de longitud y latitud, ó de ascensión recta y declinación, debe ser preferido por su mayor exactitud para el cálculo de los eclipses de Sol y de las ocultaciones de estrellas por la Luna.

La primera tentativa de cálculo de predicción de los eclipses corresponde á los Caldeos, quienes descubrieron que después de un período de 223 lunaciones, comprendiendo 18 años y 10 á 11 días, el Sol y la Luna vuelven á hallarse en la misma posición con respecto á los nodos lunares ó puntos de intersección de la órbita lunar con la eclíptica, y que los eclipses deben, por consiguiente, reproducirse en el mismo orden, lo que dá un medio fácil de predecirlos. El período Caldeo es de 18 años de 365 días, más 15 días, 7 horas, 42 minutos, 28,56 segundos, lo que exige 18 años y 10 ú 11 días, según haya 5 ó 4 bisiestos comprendidos en dicho intérvalo. Con todo, el período Caldeo no es de rigorosa exactitud, pues se halla ligeramente modificado por las desigualdades del movimiento de la Luna, que alteran sensiblemente los resultados; de suerte que este método de predicción de eclipses sólo puede considerarse como una primera aproximación ó como un procedimiento de exploración, que necesita confirmarse ó modificarse luego por métodos más exactos.

Entrando ya en materia para ocuparnos del notable eclipse total de Luna que se verificará en la noche del 3 al 4 de junio próximo, diremos que, de conformidad con lo expuesto, este eclipse será la repetición del que ocurrió el día 23 de mayo de 1891, aplicándose exactamente á ellos el período Caldeo; pues la hora de la oposición en el primero fué las 6 horas 35 minutos de la tarde, tiempo medio de Barcelona, ó 18 horas 26 minutos, tiempo medio civil del meridiano de Greenwich; y en el próximo sucederá la oposición á 1 hora 25 minutos de la madrugada del 4 de junio, tiempo medio civil del citado meridiano de Greenwich; de modo que con una aproximación de pocos minutos se aplica á dichos eclipses el período de 18 años 11 días 7 horas, dependiendo el que sean 11 días y no 10, de la circunstancia de haber 4 años bisiestos desde 1891 á 1909.

Mas para poder afirmar con certeza completa que ocurrirá un eclipse es preciso, según hemos dicho antes, recurrir á un procedimiento más exacto. Los

eclipses, así de Sol como de Luna, suponen dos condiciones; la Luna en conjunción ú oposición, respectivamente, y además bastante cerca del nodo ó punto de intersección de su órbita con la eclíptica, para que su latitud sea muy pequeña. El Sol no se halla en posición conveniente para dar lugar á los eclipses, sino cuando está próximo á los nodos, puntos diametralmente opuestos, á los que llega el astro con 6 meses de intérvalo. Los eclipses no pueden ocurrir pues, mas que en estas dos épocas del año, que varían continuamente para los sucesivos, á causa del movimiento retrógrado de los nodos de la Luna, que es de unos 19° 20′ por año ó 3′ 10″ por día. Dada la inclinación media de la órbita de la Luna con la eclíptica, que es de 5° 9′, y asimismo los valores medios de las paralajes y semidiámetros de los dos astros, se halla, mediante un sencillo cálculo trigonométrico, que si al tiempo de una oposición ó plenilunio la distancia del Sol al nodo de la Luna en longitud es menor de 9°, el eclipse de Luna es seguro; entre 9° y 12° es posible, siendo preciso en este último caso para solventar la duda un cálculo más exacto. Fuera de estos límites no son posibles los eclipses de Luna.

Por lo demás, para facilitar este cálculo preliminar, los astrónomos han formulado tablas que dan por medio de un cálculo sencillo, no solamente las horas de las sizigias, ó conjunciones y oposiciones del Sol y la Luna que ocurrirán en cualquier año, con aproximación al minuto, sino que además dan el argumento de la latitud, es decir, la distancia angular del Sol ó de la Luna al nodo más próximo para dichas sizigias. Estas tablas permiten deducir inmediatamente las oposiciones que deben dar lugar á eclipses. Para efectuar este cálculo preliminar son muy cómodas y exactas las tablas construídas con arreglo á la teoría de M. Lambert, y van insertas en las Tablas lunares de Bürg, que publicó el Barón de Zach. Tanto éstas, como las Tablas solares que publicó en 1809 el ilustre astrónomo de Eisenberg, se hallan referidas al meridiano de París.

Por medio del cálculo de dichas tablas hallamos, según demuestra el siguiente cuadro, que la oposición ó plenilunio medio del mes de junio de 1909 sucede el día 3 de junio á $1^h\,53^m\,32^s$ de tiempo medio del meridiano de París, contado desde el medio día, según cómputo astronómico.

Épocas de las conjunciones y oposiciones medias del Sol y la Luna y de los Argumentos que regulan las conjunciones y oposiciones verdaderas

Años	Tiempo de la Conjunción media	B	C	G
1900	1d 18h 21m 58s	497,857	350,110	118,564 ☊
9 años	19 10 13 21	54,997	31,922	83,894 ♉
1909	21d 4h 35m 19s	552,854	382,032	202,458 ♉
5 revoluciones	147 15 40 14	404,259	358,569	851,960 ☊
	168d 20h 15m 33s	957,113	740,601	54,418 ☊
$^1/_2$ revolución	— 14 18 22 1	— 40,426	—535,857	—85,196 ☊
	154d 1h 53m 32s	916,687	204,744	969,222 ♉
Junio	—151			
Plenilunio medio	3d 1h 53m 32s	Tiempo medio astronómico de París.		

Este resultado supone el movimiento de la Luna circular y uniforme, lo que difiere bastante de la realidad; pero se corrige luego calculando por medio de las mismas tablas las principales ecuaciones que dependen de las desigualdades del movimiento de la Luna y son funciones de los argumentos B, C, G, que en las tablas expresadas se indican en milésimas partes de la circunferencia, menos el último G que lo está en milésimas de la semicircunferencia. El argumento B representa la anomalía media del Sol, ó distancia angular de éste á su apogeo; el C la anomalía media de la Luna, contada también desde el apogeo; y el G es el argumento de la latitud, ó distancia del Sol al nodo, representando por ☊ el nodo ascendente y ♉ el descendente. La distancia angular de 180° comprendida entre los dos nodos se supone dividida en 1.000 partes, y como el nodo ascendente ☊ representa 0° y el descendente ♉ 180°, resulta que en las adiciones de dicho argumento G, se tiene ☊ + ☊ = ☊; ♉ + ♉ = ☊. y ☊ + ♉ = ♉; teniendo además en cuenta que en pasando de 1.000 en una suma, cambia la designación del símbolo ☊ ó ♉ en el argumento expresado.

La corrección de la hora de la oposición media para tener la verdadera se efectúa por medio de las mismas tablas, como se indica en este cuadro.

Formación de los Argumentos y cálculo de las ecuaciones que sirven para convertir la oposición media en verdadera

Argumentos			Ecuaciones
I	B	9166,87	6h 13m 18s,61
II	C	2047,44 (a)	19h 21m 8s,20
III	B + C	121,431	2m 10s,28
IV	B — C	711,943	21m 13s,55
V	III + C	326,175	0m 14s,19
VI	IV — C	507,199	1m 1s,44
VII	G	969,222	1m 42s,15
VIII	G — C	764,478	3m 51s,97
IX	C	204,744	0m 12s,34
	Suma. . . .		26h 4m 52s,73
	Constante. . . .		— 14h 24m
	Suma de las ecuaciones. . .		+ 11h 40m 52s,73

Tiempo del Plenilunio medio de Junio de 1909 . .	3d 1h 53m 32s
Suma de las ecuaciones	+ 11h 40m 52s,73
Tiempo medio astronómico de París del Plenilunio verdadero	3d 13h 34m 24s,73
Longitud de Greenwich en tiempo. . .	— 9m 21s
Tiempo medio astrónómico de Greenwich del Plenilunio verdadero.	3d 13h 25m 3s,73
Tiempo medio civil de Greenwich del Plenilunio verdadero	4d 1h 25m 3s,73

Resulta del cálculo anterior que, por efecto de las desigualdades del movimiento de la Luna, y también del movimiento aparente del Sol, la oposición verdadera difiere de la media del intérvalo + 11h 40m 52s , 73; es decir, que la opo-

(a) Para el cálculo de las dos primeras ecuaciones, las tablas del barón de Zach suponen la circunferencia dividida en 10.000 partes, por cuya razón los dos argumentos B, C, aparecen multiplicados por 10 para dicho cálculo, conservando su valor primitivo en todo lo demás.

sición verdadera se halla retrasada con respecto á la media de todo este intérvalo, y tiene lugar el día 3 de junio de 1909, á $13^h\ 34^m$, tiempo medio astronómico de París, ó sea el citado día, á $13^h\ 25^m$, tiempo medio astronómico del meridiano de Greenwich, contado desde el medio día; y contado en tiempo medio civil del expresado meridiano de Greenwich, según el cómputo legal vigente, sucede la oposición verdadera del Sol y la Luna el día 4 de junio de 1909, á $1^h\ 25^m$, contado desde 0^h de la noche, como se consigna en los almanaques de Barcelona.

Siendo el argumento G, ó la distancia del Sol al nodo descendente ☋ de la Luna en dicho plenilunio 969,222, cuyo complemento á 1.000 ó distancia al nodo ascendente ☊ es 30,778; y siendo este valor menor que 50, límite de los eclipses seguros, según se demuestra en la introducción á las indicadas tablas, resulta que hay eclipse de Luna en el mentado plenilunio ú oposición, que será total; pues la distancia de la Luna al nodo ascendente será de 969,222 ☊; es decir, que le falta sólo 30,778 para llegar al nodo descendente ☋, que es el más próximo; pero como aún no lo ha alcanzado, su latitud es boreal al tiempo del eclipse, y vá disminuyendo á medida que se aproxima al citado nodo descendente ☋. Por esta razón la hora del medio del eclipse sucede 4^m después de la oposición á $1^h\ 29^m$ del día 4.

El argumento C que representa la anomalía media de la Luna y tiene por valor 204,744, expresado en milésimas partes de la circunferencia, cuyo valor se aproxima á 250, demuestra que la Luna se halla aproximadamente en dicho plenilunio á su distancia media de la Tierra.

El cálculo aproximado que hemos expuesto debe preceder siempre al definitivo que determina con todos sus detalles las circunstancias del fenómeno. Sabiendo ya que un plenilunio debe producir eclipse, se procede al cálculo rigoroso del mismo, empezando por determinar por medio de las tablas del Sol y la Luna, los elementos siguientes para la hora supuesta ó aproximada de la oposición: La longitud verdadera del Sol, su semidiámetro aparente, su paralaje horizontal, y su movimiento horario en longitud. La longitud y latitud verdaderas de la Luna, sus movimientos horarios en ambas coordenadas, su paralaje horizontal ecuatorial, y su semidiámetro central. Con estos datos, haciendo uso de los movimientos horarios, se determina el instante exacto del plenilunio ú oposición, así como las coordenadas de ambos astros para el mismo instante. Se calcula luego el radio del disco de sombra visto desde la tierra, que es igual á la suma de las paralajes horizontales del Sol y de la Luna, menos el semidiámetro aparente del Sol, y este valor se aumenta en $\frac{1}{60}$ para tener en cuenta el efecto de la atmósfera terrestre que en aquella distancia es aún sensible. Con estos datos fácil es ya, aplicando las fórmulas que se deducen de la teoría, determinar la órbita relativa de la Luna y todas las circunstancias del eclipse; es decir, los instantes de los contactos exteriores con la sombra, que corresponden al principio y fin del eclipse y los de los contactos interiores, que corresponden al principio y fin de los

eclipses totales con detención. Se calculará, finalmente, la distancia de los puntos de contacto de la sombra con la Luna al vértice boreal ó austral de ésta, determinando el ángulo de posición, ó sea el formado por los círculos de latitud y declinación de la Luna al principio y fin del eclipse. Este ángulo, combinado con los que forma al mismo instante la órbita relativa de la Luna con la eclíptica y el radio del disco de sombra en los puntos de contacto, nos dará fácilmente el arco del limbo comprendido entre el vértice boreal ó austral del astro y dichos puntos de contacto.

No es nuestro propósito entrar en el detalle de este cálculo definitivo, que expusimos por completo para el eclipse total de Luna del día 12 de julio de 1870, y también para el eclipse total de Sol del 28 de mayo de 1900, en la Memoria que presentamos á esta Real Academia. Diremos tan sólo que, según resulta del cálculo aplicado al eclipse en cuestión de la noche del 3 al 4 de junio de 1909, el principio del eclipse, ó primer contacto de la Luna con la sombra, tendrá lugar á $23^h\ 44^m$ del día 3, tiempo medio civil del meridiano de Greenwich; el principio del eclipse total á $0^h\ 58^m$ del día 4; el medio del eclipse á $1^h\ 29^m$ de idem; el fin del eclipse total á 2^h de idem, y el fin del eclipse, ó último contacto con la sombra, á $3^h\ 14^m$ del citado día 4. De modo que todas las fases del eclipse suceden entre la media noche del día 3 y las primeras horas de la madrugada del 4.

El primer contacto de la sombra con la Luna se verificará en un punto del limbo de ésta, que dista 55° de su vértice austral hacia Oriente (visión directa).

El último contacto de la sombra con la Luna se verificará en un punto del limbo de ésta que dista 81° de su vértice austral hacia Occidente (visión directa).

SEGUNDA PARTE

Pasando á estudiar ahora las condiciones físicas del eclipse bajo el punto de vista de la gradación de la luz durante el fenómeno, debemos considerar las propiedades del cono de sombra de la Tierra, constituído por el cono circunscrito á las superficies del Sol y la Tierra que forman los rayos tangentes exteriormente, prescindiendo de lo que se llama penumbra, determinada por el cono circunscrito interiormente, ó envolvente de los rayos tangentes interiores, en razón á no ofrecer utilidad, en nuestro concepto, para los habitantes de la Tierra, así como la tendría grande para los habitantes de la Luna, por indicar para este satélite la entrada y salida de la penumbra el principio y el fin del eclipse de Sol allí observado y debido á la interposición de la Tierra.

Concretándonos, pues, al cono de sombra propiamente dicha, ó sombra pura, hay que distinguir en él la sombra perfecta, que supone la privación de toda luz

directa ó refracta, y la sombra con luz refracta, debida á la refracción de algunos rayos de luz en la atmósfera terrestre.

Suponiendo, Fig. 1.ª, los dos conos circunscritos exteriormente al Sol, á la superficie de la Tierra, y á la superficie exterior de la atmósfera, el primero PCD, determinaría la sombra perfecta si los rayos fuesen irrefractos. El segundo, OAB, es también de sombra pura y en muchos de sus puntos no deja pasar la luz; pero en otros puntos comprendidos entre los dos conos, algunos rayos se refractan y tienden á modificar la sombra perfecta, de suerte que en muchos eclipses, aun totales, la Luna no desaparece del todo, sino que queda más ó menos visible con una ténue luz rojiza. La mayor ó menor intensidad de esta luz refracta depende de las circunstancias siguientes:

Sean S el Sol, T la Tierra con su atmósfera representada por el círculo exterior, Fig. 2.ª, OAB el cono de sombra pura circunscrito al exterior de la atmósfera terrestre. Los rayos extremos que parten del Sol y son tangentes á la atmósfera en A y B, ó, mejor dicho, los que son infinitamente próximos á éstos, se refractan al incidir en la atmósfera y experimentan la máxima refracción en A y B, aproximándose á la normal TA, TB. Luego, al salir de la atmósfera en E, F, se refractan otra vez, separándose de la normal TE, TF, y vienen á cortarse en X, y prolongados van á cortar en R y Q los rayos irrefractos AO, BO. Por otra parte, los rayos extremos tangentes á la superficie de la Tierra en C, D, después de haber experimentado una primera refracción al entrar en la atmósfera por l, i, experimentan una segunda refracción al salir de ella en u, y, yendo á cortarse en P, donde terminarían el cono de sombra perfecta, para cortar luego el cono OAB en T′, V, si aquél no resultase modificado por los rayos refractos exteriores AXR, BXQ, y los interiores CuPV, DyPT′, así como por los demás comprendidos entre éstos en el espesor de la atmósfera, que producen en los conos de sombra AOB, CPD, varios segmentos con alguna luz refracta, que en la figura se han rayado de color rojo, y otros segmentos de sombra perfecta, que aparecen rayados de color oscuro. Del examen de la figura se deduce la existencia de tres grandes segmentos de sombra perfecta limitados por superficies cónicas: uymnX; AmKQBnHR; PT'VO; y 4 segmentos de sombra con luz refracta, que son: mKXnHX; KXHP; QKPT'RHPV; y el más pequeño mEunFy. El segmento de mayor intensidad lumínica es el formado por el doble cono PKXH, puesto que en él se concentran los rayos refractos en mayor extensión de la atmósfera.

La Luna atraviesa los conos de sombra en la posición representada por el círculo LL cuando es perigea, y por el L'L' cuando es apogea; y teniendo en cuenta las dimensiones que el cálculo asigna á los diferentes conos indicados en la figura, que son: TX = 24 á 26 semidiámetros terrestres; TP = 43 semidiámetros; TL distancia de la la Luna perigea 56 semidiámetros terrestres; TL' distancia de la Luna apogea 64 semidiámetros; la distancia media de la Luna á la Tierra siendo 60,2745 semidiámetros ecuatoriales terrestres; se deducen las con-

clusiones siguientes: 1.° Al principio y fin de los eclipses totales la Luna penetra en el cono de sombra OAB, determinado por la atmósfera de la Tierra, por el segmento con luz refracta T'QKPHRV, y por lo tanto permanece más ó menos visible, con una ténue luz rojiza, debida á los rayos refractos. 2.° Al medio de los eclipses totales y centrales la Luna atraviesa el cono de sombra pura inverso T'PV, pudiendo quedar casi invisible. 3.° En los eclipses totales, como el de la noche del 3 al 4 de junio próximo, pero que distan mucho de ser centrales, la Luna puede no alcanzar el cono de sombra perfecta T'PV, limitándose á atravesar el segmento cónico QT'PVR de sombra con luz refracta, y por lo tanto permanece más ó menos visible al medio del eclipse, afectando un color rojizo, debido á los rayos refractos. 4.° Cuando la Luna es apogea ó se halla á la máxima distancia de la Tierra, atraviesa el doble cono de sombra pura OT'PV más cerca de su base T'V que cuando es perigea ó se halla á su mínima distancia; y por consiguiente los eclipses totales y centrales en el primer caso, ó sea de la Luna apogea, ofrecen una obscuración más intensa, ó mejor dicho, algo más prolongada que en el segundo, ó con la Luna perigea.

Terminaremos esta nota sobre el eclipse total de Luna del mes de junio próximo, manifestando que, si bien la observación de los eclipses ha sido de grande utilidad en la Astronomía para la corrección de los datos referentes á la teoría del movimiento de la Luna, y á la Geografía para la determinación de las longitudes, según hemos indicado al principio, los eclipses de Luna ofrecen el inconveniente, para tales objetos, de que la sombra de la Tierra, á su contacto con la penumbra, ó sea en los bordes, se halla mal definida, siendo difícil ó imposible determinar con rigorosa exactitud la hora de las principales fases; por cuyo motivo, para la determinación de longitudes geográficas carecerían de la debida precisión los resultados; mientras que, por el contrario, la observación de los eclipses aparentes, es decir de Sol, y las ocultaciones de estrellas por la Luna, en los que pueden apreciarse bien los tiempos de los contactos, ofrece resultados de la más grande exactitud.

Tampoco es posible aplicar las observaciones de eclipses de Luna á la corrección de la teoría de los movimientos de este astro, por la misma causa indicada. Es en efecto imposible apreciar el tiempo de los contactos de la Luna con la sombra de la Tierra con una diferencia menor de medio minuto á un minuto, y este error es mucho más considerable que el que puede existir en las tablas de la Luna en el estado de perfección que tienen hoy día. Por todas estas razones, y aparte de la grandiosidad que revisten, como tantos otros fenómenos astronómicos, los eclipses de Luna no tienen otro interés para la Astronomía que la curiosidad pública. Preparémonos pues, como curiosos y aficionados, á observar el notable eclipse total de Luna de la noche del 3 al 4 de junio de 1909.

83.5

Fig. 1.ª

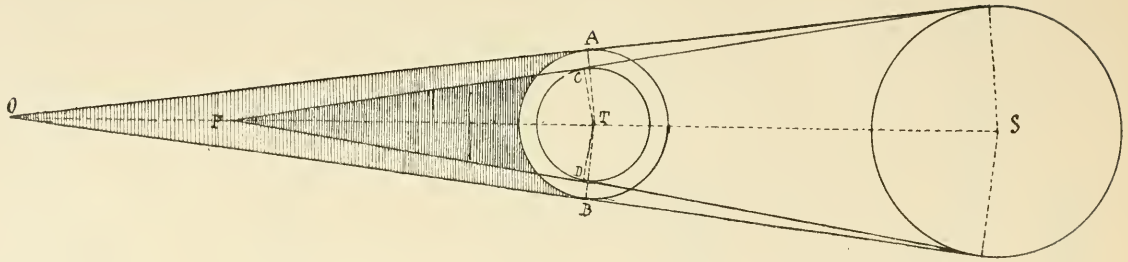
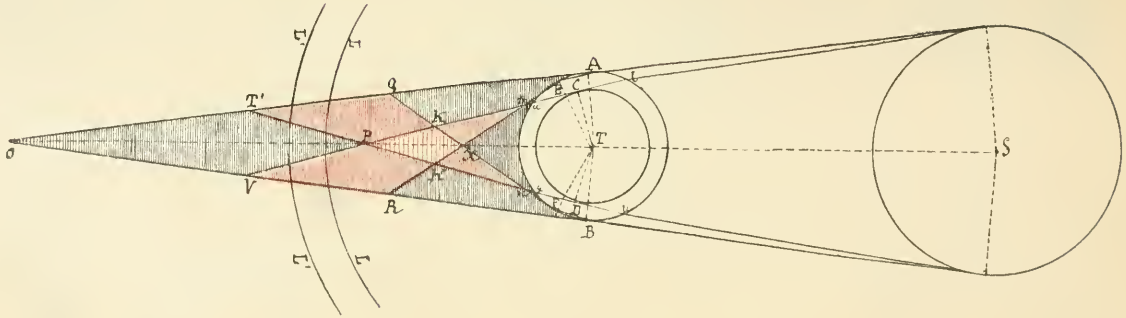


Fig. 2.ª



MEMORIAS

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS Y ARTES

DE BARCELONA

TERCERA ÉPOCA — VOL. VII. NÚM 16

GENERALIDADES

Y APLICACIÓN DE LAS CURVAS UNICURSALES

POR EL ACADÉMICO

DR. D. LAURO CLARIANA RICART

Publicada en junio de 1909

LIBRARY
DEC 7 1911
UNIVERSITY OF TORONTO

BARCELONA

A. LÓPEZ ROBERT, IMPRESOR. — CONDE DEL ASALTO, 63

1909

588.3.

GENERALIDADES

Y APLICACIÓN DE LAS CURVAS UNICURSALES

por el Académico

Dr. D. Lauro Clariana Ricart

Sesión del día 29 de marzo de 1909

Señores académicos:

Grandes son las dificultades que presenta el análisis matemático, cuando se pretende estudiarlo á fondo; sin embargo, bien cabe afirmar con M. Hermite que la célebre Memoria de M. Puiseux, sobre las funciones algebraicas, publicada á mediados del siglo XIX, dió origen á una serie de investigaciones que sellan sin duda nuestros últimos tiempos.

El distinguido matemático francés M. Cauchy, puede responder de nuestro aserto al formar un nuevo tecnicismo para el análisis matemático, partiendo de la cantidad compleja ó imaginaria. Conocidos son los preciosos resultados que deduce de los puntos críticos con relación á las integrales de diferenciales algebraicas para cuando la variable independiente sigue ciertos contornos en su plano; así se llega al conocimiento de la periodicidad de las funciones circulares, de las elípticas, y hasta de las trascendentes dependientes de muchas variables definidas por Jacobi, como funciones inversas de las integrales hiperelípticas.

No cabe duda que las tendencias de los analistas modernos, es hacia la Geometría; su hermana, la cual tan buenos servicios le presta. Así se explica como se ha podido llegar á las bellas y admirables concepciones de Riemann, Luroth, Nöther, Göpel, Rosenhain y Weierstrass, con tecnicismos y representaciones gráficas especiales.

En la presente Memoria no pretendemos remontarnos á esas alturas; pues á poco que nos extendiéramos, ella rebasaría los límites que buenamente se le puede conceder, aparte de que saldría del objetivo que nos impulsa al escribirla. Así es que de los notables trabajos realizados por los distinguidos matemáticos MM. Cayley, Chasles y Clebsch, basados en la Geometría proyectiva y en la teoría de las Formas matemáticas, solo nos ocuparemos, y aún á grandes rasgos, de la preciosa rama que se refiere á las curvas unicursales, dando no obstante con la mayor claridad posible y con los detalles convenientes, los principios sobre los cuales se apoya la teoría de dichas curvas, conforme á las indicaciones de MM. Hermite y Jordan al objeto de recabar luego la aplicación de las mismas á la determinación del área comprendida por la curva cerrada perteneciente á los *folium*s de Descartes de tercero y cuarto orden; y llegados á este puuto, tendre-

mos ocasión de apreciar cuál es la importancia de semejante estudio, que así permite salvar en muchos casos las dificultades que presenta el análisis matemático ordinario.

De momento podemos afirmar que si se tiene la integral:

$$\int F(x, y)\, dx,$$

en el concepto de que $F(x, y)$ represente una función racional en x é y siendo además y una expresión irracional en x, determinada por la ecuación: $\varphi(x, y) = o$; si por la sustitución de una nueva variable t, cabe lograr que se tenga $x = \pi(t)$ é $y = \psi(t)$, siendo estas funciones racionales en t, la curva representada por la ecuación $\varphi(x, y) = o$, pertenecerá á la clase de curvas que se designan bajo el nombre de *unicursales*, y en su virtud la integral dada será dependiente también de una función racional en t.

Además, digno de mención es que la función correspondiente á las curvas unicursales pertenezca al género cero: principio altamente importante que pretendemos desarrollar suficientemente. Mas para ello es preciso saber que el género de una función anda intimamente enlazado con los puntos singulares que contiene la curva que á dicha función se refiere, como así lo demuestra la fórmula que da el genero de una función dependiente de su orden y del número de puntos singulares que la curva plana respectiva puede ofrecer.

Después de las consideraciones generales precedentes, demos ya comienzo á nuestra Memoria, considerando una función, tal como la que á continuación se expresa:

$$(1) \quad o = F(x, y) = A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Gy^2 + \cdots + Px^n + \cdots + Qy^n,$$

facilmente se concibe que el número de términos ó constantes que encierra esta ecuación completa, es:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$$

Así pues, al tomar $\frac{(n + 1)(n + 2)}{2} - 1$, puntos (x, y), pertenecientes á la función que precede, después de las sustituciones respectivas en (1), se formará un

sistema del cual se sacarán las relaciones de los coeficientes respecto á uno de ellos, determinando por consiguiente la curva única de grado n, que pasa por los puntos supuestos.

Ahora bien, si el número de puntos, se reduce á $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 2$, los coeficientes de la curva se expresarán en función lineal de dos de entre ellos, tales, como A y B, á fin de que resulte en este caso también el sistema determinado. La ecuación de la curva, toma en este concepto, la forma $AM + NB = o$, siendo M y N, funciones en x é y del orden n. Las constantes A y B de que depende el resultado, dan lugar á una relación que puede tomar diferentes valores: de suerte que al variar esta relación, se obtiene un haz de curvas, pasando las diferentes curvas del haz por los puntos dados. Empero fácilmente se concibe que dichas curvas además deben satisfacer á los n^2 puntos de intersección de las curvas $M = o$ y $N = o$; luego si suponemos $n > 2$ cabrá escribir $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 2 < n^2$.

Al designar por z los puntos que faltan en el primer miembro para que sea igual al número total de puntos de intersección, expresado por n^2, resulta: $z + \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 2 = n^2$, de donde

$$z = n^2 - \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 2$$

Estos puntos son comunes á las curvas del haz.

Para mayor inteligencia, supongamos que sea $n = 3$.

En este supuesto el número de puntos necesarios para determinar un haz de curvas de tercer grado, será:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 2 = \frac{4 \cdot 5}{2} - 2 = 8,$$

resultando para el número de puntos comunes restantes,

$$z = 9 - \frac{4 \cdot 5}{2} + 2 = 1$$

Luego todas las curvas del haz, pasan por un punto noveno, aparte de los ocho anteriores.

Según estos preliminares, podemos admitir que toda función algebraica irre-

ducible del orden n, tal como $F(x, y) = o$, el mayor número de puntos singulares que puede ofrecer, viene expresado por la fórmula:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

A este punto, interesa tener presente que si p es el grado de multiplicidad de un punto singular p, debe considerársele como resultado de p ramas de curvas concurrentes al mismo. De suerte que si la función Φ, contiene dicho punto, fácilmente se concibe que al alterar indefinidamente poco los coeficientes de la función anterior, la línea correspondiente quedará alterada y cortará á las p ramas, determinando un número de intersecciones igual al grado de multiplicidad del punto singular, por lo cual debe considerarse á este punto como formado de p intersecciones.

Ahora bien, si dicha función Φ, es del orden $n-1$, el mayor número de puntos que determina la curva correspondiente, estará dado por la fórmula general $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$, que ya hemos hallado, y en el supuesto de cambiar en ella n por $n-1$, resulta:

$$\frac{n(n+1)}{2} - 1$$

Al tomar estos puntos en las curvas representante de la función F, que es del orden n, y considerando que los puntos singulares de F, resultan tan solo de la intersección de dos ramas, vamos á probar que el número de puntos singulares que pueden suponerse en F, no puede alcanzar el valor de la expresión: $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$.

En efecto, el número total de intersecciones de F y Φ, sería á ser posible lo contrario

$$\frac{n(n+1)}{2} - 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 \qquad (2)$$

puesto que en $\frac{n(n+1)}{2} - 1$, se supone que existen ya una vez los puntos singulares $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$, de F, y como éstos deben contarse por dos veces, por ser do-

bles, basta agregar á $\frac{n(n+1)}{2} - 1$, una sola vez la expresión $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$, para tener el número de puntos comunes á las dos curvas representantes de F y Φ.

Al reducir ahora la expresión (2), se obtiene

$$\frac{n(n+1)}{2} - 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 = n(n-1) + 1,$$

resultado inadmisible, siendo las funciones F y Φ, irreducibles, pues según el análisis el número de puntos de intersección de las curvas respectivas no puede ser mayor que

$$n(n-1).$$

Facilmente se comprende que si tomáramos una cantidad mayor que $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$, con mucha más razón los puntos comunes á las dos curvas sería mayor que $n(n-1)$. Inútil es también considerar que el orden de Φ, disminuya ó aumente pues en ambos casos el resultado de puntos comunes á F y Φ, siempre supera al producto de sus dos órdenes respectivos: en efecto, si $\Phi = n$, se tiene

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = n^2 + 2 > n^2$$

cuando $\Phi = n + 1$, se obtiene

$$\frac{(n+2)(n+3)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = n^2 + n + 4 = n(n+1) + 4 > n(n+1)$$

. . . . . .

Por el contrario si $\Phi = n - 2$, se halla

$$\frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = n^2 - 2n + 1 = n(n-2) + 1 > n(n-2)$$

suponiendo $\Phi = n - 3$, se reduce

$$\frac{(n-2)(n-1)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = n^2 - 3n + 2 = n(n-3) + 2 > n(n-3)$$

. . . . . .

Luego el mayor número de puntos singulares que pueden suponerse en la función F, de orden n, es $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, pues solamente en este caso se tiene

$$\frac{n(n+1)}{2} - 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = n(n-1)$$

Según esta conclusión al suponer en dicha función F, solo puntos múltiplos de dos ramas para mayor sencillez correspondientes á tangentes separadas ó no, sin admitir otros puntos singulares de mayor orden, podremos escribir

$$d + r \geq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

siendo d los puntos múltiplos ordinarios y r los de retroceso.

Esta fórmula conduce inmediatamente al conocimiento del género cero de la función, cuando se considera el signo igual.

Después de estos preliminares, podemos ya entrar en consideraciones que se refieran á la determinación del genero de la función F.

Supongamos ahora otra función $\Phi(x, y) = o$, cuyo grado sea $m \geq n$. En su virtud la curva correspondiente á Φ cortará á la de F, en mn puntos.

Facilmente se concibe que pueden considerarse muchas otras curvas de grado m que pasen por los mismos n puntos de F, las cuales podrán expresarse analíticamente por la fórmula general $\Phi + FG = o$, siendo G un polinomio cualquiera de grado $m - n$.

Verdaderamente que la indeterminación que se supone en los coeficientes del polinomio G, permite anular igual número de coeficientes en Φ.

De suerte que siendo $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ los coeficientes de Φ, y $\frac{(m-n+1)(m-n+2)}{2}$, los de G. basta hallar la diferencia de estas dos fórmulas para tener los que nos quedan á determinar

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2} - \frac{(m-n+1)(m-n+2)}{2} = \frac{n(2m+3-n)}{2}$$

Esta fórmula representa el número de coeficientes restantes á los supuestos primero, pertenecientes á la función Φ.

Ahora bien, en el concepto de que la curva correspondiente á esta función Φ, pase por los puntos singulares $d + r$ de F, la fórmula que da el número de puntos

arbitrarios que hay que tomar sobre F, para que quede completamente determinada la curva de Φ, será:

$$\frac{n\,(2m+3-n)}{2} - 1 - d - r = q$$

Para aclarar estas ideas supondremos un caso particular, siendo cinco y tres los órdenes respectivos de Φ y F, resultando para G, $m-n=2$.

Así, pues, la expresión $\Phi + FG = o$, toma la forma siguiente:

$$(A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Hy^2 + \cdots\cdots + Mx^5 + \cdots\cdots + Ny^5) +$$
$$+ (A_1 + B_1x + C_1y + D_1x^2 + E_1xy + H_1y^2 + Kx^3 + \cdots\cdots Ly^3) \times$$
$$\times (A_2 + B_2x + C_2y + D_2x^2 + E_2xy + H_2y^2) = 0$$

Al verificar operaciones se comprende que los seis coeficientes A, B, C, D, E, H, de Φ, pueden hallarse dependientes de los que se suponen en G. De modo que quedan á determinar en Φ, los que siguen á H, los cuales se deducen de la diferencia de las fórmulas generales

$$\frac{(m+1)\,(m+2)}{2} \text{ y } \frac{(m-n+1)\,(m-n+2)}{2},$$

al atribuir valores particulares, resulta en el caso que consideramos

$$21 - 6 = 15$$

Por otra parte, como se suponee que se utiliza el punto singular que podemos considerar en F por ser una función de tercer orden, como veremos más adelante, y además, como la curva queda determinada quitando una unidad al número de coeficientes que se considera, resulta en definitiva que basta tomar trece puntos arbitrarios, $x_1, y_1, x_2, y_2 \cdots\cdots$ en la curva F; puntos que suponemos coincidentes con los de Φ, al objeto de quedar los coeficientes de esta función completamente determinados en función racional de los puntos arbitrarios $x_1, y_1, x_2, y_2 \cdots\cdots$ y de los coeficientes de F.

El resultado que hemos obtenido en el caso particular que nos ocupa, concuerda con la fórmula general hallada, relativa á los puntos arbitrarios que deben tomarse expresados en general por

$$(a) \qquad \frac{n(2m+3-n)}{2} - 1 - d - r = q,$$

lo cual en el caso presente, se reduce á

$$\frac{n\,(2m+3-n)}{2} - 1 - d = q\ ,$$

y al atribuir valores particulares, se obtiene

$$\frac{3\,(2\,.\,5+3-3)}{2} - 1 - 1 = 13\ .$$

Pasemos por fin, á la determinación del género correspondiente á la función F, que es del orden n.

Para ello empezaremos recordando las expresiones anteriores $\Phi + FG = o$ y $F = o$, las cuales permiten obtener, al eliminar y, una función en x, tal como $\psi\,(x) = o$, del grado mn, siendo sus coeficientes funciones racionales de los de F y de las coordenadas x_1, y_1, x_2, y_2 .....

Empero si descomponemos esta función en el producto de otras dos, se tiene $\psi\,(x) = Q\,(x)\ R\,(x)$; si el grado de Q es: $q + 2d + 2r$ contando cada uno de los puntos singulares como resultado de dos ramas de curvas, en este supuesto el grado de la función R, será: $mn - q - 2d - 2r$, y según la fórmula (a), tendremos:

$$mn - \left[\frac{n\,(2m+3-n)}{2} - 1 - d - r\right] - 2d - 2r = \frac{(n-1)\ (n-2)}{2} - d - r = p\ .$$

Este resultado representa el número de puntos no disponibles que faltan para que junto con los arbitrarios y singulares pueda igualarse la suma total á mn, y es la fórmula que representa el género de F, expresándose en general por p.

Si ξ es una raíz de la ecuación $\psi\,(x) = o$, se obtendrá el valor de y por los procedimientos que indica el análisis ordinario, aplicado al sistema

$$F\,(\xi, y) = o\ ,\ \Phi\,(\xi, y) + F\,(\xi, y)\ G\,(\xi, y) = o\ ,$$

resultando y racional en ξ, y de las coordenadas x_1. y_1, x_2, y_2 .....

Digno de mención es que si m no fuese mayor que n, sino igual á $n - 1$, ó también á $n - 2$, el género de la curva F, no sufriría alteración alguna.

Para demostrar este principio tengamos en cuenta que la función Φ, que suponemos del orden m, tiene un número de coeficientes representado por $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$.

Así el número de intersecciones de Φ y F, correspondiente á los puntos no disponibles, será

$$mn - \left[\frac{(m+1)\ (m+2)}{2} - 1\right] - d - r,$$

en el supuesto de que sea $m < n$.

Luego si $m = n - 1$, se tiene

$$n(n-1) - \frac{n(n+1)}{2} + 1 - d - r = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r = p$$

Si $m = n - 2$, resulta:

$$n(n-2) - \frac{(n-1)n}{2} + 1 - d - r = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r = p$$

Ahora al suponer $m = n - 3$, obtendríamos

$$n(n-3) - \frac{(n-2)(n-1)}{2} + 1 - d - r = \frac{n^2 - 3n}{2} - d - r =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1 - d - r,$$

resultado ya no admisible, pues no corresponde con el de p, notándose cada vez más la diferencia á medida que disminuye el valor de m.

Volviendo á la fórmula $\psi(x) = Q(x)\ R(x)$, cabe suponer que $Q(x)$, sea del grado $mn - p$ y $R(x)$ del grado p, á fin de que $\psi(x)$, resulte del grado mn, como hemos supuesto desde un principio y sabiendo que el género p, se expresa por $mn - q - 2d - 2r$, resulta que $Q(x)$ es del grado $q + 2d + 2r$.

Con estos datos, vamos á probar que las curvas unicursales pertenecen al género cero.

En efecto, según lo precedente podemos escribir

$$\overset{mn}{\psi}(x) = \overset{mn-p}{Q}(x)\ \overset{p}{R}(x) = \overset{q+2d+2r}{Q}(x) \times \overset{mn-q-2d-2r}{R}(x)$$

Ahora si tomamos un punto arbitrario menos de los necesarios para quedar

completamente determinados los coeficientes que corresponden á la función $\psi(x)$, según los principios anteriores, se comprende fácilmente que vendrán expresados en función de dos cualesquiera de ellos, tales, por ejemplo, como A y B, resultando en definitiva la expresión $AM + BN = o$, siendo M y N funciones racionales de las coordenadas de los puntos arbitrarios que se hayan tomado.

En este concepto la función $Q(x)$ que depende de q correspondiente á los puntos arbitrarios tomados, será del grado $q - 1 + 2d + 2r = mn - p - 1$, lo cual obliga á que el grado de $R(x)$ sea $p + 1$, para que el producto corresponda al grado mn de $\psi(x)$.

De suerte que se tendrá

$$\overset{mn}{\psi}(x) = \overset{mn-p-1}{Q}(x) \; \overset{p+1}{R}(x)$$

y en el supuesto de $p = o$, resulta:

$$\overset{mn}{\psi}(x) = \overset{mn-1}{Q}(x) \; \overset{1}{R}(x)$$

Luego la función $R(x)$, es de primer grado y al determinar su valor en la igualdad anterior, resultará dependiente de $AM + BN$, ó sea de $A(M + Nt)$ al suponer $\frac{B}{A} = t$; así, pues, x, será racional en t y de los puntos arbitrarios.

En cuanto á la y, es de ver que reunirá condiciones análogas á las de x, puesto que para su determinación basta atender al sistema

$$F(\xi, y) = o \,, \quad \Phi(\xi, y) + F(\xi, y)\; G(\xi, y) = o \,,$$

conforme hemos indicado ya en otro lugar, siendo ξ un valor de x; de modo que al determinar el *m. c. d.* de esas dos funciones anteriores, refiriéndonos á la variable y, llegaremos á una ecuación de primer grado en y, puesto que el último resto será cero, por representar la función $\psi(x)$ para cuando $x = \xi$, siendo ξ, una raíz de $\psi(x) = o$.

De suerte que y, depende de los mismos elementos que x, es decir que será también función racional en t.

En suma, se tiene que siendo cero el género de la función, tanto la x, como la y, de dicha función son funciones racionales de un mismo parámetro, ó sea de una misma variable, tal como t, y por consiguiente, según la definición atribuida á las curvas unicursales, dedúcese que dichas curvas pertenecen al género cero.

Varias consecuencias importantes son las que se deducen del principio anterior.

1.° Sabemos que la fórmula que determina el género de una función es $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r = p$, luego si $p = o$, se obtiene

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} = d + r$$

Resultado importante por cuanto nos manifiesta que en el género cero, referente á una curva unicursal del orden n, la suma de los puntos singulares que contiene es igual á $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Así, pues, en el supuesto de que todos los puntos singulares sean dobles, se deduce, según el análisis, que es suficiente que las funciones $F(x,y) = o$, $\frac{\partial F}{\partial x} = o$, $\frac{\partial F}{\partial y} = o$, tengan $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ puntos comunes para que la función $F'(x,y) = o$, pertenezca al género cero y á las curvas unicursales.

2.° Toda curva unicursal del grado n, admite $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ puntos dobles, y recíprocamente una curva de grado n que admita $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ puntos dobles, es unicursal.

3.° El género cero, supone el máximo de puntos dobles en la función y como quiera que las curvas unicursales pertenecen á dicho género, de ahí se infiere que las curvas unicursales admiten el máximo de puntos dobles que pueden corresponder en la función que se considera.

Pasemos á casos más concretos.

Cuestión difícil por no decir imposible es en general el poder hallar el valor en y de la función anterior F, naciendo de ahí la importancia de las curvas unicursales, pues si la función dada, permite obtener x é y en función racional de un solo parámetro, la función $y\,dx$, será una función algebraica racional de dicho parámetro, condición muy ventajosa para poder integrar.

En tales condiciones hállanse las ecuaciones que á continuación se expresan:

Sea en primer lugar

(1) $Ay^m + Bxy^{m-1} + \cdots + Kx^{m-1}y + Lx^m = ay^{m-1} + bxy^{m-2} + \cdots + hx^{m-2}y + kx^{m-1}$, A, B, $\cdots$ K, L, a, b $\cdots$ h, k figuran como constantes.

Al suponer $y = \theta x$, resulta

$$x = \frac{a\,\theta^{m-1} + b\,\theta^{m-2} + \cdots\cdots + k}{A\,\theta^{m} + B\,\theta^{m-1} + \cdots\cdots + L} \qquad y = \frac{a\,\theta^{m} + b\,\theta^{m-1} + \cdots\cdots + k\theta}{A\,\theta^{m} + B\,\theta^{m-1} + \cdots\cdots + L}$$

Luego la ecuación (1) pertenece á las curvas unicursales.

Sea en segundo lugar

$$\begin{aligned} &A y^m + Bxy^{m-1} + \cdots\cdots + Kx^{m-1}y + L x^m)^2 = \\ &= (y^2 + uxy + vx^2)\,(a y^{m-2} + bxy^{m-3} + \cdots\cdots + hx^{m-2})^2. \end{aligned} \qquad (2)$$

Justifiquemos como en este segundo ejemplo puede obtenerse x é y en función racional de un mismo parámetro ó variable; y que por consiguiente pertenece (2) también á las curvas unicursales.

En efecto, al suponer $y = tx$, se obtiene

$$x = \sqrt{t^2 + ut + v}\;\frac{a\,t^{m-2} + b\,t^{m-3} + \cdots\cdots + h}{A t^m + B t^{m-1} + \cdots\cdots + L}$$

Además, al admitir las igualdades siguientes

$$(a) \quad t^2 + ut + v = (t - \alpha)\,(t - \beta) = (t - \alpha)^2\,\theta^2\,,$$

resulta

$$t - \beta = (t - \alpha)\,\theta^2\,, \qquad \text{ó sea} \qquad t = \frac{\beta - \alpha\theta^2}{1 - \theta^2}$$

y al sustituir este valor en (a), hállase

$$\sqrt{t^2 + ut + v} = (t - \alpha)\,\theta = \frac{\beta - \alpha}{1 - \theta^2}\,\theta$$

Así pues, las fórmulas anteriores en x é y, resultan racionales en función de θ.

Vamos á considerar $m = 3$ o $m = 2$ respectivamente en (1) y (2) para referirnos á las curvas unicursales de tercero y cuarto orden.

Empero, antes de pasar á su estudio, determinaremos los puntos singulares que en cada caso resultan, según el orden que se considere y supuesto que se trata del género cero, la fórmula general de p, se transforma en

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} = d + r \qquad (b).$$

En su virtud, cuando $n=3$, se obtiene un solo punto singular.

Si se tiene $n=4$, resultan tres puntos singulares, los cuales dan lugar al triángulo de referencia, siendo posible en ciertos casos que se opere alguna reducción.

Así podríamos continuar, calculando los puntos singulares que pueden corresponder en funciones de órdenes superiores á los supuestos anteriormente, siempre partiendo de la fórmula general (*b*).

Como caso particular de la curva unicursal de tercer orden, vamos á ocuparnos de la ecuación del *folium* de Descartes, bajo la forma que la presenta M. Hermite.

$$x^3 + y^3 = 3xy ,$$

al suponer $y = x\theta$, resulta:

$$x = \frac{3\theta}{\theta^3+1} , \qquad y = \frac{3\theta^2}{\theta^3+1} ,$$

confirmándonos estas dos igualdades que la función primitiva pertenece á las curvas unicursales.

Ahora si α es una raíz cúbica imaginaria de la unidad, según la ecuación $\theta^3 + 1 = 0$, resulta

$$x = \frac{3\theta}{\theta^3+1} = -\frac{1}{\theta+1} - \frac{\alpha^2}{\theta+\alpha} - \frac{\alpha}{\theta+\alpha^2}$$

$$y = \frac{3\theta^2}{\theta^3+1} = \frac{1}{\theta+1} + \frac{1}{\theta+\alpha} + \frac{1}{\theta+\alpha^2}$$

*

(*) Para la demostración de estos dos resultados, empezaremos por suponer $-1, -\alpha, -\alpha^2$, las tres raíces cúbicas de la unidad, cuya suma es $-1-\alpha-\alpha^2 = 0$, ó sea $-\alpha-\alpha^2-\alpha^3 = 0$, de donde $\alpha^3 = +1$.

Fórmulas interesantes por lo que expondremos más tarde.

Mas antes de pasar adelante tratemos de hallar las condiciones para que la integral referida á las cuadraturas: $\int y\,dx$, se resuelva en una función algebraica, siendo $y\,dx$, función de una sola variable, como consecuencia de las curvas unicursales.

Empezaremos aplicando la fórmula de Bernoulli á la integral $\int y\,dx$, de donde

$$\int y\,dx = yx - \int x\,dy$$

ó sea

$$\frac{1}{2}\int y\,dx = \frac{1}{2}yx - \frac{1}{2}\int x\,dy = \int y\,dx - \frac{1}{2}\int y\,dx\ ,$$

luego

$$\int y\,dx = \frac{1}{2}yx + \frac{1}{2}\int [y\,dx - x\,dy]$$

Interesa que la integral del segundo miembro $\int [y\,dx - x\,dy]$ cumpla con las condiciones apetecidas para lo cual será preciso introducir nuevas cantidades que contribuyan al mismo fin.

Al descomponer $x = \frac{3\theta}{\theta^3+1}$ en fracciones simples, se tiene

$$\frac{3\theta}{\theta^3+1} = \frac{A}{\theta+1} + \frac{B}{\theta+\alpha} + \frac{C}{\theta+\alpha^2}\text{, luego}$$

$$A[\theta^2 + \theta\alpha + \alpha^2\theta + \alpha^3] + B[\theta^2 + \theta + \alpha^2\theta + \alpha^2] + C[\theta^2 + \theta + \alpha\theta + \alpha] = 3\theta\,,$$

de donde

$$A + B + C = o,\ A(\alpha + \alpha^2) + B(1 + \alpha^2) + C(1 + \alpha) = 3,\ A\alpha^2 + B\alpha^2 + C\alpha = o\,,$$

y por consiguiente

$$A = -(B + C),\ (B + C) + B(1 + \alpha^2) + C(1 + \alpha) = 3\,,\ -(B + C) + B\alpha^2 + C\alpha = o\,,$$

Si restamos las dos últimas igualdades, se obtiene

$$3(B + C) = 3\,,\quad \text{ó sea } B + C = 1 \qquad [1]$$

Para ello consideremos las igualdades siguientes:

$$X = \lambda x + \lambda' y \quad , \qquad Y = \mu x + \mu' y \quad ,$$

las cuales nos permiten escribir, según Hermite

$$Y d X - X d Y = (\mu x + \mu' y)(\lambda d x + \lambda' d y) - (\lambda x + \lambda' y)(\mu d x + \mu' d y) =$$
$$= (\mu' \lambda - \lambda' \mu)(y d x - x d y)$$

Al integrar, se obtiene

$$(\mu' \lambda - \lambda' \mu) \int (y d x - x d y) = \int [Y d X - X d Y]$$

De suerte que si la integral del segundo miembro puede resolverse en función algebraica, habremos logrado que la del primer miembro, ó sea la primitiva, satisfaga á las mismas condiciones.

Vamos, pues, á determinar las condiciones á que deben satisfacer X é Y, refiriéndonos á la ecuación del *folium* de tercer orden antes citada, pero representando de momento α, β, y γ, las tres raíces de la ecuación $\theta^3 + 1 = o$.

Así, pues, al suponer los valores de x, é y, descompuestos en fracciones simples, se tiene

$$x = \frac{A}{\theta - \alpha} + \frac{B}{\theta - \beta} + \frac{C}{\theta - \gamma} \quad , \qquad y = \frac{A'}{\theta - \alpha} + \frac{B'}{\theta - \beta} + \frac{C'}{\theta - \gamma} \quad .$$

Al sumarlas, se deduce

$$B[1 + 2\alpha^3] + C[1 + 2\alpha] = 3 \quad , \quad \text{ó sea } 2\alpha^3 B + 2\alpha C = 2$$
$$\text{luego } B\alpha^3 + C\alpha = 1 \qquad [2]$$

Formando sistema entre [1] y [2], cabe escribir

$$B\alpha + C\alpha = \alpha \quad , \quad B\alpha^3 + C\alpha = 1 \quad , \quad \text{luego } B(\alpha - \alpha^3) = \alpha - 1, \quad \text{ó sea}$$

$$B = -\frac{1}{\alpha} = -\frac{\alpha^3}{\alpha^3} = -\alpha^3 \quad , \quad C = 1 - B = 1 + \alpha^3 = 1 - (1 + \alpha) = -\alpha$$

$$A = -(B + C) = -(-\alpha^3 - \alpha) = \alpha^3 + \alpha = -\alpha^3 = -1$$

Así pues se tiene por fin

$$x = \frac{3\theta}{\theta^3 + 1} = \frac{A}{\theta + 1} + \frac{B}{\theta + \alpha} + \frac{C}{\theta + \alpha^2} = -\frac{1}{\theta + 1} - \frac{\alpha^3}{\theta + \alpha} - \frac{\alpha}{\theta + \alpha^2}$$

Luego al sustituir estos valores en las fórmulas de condición

$$X = \lambda x + \lambda' y \qquad Y = \mu x + \mu' y \ ,$$

se deduce

$$X = \lambda \left[\frac{A}{\theta - \alpha} + \frac{B}{\theta - \beta} + \frac{C}{\theta - \gamma} \right] + \lambda' \left[\frac{A'}{\theta - \alpha} + \frac{B'}{\theta - \beta} + \frac{C'}{\theta - \gamma} \right]$$

$$Y = \mu \left[\frac{A}{\theta - \alpha} + \frac{B}{\theta - \beta} + \frac{C}{\theta - \gamma} \right[+ \mu' \left[\frac{A'}{\theta - \alpha} + \frac{B'}{\theta - \beta} + \frac{C'}{\theta - \gamma} \right] ,$$

de donde

$$X = \frac{A\lambda + A'\lambda'}{\theta - \alpha} + \frac{B\lambda + B'\lambda'}{\theta - \beta} + \frac{C\lambda + C'\lambda'}{\theta - \gamma}$$

$$Y = \frac{A\mu + A'\mu'}{\theta - \alpha} + \frac{B\mu + B'\mu'}{\theta - \beta} + \frac{C\mu + C'\mu'}{\theta - \gamma} \ ,$$

Para determinar el valor de y, en fracciones simples, se tiene

$$y = \frac{3\theta^2}{\theta^3 + 1} = \frac{A_1}{\theta + 1} + \frac{B_1}{\theta + \alpha} + \frac{C_1}{\theta + \alpha^2}$$

Procediendo de un modo análogo al anterior, obtendremos las ignaldades siguientes

$$A_1 + B_1 + C_1 = 3 \ , \quad A_1(\alpha + \alpha^2) + B_1(1 + \alpha^2) + C_1(1 + \alpha) = 0 \ , \quad A_1\alpha^2 + B_1\alpha^2 + C_1\alpha = 0$$

$$A_1 = 3 - (B_1 + C_1) \ , \quad -[3 - (B_1 + C_1)] + B_1(1 + \alpha^2) + C_1(1 + \alpha) = 0 \ ,$$

$$3 - [B_1 + C_1] + B_1\alpha^2 + C_1\alpha = 0$$

Al restar estas dos últimas igualdades, se obtiene

$$-6 + 2(B_1 + C_1) + B_1 + C_1 = 0 \ , \quad B_1 + C_1 = 2 \qquad [3]$$

De la suma, resulta

$$B_1(1 + 2\alpha^2) + C_1(1 + 2\alpha) = 0 \ , \quad \text{ó sea} \quad 2B_1\alpha^2 + 2C_1\alpha = -(B_1 + C_1) = -2$$

$$B_1\alpha^2 + C_1\alpha = -1 \qquad [4]$$

Formando sistema con [3] y [4], hállase

$$B_1(\alpha - \alpha^2) = 2\alpha + 1 \ , \quad B_1[\alpha + 1 + \alpha] = 2\alpha + 1 \ , \quad B_1 = 1$$

$$C_1 = 2 - B_1 = 1 \ , \quad A_1 = 3 - (B_1 + C_1) = 3 - 2 = 1 \ .$$

Así, pues, en definitiva, se tiene

$$y = \frac{3\theta^2}{\theta^3 + 1} = \frac{A_1}{\theta + 1} + \frac{B_1}{\theta + \alpha} + \frac{C_1}{\theta + \alpha^2} = \frac{1}{\theta + 1} + \frac{1}{\theta + \alpha} + \frac{1}{\theta + \alpha^2} \ .$$

Empero la indeterminación de λ, λ', μ, μ', nos permite establecer las ecuaciones de condición

$$B\lambda + B'\lambda' = o \quad , \qquad C\mu + C'\mu' = o$$

en virtud de las cuales los valores de X é Y, en términos generales, se expresarán por

$$X = \frac{P}{\theta - \alpha} + \frac{Q}{\theta - \gamma} \qquad Y = \frac{R}{\theta - \alpha} + \frac{S}{\theta - \beta} \quad (\pi)$$

Al derivar, según θ, estas dos igualdades, hállase

$$\frac{dX}{d\theta} = -\frac{P}{(\theta-\alpha)^2} - \frac{Q}{(\theta-\gamma)^2} \quad , \qquad \frac{dY}{d\theta} = -\frac{R}{(\theta-\alpha)^2} - \frac{S}{(\theta-\beta)^2}$$

de donde

$$\frac{Y dX - X dY}{d\theta} = \left[\frac{P}{\theta-\alpha} + \frac{Q}{\theta-\gamma}\right]\left[\frac{R}{(\theta-\alpha)^2} + \frac{S}{(\theta-\beta)^2}\right] -$$

$$- \left[\frac{R}{\theta-\alpha} + \frac{S}{\theta-\beta}\right]\left[\frac{P}{(\theta-\alpha)^2} + \frac{Q}{(\theta-\gamma)^2}\right] \quad (A)$$

Ahora, para que la integral $\int [Ydx - XdY]$, resulte algebraica, es preciso que los resíduos pertenecientes al segundo miembro, los cuales podemos designar por a, b y c, conforme á los valores α, β, y γ, de la variable θ, desaparezcan con el objeto de que sea el resultado independiente de toda función logaritmica; así, pues, debe suponerse $a = o$, $b = o$ y $c = o$; empero una cualquiera de estas tres condiciones entra en las otras dos, por ser $a + b + c = o$ (*), bastando, por consiguiente, suponer por ejemplo, $b = o$ y $c = o$.

(*) Sabido es por el análisis que si $F(x)$ y $F_1(x)$ son dos polinomios enteros, siendo $F(x) = (x-a)^n (x-b)^p \cdots\cdots$, y $F_1(x)$ de grado inferior á $F(x)$, se puede escribir

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{A_1}{(x-a)^2} + \cdots\cdots + \frac{B}{x-b} + \frac{B_1}{(x-b)^2} + \cdots\cdots$$

Al integrar, resulta:

$$\int \frac{F_1(x)}{F(x)} dx = A\, l(x-a) - \frac{A_1}{(x-a)} \cdots\cdots + B\, l(x-b) - \frac{B_1}{x-b} \cdots\cdots + \cdots\cdots (I)$$

Además, como el resíduo b se refiere al coeficiente de $\frac{1}{\theta-\beta}$; y c, al de $\frac{1}{\theta-\gamma}$, claro está que al suponer θ igual á β ó á γ, según la igualdad (A), se tiene

$$\frac{P}{(\beta-\alpha)^2}+\frac{Q}{(\beta-\alpha)^2}=b=o\ , \qquad \frac{R}{(\gamma-\alpha)^2}+\frac{S}{(\gamma-\beta)^2}=c=o\ .$$

Estas ecuaciones quedan satisfechas, siendo

$$P=(\beta-\alpha)^2\ , \quad Q=-(\beta-\gamma)^2\ , \quad R=(\gamma-\alpha)^2\ , \quad S=-(\gamma-\beta)^2\ ,$$

Y si por fin sustituímos estos valores en (π), tendremos conocidos ya los valores de X é Y, esto es

$$X=\frac{(\beta-\alpha)^2}{\theta-\alpha}-\frac{(\beta-\gamma)^2}{\theta-\gamma} \qquad Y=\frac{(\gamma-\alpha)^2}{\theta-\alpha}-\frac{(\gamma-\beta)^2}{\theta-\beta}$$

Estas son las condiciones á que debe sujetarse la integral primitiva: $\int y\ dx$, para que pueda resolverse en función algebraica, conocidas las relaciones que enlazan X é Y, con x é y, siendo α, β y γ las tres raíces de la ecuación $\theta^3+I=o$.

Fácil nos será ahora deducir la fórmula que corresponde á $\int[YdX-YdX]$, aunque para ello nos obligue á ciertos desarrollos de cálculo, que de todos modos consideramos conveniente detallar.

Luego interesa que los términos logarítmicos del segundo miembro se anulen á fin de que la integral del primer miembro pueda representarse por una función algebraica.

Ahora bien; todos los términos de (1), excepto los logarítmicos, cabe desarrollarlos en funciones algebraicas.

Mas para los términos logarítmicos, se tiene:

$$\frac{1}{x-a}=\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{a^2}{x^3}+\cdots\cdots,\ \frac{1}{x-b}=\frac{1}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{b^2}{x^3}+\cdots\cdots$$

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\cdots\cdots=\frac{A+B+\cdots\cdots}{x}+\frac{Aa+Bb+\cdots\cdots}{x^2}+\cdots\cdots$$

é integrando

$$Al(x-a)+Bl(x-b)+\cdots\cdots=(A+B+\cdots\cdots)lx-\frac{Aa+Bb+\cdots\cdots}{x}+\cdots\cdots$$

y para que este resultado se refiera á las funciones algebraicas hay qne suponer $A+B\cdots=o$, es decir, la suma de todos los resíduos de la función igual á cero.

Según los valores hallados anteriormente, se tiene

$$Y\frac{d\,X}{d\,\theta}=\left[\frac{(\gamma-\alpha)^2}{\theta-\alpha}-\frac{(\gamma-\beta)^2}{\theta-\beta}\right]\left[-\frac{(\beta-\alpha)^2}{(\theta-\alpha)^2}+\frac{(\beta-\gamma)_2}{(\theta-\gamma)^2}\right]=$$

$$=-\frac{(\gamma-\alpha)^2\,(\beta-\alpha)^2}{(\theta-\alpha)^3}+$$

(δ)

$$+(\beta-\gamma)^2\left[\frac{(\beta-\alpha)^2}{(\theta-\beta)\,(\theta-\alpha)^2}+\frac{(\gamma-\alpha)^2}{(\theta-\alpha)\,(\theta-\gamma)^2}-\frac{(\beta-\gamma)^2}{(\theta-\beta)\,(\theta-\gamma)^2}\right]\ (*)$$

(*) Al tomar los términos que están dentro del paréntisis de (δ), podemos descomponerlos en fracciones simples. El primero, da

$$\frac{(\beta-\alpha)^2}{(\theta-\beta)\,(\theta-\alpha)^2}=\frac{B}{\theta-\beta}+\frac{A}{(\theta-\alpha)^2}+\frac{A'}{\theta-\alpha}=\frac{B}{\theta-\beta}+\frac{A+A'\,(\theta-\alpha)}{(\theta-\alpha)^2}=$$

$$=\frac{B\,(\theta^2-2\alpha\theta+\alpha^2)+A\,(\theta-\beta)+A'\,[\theta^2-(\alpha+\beta)\,\theta+\alpha\beta]}{(\theta-\beta)\,(\theta-\alpha)^2}$$

Luego $B+A'=o$

$$-2B\alpha+A-A'\,(\alpha+\beta)=o$$

$$B\alpha^2-A\beta+A'\alpha\beta=(\beta-\alpha)^2,$$

de este sistema, se deduce

$$A'=-B,\ 2A'\alpha+A-A'\,(\alpha+\beta)=o,\ -A'\alpha^2-A\beta+A'\,\alpha\beta=(\beta-\alpha)^2,$$

ó sea

$$A=A'\,(\beta-\alpha),\ -A'\alpha^2-A'\,(\beta-\alpha)\,\beta+A'\alpha\beta=(\beta-\alpha)^2$$

de donde

$$-A'\,(\beta-\alpha)^2=(\beta-\alpha)^2$$

y por fin

$$A'=-1\quad,\quad A=-(\beta-\alpha)\quad,\quad B=1.$$

Integrando, resulta:

$$\int\frac{(\beta-\alpha)^2}{(\theta-\beta)\,(\theta-\alpha)^2}\,d\,\theta=\int\frac{d\,\theta}{\theta-\beta}+\int\frac{-(\beta-\alpha)\,d\,\theta}{(\theta-\alpha)^2}+\int\frac{-d\,\theta}{\theta-\alpha}=$$

$$=l\,(\theta-\beta)+\frac{\beta-\alpha}{\theta-\alpha}-l\,(\theta-\alpha)\,.$$

Al integrar, resulta:

$$\int Y d X = -\int \frac{(\gamma-\alpha)^3 (\beta-\alpha)^2}{(\theta-\alpha)^3} d\theta +$$

$$+ (\beta-\gamma)^2 \left[l(\theta-\beta) + \frac{\beta-\alpha}{\theta-\alpha} - l(\theta-\alpha) + l(\theta-\alpha) + \frac{\alpha-\gamma}{\theta-\gamma} - l(\theta-\gamma) - \right.$$

$$\left. - l(\theta-\beta) - \frac{\beta-\gamma}{\theta-\gamma} + l(\theta-\gamma) \right] =$$

$$= \frac{(\gamma-\alpha)^3 (\beta-\alpha)^2}{2(\theta-\alpha)^2} - (\beta-\gamma)^2 \frac{\beta-\alpha}{\theta-\gamma} + (\beta-\gamma)^2 \frac{\beta-\alpha}{\theta-\alpha} . \qquad (\Delta)$$

Ahora si atendemos á las fórmulas de X, é Y, veremos que se puede pasar de una á otra, suponiendo sencillamente una permutación entre β y γ, debiendo resultar, sin necesidad de repetir los cálculos anteriores, la expresión siguiente para $\int X d Y$.

$$\int X d Y = \frac{(\beta-\alpha)^2 (\gamma-\alpha)^2}{2(\theta-\alpha)^2} - \frac{(\gamma-\beta)^2 (\gamma-\alpha)}{\theta-\beta} + (\gamma-\beta)^2 \frac{\gamma-\alpha}{\theta-\alpha}$$

Pasemos al segundo término de dentro del paréntesis de la fórmula (δ), el cual de un modo análogo al anterior, dará lugar á los desarrollos siguientes:

$$\frac{(\gamma-\alpha)^3}{(\theta-\alpha)(\theta-\gamma)^3} = \frac{A}{\theta-\alpha} + \frac{C}{(\theta-\gamma)^3} + \frac{C'}{\theta-\gamma} =$$

$$= \frac{A(\theta^2 - 2\theta\gamma + \gamma^2) + C(\theta-\alpha) + C'(\theta-\alpha)(\theta-\gamma)}{(\theta-\alpha)(\theta-\gamma)^3}$$

$$\left.\begin{array}{l} A + C' = 0 \\ -2A\gamma + C - C'(\alpha+\gamma) = 0 \\ A\gamma^2 - C\alpha + C'\alpha\gamma = (\gamma-\alpha)^3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} C' = -A \\ 2C'\gamma + C - C'(\alpha+\gamma) = 0 \\ -C'\gamma^2 - C\alpha + C'\alpha\gamma = (\gamma-\alpha)^3 \end{array}$$

$$C = C'(\alpha-\gamma), \quad -C'\gamma^2 - C'(\alpha-\gamma)\alpha + C'\alpha\gamma = (\gamma-\alpha)^3$$

$$-C'(\gamma-\alpha)^2 = (\gamma-\alpha)^3, \quad C' = -1, \quad C = -(\alpha-\gamma), \quad A = 1$$

Integrando, se obtiene

$$\int \frac{(\gamma-\alpha)^2 d\theta}{(\theta-\alpha)(\theta-\gamma)^3} = \int \frac{d\theta}{\theta-\alpha} - \int \frac{\alpha-\gamma}{(\theta-\gamma)^2} d\theta -$$

$$- \int \frac{d\theta}{\theta-\gamma} = l(\theta-\alpha) + \frac{\alpha-\gamma}{\theta-\gamma} - l(\theta-\gamma)$$

Al sustituir valores en $\int [\, Y dX - X dY]$, se obtiene

$$\int [Y dX - X d Y] = (\beta-\gamma)^2 \left[\frac{\gamma-\alpha}{\theta-\beta} - \frac{\gamma-\alpha}{\theta-\alpha} - \frac{\beta-\alpha}{\theta-\gamma} + \frac{\beta-\alpha}{\theta-\alpha} \right] =$$

$$= (\beta-\gamma)^2 \left[\frac{-\alpha(\beta-\gamma) + \beta^2 - \gamma^2 - \theta(\beta-\gamma)}{(\theta-\beta)(\theta-\gamma)} + \frac{\beta-\gamma}{\theta-\alpha} \right] =$$

$$= (\beta-\gamma)^3 \left[\frac{\beta+\gamma-\alpha-\theta}{(\theta-\beta)(\theta-\gamma)} + \frac{1}{\theta-\alpha} \right] = (\beta-\gamma)^3 \frac{\beta(\gamma-\alpha) - \alpha(\gamma-\alpha)}{(\theta-\alpha)(\theta-\beta)(\theta-\gamma)} =$$

$$= (\beta-\gamma)^3 \frac{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}{(\theta-\alpha)(\theta-\beta)(\theta-\gamma)}$$

En virtud de este resultado, puede afirmarse que la integral $\int (y\,dx - x\,dy)$, se resolverá en función racional respecto á θ, según se desprende de la fórmula primitiva de que hemos partido, ó sea

$$(u'\lambda - u\lambda') \int (y\,dx - x\,dy) = \int [Y dX - X d Y]$$

El tercer término de la misma fórmula (δ), da

$$\frac{(\beta-\gamma)^3}{(\theta-\beta)(\theta-\gamma)^3} = \frac{B}{\theta-\beta} + \frac{C}{(\theta-\gamma)^2} + \frac{C'}{\theta-\gamma} =$$

$$= \frac{B(\theta^2 - 2\theta\gamma + \gamma^2) + C(\theta-\beta) + C'(\theta^2 - \theta(\beta+\gamma) + \beta\gamma)}{(\theta-\beta)(\theta-\gamma)^2}$$

$$B + C' = 0\,, \quad -2B\gamma + C - C'(\beta+\gamma) = 0\,, \quad B\gamma^2 - C\beta + C'\beta\gamma = (\beta-\gamma)^3$$

$$C' = -B\,, \quad 2C'\gamma + C - C'(\beta+\gamma) = 0\,, \quad -C'\gamma^2 - C\beta + C'\beta\gamma = (\beta-\gamma)^3$$

$$C = C'(\beta-\gamma)\,, \quad -C'(\beta-\gamma)^2 = (\beta-\gamma)^3\,, \quad C' = -1\,, \quad C = -(\beta-\gamma)\,, \quad B = 1$$

Al integrar, resulta:

$$\int \frac{(\beta-\gamma)^3}{(\theta-\beta)(\theta-\gamma)^3}\, d\theta = \int \frac{d\theta}{\theta-\beta} - \int \frac{\beta-\gamma}{(\theta-\gamma)^2}\, d\theta - \int \frac{d\theta}{\theta-\gamma} =$$

$$= l(\theta-\beta) + \frac{\beta-\gamma}{\theta-\gamma} - l(\theta-\gamma)\,.$$

Luego al sustituir todos estos valores en la integral $\int Y dX$, se encuentra la igualdad (Δ)

Digno de mención es que si aplicamos las fórmulas anteriores á la ecuación de M. Hermite, de tercer orden, en el supuesto de que hemos hallado ya

$$x = \frac{3\theta}{\theta^3+1} = -\frac{1}{\theta+1} - \frac{\alpha^2}{\theta+\alpha} - \frac{\alpha}{\theta+\alpha^2}$$

$$y = \frac{3\theta^2}{\theta^3+1} = \frac{1}{\theta+1} + \frac{1}{\theta+\alpha} + \frac{1}{\theta+\alpha^2}$$

cabe deducir las igualdades siguientes:

$$(\alpha-\alpha^2)(x+\alpha^2 y) = \frac{(1-\alpha)^2}{\theta+1} - \frac{(\alpha-\alpha^2)^2}{\theta+\alpha^2}$$

$$(\alpha^2-\alpha)(x+\alpha y) = \frac{(1-\alpha^2)^2}{\theta+1} - \frac{(\alpha-\alpha^2)^2}{\theta+\alpha}$$

En efecto, se tiene

$$x+\alpha^2 y = -\frac{1}{\theta+1} - \frac{\alpha^2}{\theta+\alpha} - \frac{\alpha}{\theta+\alpha^2} + \alpha^2\left(\frac{1}{\theta+1} + \frac{1}{\theta+\alpha} + \frac{1}{\theta+\alpha^2}\right)$$

$$(\alpha-\alpha^2)(x+\alpha^2 y) = (\alpha-\alpha^2)\left(-\frac{1}{\theta+1} - \frac{\alpha}{\theta+\alpha^2}\right) + (\alpha-\alpha^2)\left(\frac{1}{\theta+1} - \frac{1}{\theta+\alpha^2}\right)\alpha^2$$

$$= \frac{(\alpha-\alpha^2)(\alpha^2-\alpha)}{\theta+\alpha^2} + \frac{\alpha^2-\alpha+\alpha^3-\alpha^4}{\theta+1} = -\frac{(\alpha-\alpha^2)^2}{\theta+\alpha^2} + \frac{\alpha^2-\alpha+1-\alpha}{\theta+1}$$

$$= \frac{\alpha^2-2\alpha+1}{\theta+1} - \frac{(\alpha-\alpha^2)^2}{\theta+\alpha^2} = \frac{(1-\alpha)^2}{\theta+1} - \frac{(\alpha-\alpha^2)^2}{\theta+\alpha^2}$$

De un modo análogo, se tiene también

$$(\alpha^2-\alpha)(x+\alpha y) = (\alpha^2-\alpha)\left[-\frac{1}{\theta+1} - \frac{\alpha^2}{\theta+\alpha} - \frac{\alpha}{\theta+\alpha^2} + \right.$$

$$\left. + \alpha\left(\frac{1}{\theta+1} + \frac{1}{\theta+\alpha} + \frac{1}{\theta+\alpha^2}\right)\right] =$$

$$= (\alpha^2-\alpha)\frac{\alpha-1}{\theta+1} + (\alpha^2-\alpha)\frac{\alpha-\alpha^2}{\theta+\alpha} = \frac{\alpha^3-\alpha^2-\alpha^2+\alpha}{\theta+1} - \frac{(\alpha-\alpha^2)^2}{\theta-\alpha} =$$

$$= \frac{1-2\alpha^2+\alpha^4}{\theta+1} - \frac{(\alpha-\alpha^2)^2}{\theta+\alpha} = \frac{(1-\alpha^2)^2}{\theta+1} - \frac{(\alpha-\alpha^2)^2}{\theta+\alpha}.$$

Estos valores obtenidos pueden igualarse á X é Y.

$$(\alpha-\alpha^2)\,(x+\alpha^2 y=\frac{(1-\alpha)^2}{\theta+1}-\frac{(\alpha-\alpha^2)^2}{\theta+\alpha^2}=X \qquad (a)$$

$$(\alpha^2-\alpha)\,(x+\alpha y)=\frac{(1-\alpha^2)^2}{\theta+1}-\frac{(\alpha-\alpha^2)^2}{\theta+\alpha}=Y \qquad (b)$$

puesto que estos resultados corresponden con las fórmulas generales de X é Y, siguientes, ya obtenidas

$$X=\frac{(\beta-\alpha)^2}{\theta-\alpha}-\frac{(\beta-\gamma)^2}{\theta-\gamma} \qquad Y=\frac{(\gamma-\alpha)^2}{\theta-\alpha}-\frac{(\gamma-\beta)^2}{\theta-\beta}$$

en el concepto de que $\alpha=-1$, $\beta=-\alpha$ y $\gamma=-\alpha^2$.

Además, los valores hallados satisfacen también á las ecuaciones de condición

$$B\lambda+B'\lambda'=o \quad , \qquad C\mu+C'\mu'=o \qquad (c)$$

al saber que $X=\lambda x+\lambda' y$, $Y=\mu x+\mu' y$.

En efecto, en virtud de (a) y (b), resulta

$$\lambda=\alpha-\alpha^2 \quad , \qquad \lambda'=(\alpha-\alpha^2)\,\alpha^2$$

$$\mu=\alpha^2-\alpha \quad , \qquad \mu'=(\alpha^2-\alpha)\,\alpha$$

Y según los valores de x é y, también hallados en fracciones simples, sabemos que

$$B=-\alpha^2 \ , \qquad B_1=1 \ , \qquad C=-\alpha \ , \qquad C_1=1$$

Luego al sustituir valores en (c), se obtiene

$$-\alpha^2(\alpha-\alpha^2)+(\alpha-\alpha^2)\,\alpha^2=o$$

$$-\alpha(\alpha^2-\alpha)+(\alpha^2-\alpha)\,\alpha=o \ ,$$

igualdades que se convierten en identidades, demostrándonos que las igualdades (c) quedan satisfechas por los valores anteriormente hallados.

En suma, se tiene que la integral $\int y\,dx$ que ha tomado las formas siguientes:

$$\int y\,dx = \frac{1}{2}\,yx + \frac{1}{2}\int [y\,dx - x\,dy]$$

$$(\mu'\lambda - \lambda'\mu)\int (y\,dx - x\,dy) = \int (Y\,dX - X\,dY)$$

aplicada al caso que consideramos, permite ser expresada en función racional y algebraica de θ, como única variable correspondiente á las curvas unicursales.

Por último llegamos á las aplicaciones de los principios anteriores. Nos concretaremos solo á los *foliums* de Descartes, referentes á los de tercero y cuarto orden, y al considerar las curvas unicursales nos permitirá resolver la cuestión sin necesidad de despejar la y, en las ecuaciones respectivas, ni de pasar á coordenadas polares, como suelen realizarlo varios autores de cálculo infinitesimal, con objeto de salvar las dificultades que presenta el análisis ordinario al pretender resolver el problema directamente.

Empecemos por el *folium* de tercer orden, dando la ecuación que lo representa bajo un caracter más general que no la habíamos considerado anteriormente, esto es

$$x^3 + y^3 - axy = o$$

Al suponer $y = xt$, se obtiene

$$x = \frac{at}{1+t^3}, \qquad y = \frac{at^2}{1+t^3}, \qquad dx = a\,\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}\,dt$$

Fácilmente se concibe que estos valores deben conducirnos á probar, según los principios que anteceden, que la integral $\int y\,dx$ debe resolverse en una función algebraica y racional de t; empero los casos particulares que suponemos, permiten prescindir de dichos principios, resolviendo las integrales directamente.

En efecto

$$\int y\,dx = \int a\,\frac{t^2}{1+t^3}\,a\,\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}\,dt = a^2\int \frac{t^2-2t^5}{(1+t^3)^3}\,dt =$$

$$= a^2\left[\int \frac{t^2\,dt}{(1+t^3)^2} - 2\int \frac{t^5\,dt}{(1+t^3)^3}\right]$$

Determinemos cada una de las integrales anteriores

$$\int \frac{t^3\,dt}{(1+t^3)^3} = \frac{1}{3}\int \frac{3t^3\,dt}{(1+t^3)^3} = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{2(1+t^3)^2}$$

$$\int \frac{t^6\,dt}{(1+t^3)^3} = \int t^3 \frac{t^3\,dt}{(1+t^3)^3} = \frac{1}{3}\int t^3 \frac{3t^2\,dt}{(1+t^3)^3} =$$

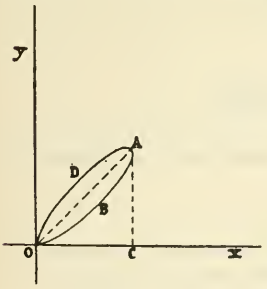
$$= \frac{1}{3}\left[-\frac{t^3}{2(1+t^3)^2} + \int \frac{3t^2\,dt}{2(1+t^3)^2}\right] = \frac{1}{3}\left[-\frac{t^3}{2(1+t^3)^2} - \frac{1}{2(1+t^3)}\right]$$

Sustituyendo estos valores en la integral primitiva, se deduce

$$\int y\,dx = a^2\left[-\frac{1}{3}\,\frac{1}{2(1+t^3)^2} - \frac{2}{3}\left(-\frac{t^3}{2(1+t^3)^2} - \frac{1}{2(1+t^3)}\right)\right] =$$

$$= a^2\left[-\frac{1}{6}\,\frac{1}{(1+t^3)^2} + \frac{2}{6}\,\frac{t^3}{(1+t^3)^2} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{1+t^3}\right]$$

Al analizar geometricamente la ecuación del *folium* de tercer orden, resulta la forma que se asigna en la adjunta figura, refiriéndose solo á la parte de curva cerrada.



Además si de momento tomáramos la ecuación anterior referida á ejes polares, sería

$$\rho = \frac{a\ \text{sen.}\,\theta\ \cos.\,\theta}{\text{sen.}^3\,\theta + \cos.^3\,\theta}\ ;\qquad *$$

y según la teoría de máximos y mínimos, el vector máximo corresponde á un ángulo de 45°, resultando $OC = CA$, y como hemos supuesto $y = xt$, se deduce que $t = 1$.

De modo que para tener el área correspondiente á *OBACO*, deben tomarse como límites para *t;* cero y uno.

(*) Al tomar la primera derivada de ρ, para la determinación del máximo, basta considerar el numerador de la expresión correspondiente, averiguando las condiciones que debe reunir para que sea cero.

$$(\text{sen.}^3\,\theta + \cos.^3\,\theta)\,(\cos.^2\,\theta - \text{sen.}^2\,\theta) - \text{sen.}\,\theta\,\cos.\,\theta\,[3\ \text{sen.}^2\,\theta\,\cos.\,\theta - 3\,\cos.^2\,\theta\ \text{sen.}\,\theta],$$

luego para que esta expresión sea cero, es suficiente que $\theta = \frac{\pi}{4}$, valor que determina la dirección *OA*, como bisetriz del ángulo recto *yox*.

Luego

$$\int y\,dx = a^2 \int_0^1 \left[-\frac{1}{6(1+t^3)^2} + \frac{2}{6}\,\frac{t^3}{(1+t^3)^2} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{1+t^3} \right] =$$

$$= a^2 \left[-\frac{1}{24} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6}\,\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \right] = \frac{a^2}{24}\,.$$

Para la determinación del área del triángulo OAC, recordemos que

$$x = a\,\frac{t}{1+t^3}\,,\quad y = a\,\frac{t^2}{1+t^3} \quad \text{y para} \quad t=1\,,\quad x=\frac{a}{2}\,,\quad y=\frac{a}{2}$$

de donde

$$\frac{xy}{2} = \frac{a}{2}\,\frac{a}{2}\,\frac{1}{2} = \frac{a^2}{8}\,.$$

Y como de la figura, se desprende que

$$OBAO = OAC - OBACO;$$

al sustituir valores, se obtiene

$$OBAO = \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{24} = \frac{a^2}{12}$$

Y por fin, doblando este valor, atendida la simetría de la curva, según OA, resulta $OBADO = \dfrac{a^2}{6}$.

Valor definitivo correspondiente á la expresión del área de la curva cerrada.
Consideraremos ahora el *folium* de cuarto orden, dado por la ecuación

$$x^4 + y^4 - a^2 xy = o\,.$$

Siguiendo igual procedimiento que en el caso anterior, cabrá escribir inmediatamente la serie de igualdades siguientes:

$$y = xt \qquad x^4 + x^4 t^4 - a^2 x^2 t = o$$

$$x = a\,\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1+t^4}} \qquad y = a\,\frac{t\sqrt{t}}{\sqrt{1+t^4}}$$

$$dx = a\,\frac{\sqrt{1+t^4}\,\dfrac{dt}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t}\,\dfrac{4t^3\,dt}{2\sqrt{1+t^4}}}{1+t^4} = a\,\frac{1-3t^4}{2\sqrt{t}\,(1+t^4)^{\frac{3}{2}}}\,dt$$

Luego

$$\int y\,dx = a\int \frac{t\sqrt{t}}{\sqrt{1+t^4}}\,a\,\frac{1-3t^4}{2\sqrt{t}\,(1+t^4)^{\frac{3}{2}}}\,dt = a^2\int \frac{t-3t^5}{2(1+t^4)^2}\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int \frac{t\,dt}{(1+t^4)^2} - \frac{3}{2}a^2\int \frac{t^5\,dt}{(1+t^4)^2}$$

La última integral, da

$$\int \frac{t^5\,dt}{(1+t^4)^2} = \frac{1}{4}\int t^3\,\frac{4t^3\,dt}{(1+t^4)^2} = \frac{1}{4}\left[-\frac{t^2}{1+t^4} + \int \frac{2t\,dt}{1+t^4}\right],$$

y al suponer $t^2 = \theta$, resulta para la integral primitiva

$$\int y\,dx = \frac{a^2}{4}\int \frac{d\theta}{(1+\theta^2)^2} - \frac{3}{8}a^2\left[-\frac{\theta}{1+\theta^2} + \int \frac{d\theta}{1+\theta^2}\right] \quad (A)$$

Si consideramos por último la integral

$$\int \frac{d\theta}{(1+\theta^2)^2},$$

se tiene

$$\int \frac{d\theta}{(1+\theta^2)^2} = \int \frac{1+\theta^2-\theta^2}{(1+\theta^2)^2}\,d\theta = \int \frac{d\theta}{1+\theta^2} - \frac{1}{2}\int \theta\,\frac{2\theta\,d\theta}{(1+\theta^2)^2} =$$

$$= \int \frac{d\theta}{1+\theta^2} + \frac{1}{2}\,\frac{\theta}{1+\theta^2} - \frac{1}{2}\int \frac{d\theta}{1+\theta^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d\theta}{1+\theta^2} + \frac{1}{2}\,\frac{\theta}{1+\theta^2}$$

Al sustituir este valor en (*A*), resulta

$$\int y\,dx = \frac{a^2}{4}\left[\frac{1}{2}\int \frac{d\theta}{1+\theta^2} + \frac{1}{2}\,\frac{\theta}{1+\theta^2}\right] -$$

$$-\frac{3}{8}\,a^2\left[-\frac{\theta}{1+\theta^2} + \int \frac{d\theta}{1+\theta^2}\right] =$$

$$= -\frac{a^2}{4}\int \frac{d\theta}{1+\theta^2} + \frac{a^2}{2}\,\frac{\theta}{1+\theta^2} = -\frac{a^2}{4}\,\text{arc. tg. }\theta + \frac{1}{2}\,a^2\,\frac{\theta}{1+\theta^2}$$

Por razones análogas á las del ejemplo anterior, la curva que resulta parecida á la anterior, admite un máximo para el radio vector correspondiente á un ángulo de 45°, respecto á los ejes x, é y; y si nos concretáramos á la determinación del área correspondiente al ángulo cuyas coordenadas son positivas, se tiene $x = y$, para el punto A, y como $y = xt$, resulta para límites de t, cero y uno, siendo los mismos para θ, puesto que $t^2 = \theta$.

Además, por ser

$$x = a\,\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1+t^4}}\,,\quad y = a\,\frac{t\sqrt{t}}{\sqrt{1+t^4}}$$

se deduce

$$\text{para}\quad t = 1,\quad x = \frac{a}{\sqrt{2}}\,,\quad y = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Luego la integral anterior se convierte en

$$\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} y\,dx = -\frac{a^2}{4}\left[\text{arc. tg. }\theta\right]_0^1 + \frac{1}{4}\,a^2 = -\frac{a^2\pi}{16} + \frac{a^2}{4} =$$

$$= \text{área } OBACO.$$

Ahora bien, en el concepto de utilizar la misma figura anterior, se tiene

$$OBAO = OAC - OBACO,$$

y siendo

$$OAC = \frac{xy}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{a}{\sqrt{2}}\,\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^2}{4},$$

resulta:

$$OBAO = \frac{a^2}{4} + \frac{\pi a^2}{16} - \frac{a^2}{4} = \frac{\pi a^2}{16}.$$

Por fin, para tener el área total *OBADO*, bastará doblar el valor anterior, de donde

$$OBADO = \frac{\pi a^2}{8}$$

Verdadera expresión del área correspondiente á la curva cerrada en el cuadrante positivo.

Ciertamente que podríamos continuar presentando nuevos ejemplos más ó menos complicados que los anteriores, pero entendemos que lo expuesto es suficiente para comprender cual es la importancia que debe concederse á las curvas unicursales, como una de las partes más admirables del Análisis Matemático.

MEMORIAS

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS Y ARTES

DE BARCELONA

TERCERA ÉPOCA — VOL. VII. NÚM. 17

MONOGRAFÍA

DE LA FAMILIA DE LOS DILÁRIDOS (INS. NEUR.)

POR EL ACADÉMICO CORRESPONDIENTE

R. P. LONGINOS NAVÁS, S. J.

Publicada en junio de 1909

LIBRARY
DEC 7 1921
UNIVERSITY OF TORONTO

BARCELONA

A. LÓPEZ ROBERT, IMPRESOR. — CONDE DEL ASALTO, 63

1909

MONOGRAFÍA

DE LA FAMILIA DE LOS DILÁRIDOS (INS. NEUR.)

por el académico correspondiente

R. P. LONGINOS NAVÁS, S. J.

Sesión del día 23 de Abril de 1909

INTRODUCCIÓN

HISTORIA

El género *Dilar* fué creado por Rambur en 1842, para un Neuróptero afín á los *Hemerobius* y *Corydalis*, hallado por él en las cercanías de Granada, en la vertiente septentrional de Sierra Nevada, durante el verano. El nombre genérico le vino del río Dílar, que corre de la Sierra hacia el Genil y del pueblo del mismo nombre.

No se conocía otra especie cuando en 1853 Newman elevó el género *Dilar* á la categoría de familia con el nombre de *Dilaridæ*.

Sin embargo, otros autores, v. gr. Hagen, aun conociendo el trabajo de Newman, siguieron incluyendo el género *Dilar* en la gran familia de los Hemeróbidos.

Poco tardó para que Costa descubriese y describiese otra especie en Italia, el *Dilar parthempæus*, en 1855.

Otras tres especies describió con breve intervalo el Dr. Hagen: *Dilar turcicus*, de Turquía (1858), *Nietneri*, de Ceilán (1858), y *meridionalis*, de España (1863).

A éstas siguen las especies de Mac Lachlan: *D. Hornei*, (1869) de la India, *Prestoni* (1880) del Brasil, *americanus* (1881) de California y *japonicus* (1883) del Japón.

Mis especies son las últimas descritas: el año 1902 el *D. saldubensis*, de Zaragoza, en enero de 1903 otras cuatro, también de España: *D. dissímilis*, del Moncayo, *pictus*, de Madrid, *campestris*, de Pozuelo de Calatrava (Ciudad Real) y *pumilus*, de Cartagena. En febrero del mismo año añadí el *D. Bolivari*, de Orán (Argelia). Finalmente en el Primer Congreso de Naturalistas Españoles, celebrado en Zaragoza en octubre de 1908, tuve el honor de describir dos especies más y de dividir el género.

El haber reunido gran número de especies y ejemplares en mi colección me impulsó á ensayar una monografía de la familia. Dirigíme al efecto á los museos

donde podía sospechar ó sabía cierto se hallaban algunos ejemplares, escribiendo á los de Madrid, Lisboa, Coimbra, París, Londres, Bruselas, Leiden, Berlín, Viena, Ginebra, Turín, Nápoles, Colombo, Tokío, Río Janeiro, Cambridge y Stettin. Enviáronme ejemplares los de París, Nápoles, Berlín, Madrid, Londres, Bruselas y Viena. Contestáronme que nada tenían los de Coimbra, Lisboa, Turín y Stettin. El de Ginebra no se atrevió á exponer á los riesgos del viaje el únicviejo y deteriorado ejemplar que posee. De los demás no he recibido contestación.

Siento gran placer al rendir el testimonio de mi más profunda gratitud á los que con sus envíos me han ayudado poderosamente, debiendo consignar en especial los nombres del R. P. Eugenio Saz, S. J., de Barcelona, R P. Adeodato Marcet, O. S. B., de Montserrat, y R. P. Joaquín da Silva Tavares, S. J., de San Fiel (Portugal), quienes me han cedido ejemplares, y á los Sres. D. Roberto du Buysson, de París, Prof. Monticelli, de Nápoles, Dr. Kolbe, de Berlín, D. Ignacio Bolivar, de Madrid, Dr. Waterhouse, de Londres, Prof. J. Severin, de Bruselas y Dr. Handlirsch, de Viena, que me han comunicado los de sus museos.

No menos agradecido estoy á los Sres. Banks, de East Falls Church (Estados Unidos), y Morton, de Edimburgo (Escocia), quienes con sus indicaciones y noticias bibliográficas han ayudado no poco á mi trabajo.

BIBLIOGRAFÍA

[1] 1842. **P. Rambur.** Faune entomologique de l'Andalousie. II. pl. 9, figs. 4, 5.

[2] 1842. — Histoire Naturelle des Insectes Névroptères. París, p. 445, pl. 10, figs. 3 y 4.

[3] 1852. **Newman.** A proposed division of the Neuroptera. London, p. 22.

[4] 1853. **Francis Walker.** List of the specimens of Neuropterous Insects in the collection of the British Museum. London, p. 197.

[5] 1853. **Newman.** A proposed division of the Neuroptera. Zoologist t. XI, app., p. CCII.

[6] 1855. **Achille Costa.** Fauna del Regno di Napoli. Neurotteri. Emirobidei. Napoli. p. 19, tav. XI, fig. 6.

[7] 1856. **Rosenhauer.** Die Thiere Andalusiens. Erlangen.

[8] 1858. **Dr. Hagen.** Russlands Neuropteren. Entom. Zeit. Stettin, p. 129.

[9] 1858. — Synopsis der Neuroptera Ceylons, p. 482.

[10] 1865. **Edouard Pictet.** Synopsis des Névroptères d'Espagne. Genève-Paris, p. 55.

[11] 1865. **Dr. Hagen.** Hemerobidarum synopsis synonymica. Stettin.

[12] 1867. — Die Neuropteren Spaniens nach Ed. Pietet's Synopsis des Névroptères d'Espagne und Dr. Staudingers Mittheilungen. Wien, p. 291.

[13] 1869. **Robert MacLachlan.** On a Neuropterous Insect from N. W. India, belongiorg to the Genus Dilar, London, Ent. Mo. Mag., vol. V, p. 239.

[14] 1880. **Robert MacLachlan**. Ocurrence of the Neuropterons genus *Dilar* in South America. Entom. Mo. Mag., vol. XVII, p. 39.

[15] 1881. — A North American species of *Dilar*. Entom. Mo. Mag. vol. XVIII, p. 55.

[16] 1883. — Dilar japonicus nov. sp. Entom. Mo. Mag. vol XIX, p. 22.

[17] 1902. — An annotated list of Neuroptera planipennia collected in Central Spain by Dr. T. A. Chapman and Mr. J. C. Champion in July and August 1901. London, Entom. Mo. Magazine, p. 129.

[18] 1902. **M. A. Laguna**. Excursiones á Santa Fe y Cadrete. Zaragoza. Bol. Soc. Arag. Cienc. Nat., p. 134.

[19] 1903. **R. P. Longinos Navás, S. J.** Diláridos de España. Mem. R. Acad. Cienc. y Artes de Barc. Enero.

[20] 1903. — Notas entomológicas. XI. Algunos insectos nuevos ó poco conocidos. Bol. Soc. Esp. Hist. Nat., Febrero.

[21] 1903. **Robert Mac Lachlan.** An annotated list of Neuroptera Planipennia collected in Central Spain by Dr. T. A. Chapman and Mr. G. C. Champion in June and July 1902. London, Entom. Mo. Mag., vol. XIV, p. 224.

[22] 1904. **R. P. Longinos Navás, S.** J. Excursión de la Sociedad Aragonesa de Ciencias Naturales á la Sierra de Guara en Julio de 1903. Zaragoza, Bol. Soc. Ar. Cienc. Nat., vol. III, p. 200.

[23] 1905. — Notas entomológicas. XII. Neurópteros de Pozuelo de Calatrava. Bol. R. Soc. Esp. Hist. Nat., diciembre, p. 506.

[24] 1905. **Nathan Banks**. A revision of the Neartic Hemerobidz. Trans. Am. Entom. Soc., XXXII, December.

[25] 1906. **W. G. Lucas**. Neuroptera and Trichoptera taken by Dr. T. A. Chapman in Spain. London, The Entom., p. 276.

[26] 1908. **R. P. Longinos Navás, S. J.** Neurópteros de España y Portugal. S. Fiel, p. 124, lám. 2.

[27] 1909. — Neurópteros nuevos de la fauna Ibérica, Zaragoza, Mem. del I Congr. de Nat. Españoles, p. 143.

PARTE DESCRIPTIVA

CARACTERES DE LA FAMILIA

Neurópteros planipennes de tamaño pequeño.

La *cabeza* presenta los órganos bucales poco prominentes. Los palpos maxilares son de cuatro artejos, cilíndricos. Las antenas son filiformes, con los artejos cilíndricos; algunos de ellos, los del medio, ofrecen en el ♂ un apéndice lateral exterior cilíndrico ó claviforme, flexible, más ó menos largo, por lo cual las ante-

nas del ♂ aparecen pectinadas; (fig. 1.ª, *a*) las de la ♀ son solamente dentadas. En el vértex existen tres grandes verrugas ó tubérculos con aspecto de estemas, con los cuales á veces se han confundido, provistas de largos pelos. Un surco longitudinal del mismo vértex llega hasta el occipucio.

El *protórax* es transverso, con tubérculos parecidos á los de la cabeza, ofreciendo el aspecto de un collar claveteado. El meso-y metatórax con los surcos oblícuos ordinarios en otros Neurópteros, como Crisópidos, Hemeróbidos, etcétera (flg. 1.ª, *b*).

El *abdomen* es cilíndrico, cubierto de largos pelos. En el ♂ el último segmento termina en dos valvas ó placas convexas laterales que pueden acercarse y separarse, dejando entre sí una abertura longitudinal de arriba abajo, vista por detrás (fig. 1.ª *c*), en cuyo fondo aparecen algunos apéndices cortos, ocultos ó poco menos cuando están las valvas ajustadas. En la ♀ el abdomen termina en un largo oviscapto cilíndrico, delgado, próximamente de la longitud del cuerpo.

Las *patas* son delgadas y de tamaño mediano; las tibias cilíndricas, los tarsos de cinco artejos, los cuatro primeros disminuyendo progresivamente de longitud y el quinto algo más largo que el cuarto. Las uñas son delgadas y arqueadas, y entre ellas se distingue un grande arolio (fig. 1.ª, *d*).

Las *alas* son dos pares, grandes para el tamaño del cuerpo, las anteriores siempre bien desarrolladas, las posteriores á veces con tendencia á la atrofia en la ♀. La membrana es en parte hialina, con frecuencia salpicada de manchas pardas. Estas manchas se ven principalmente en las venillas y tienden á alinearse en bandas transversales. En las alas posteriores suelen ser más escasas que en las anteriores. A veces estas manchas se enlazan de tal manera entre sí y son tan abundantes que invaden casi totalmente el ala y le comunican el color pardusco.

Las venas son las ordinarias: 1, costal; 2, subcostal; 3, radio, 4, procúbito (mediana; cubitus anticus de otros autores); 5, cúbito (ó cubitus posticus); 6, postcúbito (postcostal), y 7, axilar (fig. 1.ª, *e*, *f*). El radio está separado constantemente de la subcostal y más ó menos paralelo á ella, terminándose directamente en el margen anterior del ala. Emite dos sectores, ambos cerca de la base, el segundo ó principal con varias ramas, más ó menos ahorquilladas y el primero apenas ramificado, si no es más allá de la mitad del ala. Con frecuencia este primer sector confluye con el segundo en la base, sobre todo en el ala posterior, simulando el primer ramo de un sector único (fig. 1.ª, *f*).

En el ala anterior el campo costal está estrechado en la base, ampliado suavemente poco después y estrechado en la región estigmática, que es poco visible. Las venillas del campo costal algunas son ahorquilladas ó ramosas y entre ellas aparecen en el margen otras cortas intercalares ó libres, más constantes en la región exterior del ala. Entre la subcostal y el radio (campo subcostal, que es estrecho) y entre el radio y su sector (campo radial) existen algunas venillas en variable número. En el disco se ven algunas venillas dispuestas con irregula-

ridad, á veces en una ó dos series gradiformes oblicuas hacia el centro ó mitad externa del ala. Además de ellas se distinguen algunas otras esparcidas en corto número, ya hacia la base, ya hacia el margen posterior.

El ala posterior es de figura y estructura parecida á la anterior.

Son notables en las alas dos manchas, que llamaremos *pupilas*, redondeadas, pequeñas, negruzcas, situadas en una manchita parda, de ordinario. En el ala anterior hay dos: la externa se encuentra hacia la mitad del ala, entre el 2.° y 1.er sector del radio; la interna se ve en el tercio basilar, entre el primer sector y el procúbito (fig. 1.ª, *e*, *g*). El ala posterior posee una sola pupila (fig. 1.ª, *f*), correspondiente á la externa del ala anterior, pero situada más hacia la base, entre los dos sectores del radio. A veces alguna pupila se divide en dos ó más, especialmente la interna del ala anterior (fig. 1.ª, *g*).

POSICIÓN TAXONÓMICA

Rambur [2] aproximó su *Dilar* á los *Corydalis* y por consiguiente á los Siálidos. Cierto que á los *Chauliodes* se asemeja el ♂ por sus antenas pectinadas; pero por lo demás son tan pocas las afinidades de ambos grupos, que no tardaron los autores en alejarlos.

Costa [6] observó oportunamente que de ningún modo podían los *Dilar* asemejarse á los Siálidos, por faltarles el carácter asignado por el mismo Rambur al grupo, esto es, tener dilatado el cuarto artejo de los tarsos, y con mejor acuerdo los aproximó totalmente á los Hemeróbidos, cuyo último anillo constituirían, según él, por lo poco prominentes de los órganos bucales.

Separólos Newman [3, 5] para constituir familia aparte, y así han continuado hasta nuestros días formando un grupo especial, íntimamente enlazado con los Hemeróbidos, tanto que Banks [24] los constituye subfamilia de éstos con el nombre de *Dilarinæ*.

En mi Memoria sobre los Diláridos de España [19], admitiendo la categoría de familia y atendiendo á la existencia de las pupilas en las alas y á otros caracteres los acerqué á los Osmílidos, hasta el punto de avenirme á que se reunieran en una sola familia, la cual debiera entonces dividirse en dos tribus: Osmilinos y Dilarinos.

Su propio puesto está entre los Hemeróbidos y Osmílidos.

Ofrecen además afinidades, aunque más remotas, con otras familias de Neurópteros. Con los Rafídidos convienen en el largo oviscapto de la ♀, mas difieren mucho en la estructura de las alas y otros caracteres. A su vez el ♂ se asemeja á algunos Siálidos en la estructura de las antenas, según se ha dicho, siquiera se aparte en lo demás. En la forma de las alas, especialmente en el campo costal y en el disco, se parecen mucho á los Hemeróbidos; y á los Osmílidos en la existencia de la pupila discal.

IMPORTANCIA TAXONÓMICA DE LOS CARACTERES

Entre todos los caracteres orgánicos de estas especies he dado el primer lugar á los basados en la terminación del abdomen en el ♂. Son los más claros y los más constantes. Mejor hubiera sido limitar las especies con caracteres comunes á ambos sexos; pero no ha sido posible, lo primero porque de varias de ellas no se conoce más que el uno; y lo segundo porque otros caracteres comunes á ambos, como los derivados de la venación de las alas; son mucho más variables y menos fáciles de precisar. Además las ♀♀ de las diferentes especies ofrecen entre sí más semejanza que los ♂♂.

Viene á continuación la forma y estructura del protórax, la figura y disposición de sus tubérculos, muy características en algunas especies.

El número de los dientes ó ramos de las antenas en el ♂ y su longitud relativa á la de los artejos, es asimismo de gran interés.

El número de venillas radiales, ó sea las que enlazan el radio con su sector segundo ó principal, así como el número de venillas que preceden á la pupila externa, puede ser de utilidad dentro de ciertos límites, puesto que varía dentro de la misma especie en distintos individuos y aun en el mismo individuo en las dos alas, derecha é izquierda. Igual suerte corren las venillas discales más ó menos gradiformes. Por excepción ofrecen gran regularidad.

Menos constante es el número de ramos ú horquillas de las principales venas, y aun se da el caso frecuente que un ramo ó sector se enlace de un modo anómalo con una vena que no le corresponde, ó se ahorquille anómalamente.

La posición de las pupilas tampoco es enteramente fija, sobre todo de la interna, ya porque se divide ó multiplica, ya porque la principal ó las secundarias se salen de su campo propio.

BIOLOGÍA

Nada se sabe acerca de la vida de estos insectos, ni se conocen sus larvas. Se ha sospechado si serían acuáticas. Pero Hagen [12] rechaza esta suposición fijándose en el largo oviscapto de la hembra. El ser el oviscapto, dice, parecido al de los Rafídidos declara que la larva no vive en el agua.

Sin embargo, como todos los ejemplares que he cogido los he hallado en las cercanías de aguas corrientes y de poco fondo y lo propio les ha sucedido á los PP. Saz y Marcet, según me lo han comunicado, siéndome dado conjeturar por indicios fundados que lo mismo ha ocurrido á los que han cogido algún *Dilar;* todavía subsiste la duda ó probabilidad de que la larva de los Diláridos sea acuática.

Confirma la sospecha una hembra del *Dilar nevadensis* tipo, en cuyo extremo del oviscapto se ve una masa alargada blanquizca procedente del interior del

mismo. Sin duda que en ella van envueltos los huevos, y siendo tan blanda parece más propia para ser dejada simplemente en el agua ó depositada en el lodo de algún arroyuelo que para introducirla en alguna rendija de las cortezas.

DISTRIBUCIÓN GEOGRÁFICA

Pueden llamarse cosmopolitas los Diláridos, pues se han hallado en Europa, Asia, Africa y en ambas Américas. Es de creer que no faltan en Australia y otras islas de Oceanía y que el no conocerse hasta el presente de aquellas regiones se deba á lo imperfecto de su exploración. Por lo mismo es de creer que existan muchas más especies de las que aquí se citan, pues hallándose en ambas Américas es inverosímil que sólo existan en ellas dos especies, que son las ya conocidas. Si España aparece el país más rico débese sin duda á su riqueza entomológica, pero no menos á su activa exploración, especialmente en estos ultimos años.

Las especies conocidas hasta el presente son 24, repartidas en seis géneros. Sus nombres y distribución geográfica los indica el siguiente cuadro.

Nombres de las especies	EUROPA MERIDIONAL					ASIA			AFRICA		AMÉRICA	
	Portugal	España	Italia	Grecia	Turquía	Occidental	Central	Oriental	Septentrional	Meridional	N.	S.
1.—Dilar nevadensis Ramb. . .	+	+										
2.—Dilar disimilis Nav.		+										
3.—Dilar Kolbei Nav.		+										
4.—Dilar corsicus Nav.			Córcega									
5.—Dilar algericus Nav.									+			
6.—Dilar turcicus Hag.				+	+	+						
7.—Dilar corcyræus Nav. . .				Corfú								
8.—Dilar syriacus Nav.						+						
9.—Dilar lineolatus Nav.						+						
10.—Dilar Bolivari Nav.									+			
11.—Dilar nepos Nav.		+										
12.—Lidar meridionalis Hag. . .		+										
13.—Lidar nemorosus Nav. . .		+										
14.—Lidar parthenopæus Costa .			+									
15.—Lidar pumilus Nav.		+										
16.—Fuentenus campestris Nav. .		+										
17.—Fuentenus saldubensis Nav.		+										
18.—Fuentenus lusitanicus Nav. .	+											
19.—Nepal Hornei Mc. Lchl. . .							+					
20.—Nepal Harmandi Nav. . . .							+					
21.—Rexavius Nietneri Hag. . .							Ceilán					
22.—Rexavius japonicus Mc. Lchl.								Japón				
23.—Nallachius americanus Mc. Lchl. . .											+	
24.—Nallachius Prestoni Mc. Lchl. , . . .												+
TOTAL. . .	2	9	2	2	1	3	3	1	2	0	1	1

CUADRO SINÓPTICO DE LOS GÉNEROS

1. Tamaño generalmente mayor; venillas radiales, ó sea entre el radio y su sector principal, numerosas, 5-15 2
— Tamaño menor; venillas escasas, menos de 5 entre el radio y su sector; éste con 5-6 ramos (especies americanas) . . . . . 6. **Nallachius**, g. nov.
2. Antenas del ♂ con los artejos alargados, dos ó más veces más largos que anchos; ramas laterales de los mismos hasta tres veces más largas que ellos, á veces menos; venillas del disco dispuestas con irregularidad, apenas gradiformes 4
— Antenas del ♂ con artejos del ♂ gruesos y cortos y sus ramos muy largos, tres y más veces que ellos; venillas discales dispuestas en serie oblicua gradiforme bien distinta (especies asiáticas) 3
3. Alas anchas, con ápice redondeado, con dos series de venillas gradiformes medianas, abdomen del ♂ truncado posteriormente, sin proceso superior . . . . . 5. **Rexavius**, g. nov.
— Alas oblongas, con ápice elíptico, con una serie de venillas discales gradiformes; abdomen del ♂ con lóbulo ó proceso superior en el extremo. . . . . 4. **Nepal**, g. nov.
4. Abdomen del ♂ truncado posteriormente, sin ninguna prominencia ó proceso en la parte superior 5
— Abdomen del ♂ con un proceso en la parte superior del último segmento, en forma de dos rodetes unidos posteriormente con una membrana. Valvas laterales del mismo convexas exteriormente. Ramos de las antenas del ♂ poco más largas que sus artejos correspondientes, rara vez doblemente más largas; éstas en número reducido, 17 ó menos. Alas semejantes en ambos sexos; la anterior con 5-12 venillas en el campo radial . . . . . 2. **Lidar** Nav.
5. Abdomen del ♂ truncado posteriormente en ángulo recto, no escotado por encima, con valvas convexas. Ramas de las antenas numerosas, unas 17 ó más, doble ó más largas que sus artejos. Numerosas venillas radiales, ó sea entre el radio y su sector, 10-15. Alas de ordinario algo desemejantes en ambos sexos, más obscuras y estrechas en la ♀ . . . . . 1. **Dilar** Rb.
— Abomen del ♂ truncado por detrás oblicuamente, escotado por encima, valvas laterales convexas, alargadas, casi digitiformes; antenas con ramos poco más largos que sus artejos, éstos menos de 20. Venillas radiales 5-10 . . . . . 3. **Fuentenus** Nav.

Obs.—Aunque podrán parecer estas divisiones de la categoría de subgéneros, he preferido apellidarlas géneros, no sólo por ser poco aficionado á la denominación de subgénero, sino porque suelen los subgéneros á la larga elevarse á géneros.

1. Género **Dilar** Ramb.

P. Rambur. Histoire Naturelle des Névroptères. París, 1842, p. 445

Etimologia.—Dilar, río de Sierra Nevada en España.

Caracteres.—Antenas con unos treinta artejos poco más ó menos, delgados, cilíndricos, alargados; las del ♂ con unos 20 dientes ó ramos laterales doble ó más largos que sus artejos. Abdomen del mismo truncado por detrás, ni escotado ni prolongado por encima, con valvas laterales convexas, en forma de ancho rodete, delgadas en el margen interno (fig. 1.ª, *c*, fig. 2.ª, *b*, etc.) Alas oblongas, ensanchadas en la segunda mitad, con el ápice redondeado, ordinariamente de distinto color y forma en ambos sexos, siendo algo más pequeñas y más obscuras en la ♀, más ó menos manchadas de manchas pequeñas confluentes entre sí irregularmente. Campo subcostal y radial con numerosas venillas, más de 10 ordinariamente. Venillas discales dispuestas con poca regularidad, apenas gradiformes.

Son de los mayores de la familia. Sus especies pertenecen á la fauna poleártica.

Cuadro de las especies del género **Dilar**

1. Unos 30 artejos ó más en las antenas, las del ♂ con 20 ó más ramos laterales 2
— Menos de 30 artejos en las antenas; las del ♂ con menos de 20 dientes laterales 7
2. Alas del ♂ ensanchadas, muy redondeadas en el ápice; membrana algo amarillenta; las de la ♀ más estrechas, con la membrana pardusca. . . . 3
— Alas oblongas, más estrechas, con membrana á lo más grisácea, no pardusca 4
3. Antenas del ♂ con porción terminal corta, de unos 5 artejos; valvas laterales del abdomen del mismo adelgazadas, levantadas, contiguas por encima . . . . . 1. **nevadensis** Rasub.
— Antenas del ♂ con porción terminal larga, de unos 10 artejos; valvas del abdomen por encima ensanchadas y deprimidas; alas de la ♀ parduscas, apenas manchadas. . . . . 2. **dissimilis** Nav.
3. Margen anterior del pronoto engrosado en medio en forma de tubérculo transversal á manera de rodete; antenas de 21 dientes. 5. **algericus** nov.
— Margen anterior del pronoto con dos tubérculos más ó menos distintos, separados del punto medio y próximos al margen lateral 5
5. ♂ Tubérculos centrales del pronoto pequeños, ovales, oblicuos; valvas posteriores digitiformes, no levantadas ni contiguas por encima; alas muy manchadas, con manchas muy pequeñas; arolio dividido . 3. **Kolbei** nov.

— ♀ Tubérculos centrales del pronoto grandes, elípticos. Alas semejantes en sus manchas á las del ♂ del *nevadensis*, etc. 6

6. Tubérculos posteriores del vértex grandes, dobles ó divididos en dos; margen anterior del pronoto con dos tubérculos distintos, así como lo son los centrales; membrana del ala teñida levísimamente de leonado; el campo costal de la anterior poco ensanchado . . . . . 4. **corsicus** nov.

— Tubérculos posteriores del vértex sencillos, los centrales del pronoto poco prominentes, los anteriores aún menos; margen anterior del pronoto hinchado; campo costal del ala anterior grande, ensanchado en su mitad interna . . . . . 7. **corcyræus** nov.

7. Menor, alas de 10 milímetros ó menos de largo; valvas abdominales del ♂ gruesas por encima. . . . . 11. **nepos** Nav.

— Mayor, alas de 10 milímetros ó más de largo 8

8. Tubérculos centrales del pronoto gruesos, continuados con los anteriores tranversos, los laterales continuados con los posteriores; valvas laterales del abdomen del ♂ digitiformes, delgadas superiormente y con un seno ó depresión transversa en su tercio superior que les da el aspecto de articuladas. . . . . 6. **turcicus** Hag.

— Tubérculos centrales bien aislados y distantes de los anteriores 9

9. Muy velloso; cabeza mate; subcostal marcada en la base de un rasgo negro corto . . . . . 9. **lineolatus** nov.

— Menos velloso, sin rasgo negro en la base de la subcostal. 10

10 Vértex asurcado distintamente. Protórax con margen anterior engrosado, alargado en medio; tubérculos laterales del mismo ensanchados, ó sea transversos. . . . . 8. **syriacus** nov.

— Vértex con surco no bien distinto. Margen anterior del pronoto recto, con los tubérculos transversos casi contiguos, borrados en el medio y los laterales alargados. Valvas del abdomen del ♂ divididas en dos porciones por un fuerte ángulo interno . . . . . 10. **Bolivari** Nav.

DESCRIPCIÓN DE LAS ESPECEIS

1. **Dilar nevadensis** Ramb. (fig. 1.ª)

(Rectius *nivatensis*)

Dilar nevadensis. Rambur, Névroptères, París, 1842, p. 445, lám. 10. fig. 3, 4.

[2]— *Dilar nivatensis*. Navás, Diláridos de España, Barcelona, 1903, p. 4. [19]

Pardo, mezclado de testáceo y leonado.

♂ Cabeza brillante, leonado-testácea; vértex hinchado, abovedado, dividido por un surco longitudinal estrecho; lados del vértex comprimidos entre los tubér-

culos posteriores y los ojos. Tubérculos del vértex de tamaño mediano, de color más pálido; los posteriores aovado-triangulares, el anterior redondeado-triangular, más pequeño, separado por detrás por un surco transversal poco profundo. Ojos muy prominentes, hemisféricos, de un negro plomizo. Frente entre las antenas y el tubérculo anterior parda, algo aquillada encima del clípeo. Clípeo testáceo, pardusco en medio. Epístoma y palpos testáceos. Antenas pardas; primer artejo grueso, hinchado, pardo, negruzco interiormente; el segundo muy corto, transversal, testáceo, lampiño, los restantes oblongos, peludos; 22 de ellos (3-25), con un ramo lateral flexible por lo menos doblemente más largo que su artejo; los cinco ó seis últimos, cortos y delgados, inermes (fig. 1.ª, *a*).

Protórax transverso, con los márgenes anterior y posterior casi rectos, los laterales algo convexos. Disco de un testáceo leonado. Margen anterior hinchado, con un tubérculo lateral alargado, poco manifiesto. Tubérculos centrales algo separados, pequeños, redondeado-elípticos, algo oblícuos. Tubérculos laterales grandes, prominentes, ceñidos de pardo. Tubérculos posteriores transversales. Mesotórax con el escudete totalmente pardo como los lóbulos laterales en su exterior pálidos, en su interior con mancha parda aislada; tubérculo anterior, junto á la raíz del ala, esférico, negro; escudo triangular, testáceo, pardusco en medio. Metanoto de pinturas semejantes (fig. 1.ª, *b*).

Abdomen todo pardo, con el extremo algo pálido, erizado de largos pelos leonados. Cada segmento se ensancha posteriormente á modo de rodete; el penúltimo está algo deprimido por encima, donde se alarga algo. Segmento último truncado perpendicularmente. Valvas laterales del mismo adelgazadas y elevadas por encima, tocándose mutuamente, arqueadas á los lados, siendo convexas por fuera, digitiformes, con margen interno delgado, separadas por debajo, redondeadas, dejando entre sí un espacio elíptico, erizadas de pelos, siendo más cortos y ralos los interiores, más largos y densos los inferiores (fig. 1.ª, *c*).

Alas con la membrana hialina, ligeramente teñida de amarillento, salpicadas de manchas pardas, muchas de las cuales se enlazan en bandas transversales cortas é interrumpidas. Venación leonada, parda en las manchas. Los pelos son leonados y las fimbrias del mismo color, pero más largas. Son oblongas; están ensanchadas más allá de la mitad; su ápice es redondeado.

El ala anterior (fig. 1.ª, *e*) está salpicada de manchas en toda su extensión. Campo costal poco ensanchado antes del medio, estrechado en la base y antes de la región estigmática, con algunas venillas ahorquilladas. Campo subcostal con 10 ó más venillas, y unas 5 ramas anteriores del radio en el ápice. Campo radial, ó sea entre el radio y su 2.º sector, con numerosas venillas, 13-15 de ordinario. Sector 2.º con 5-6 ramas posteriores, el 1.º ahorquillado sólo en su tercio apical. Procúbito ahorquillado en sus tercios basilar y apical, enlazado con el cúbito con 6-8 venillas. Cúbito ahorquillado cerca de la base y en su tercio apical. Las pupilas son dos, pequeñas, la externa hacia la mitad del ala entre los dos sectores, cayendo detrás de la raíz del 2.º ramo del 2.º sector; suelen precederla algu-

nas venillas, tres al menos; la interna es todavía menor y se halla entre el sector 1.° y el procúbito, antes y encima de la división de éste. Las venillas discales gradiformes están dispuestas en dos series oblicuas muy irregulares, de unas seis venillas cada una. Las venillas libres ó independientes se ven en toda la mitad exterior, en el margen.

El ala posterior (fig. 1.ª, *f*) se halla libre de manchas en todo el campo posterior, entre el cúbito y el margen. El campo costal tiene los bordes paralelos, y sus venillas son sencillas. El campo radial posee unas 13 ó más venillas. La pupila es grande, situada entre ambos sectores y precedida de algunas venillas. El sector 1.° se identifica con el 2.° en la base de éste, pareciendo su primer ramo. El procúbito se ahorquilla en sus tercios basilar y apical. Una serie de venillas gradiformes. Las libres en toda la mitad marginal exteríor.

♀ En todo parecida al ♂, pero más obscura en todo su conjunto, de un pardo rojizo que tira á café.

Cabeza de un castaño claro; vértex hinchado, surcado, con tubérculos ovales, medianos, erizados de largos pelos; frente entre las antenas más obscura. antenas sin ramos ó dientes laterales, de unos 30 artejos, alargados, cada uno más estrecho en la base y más ancho en el ápice; el 1.° hinchado, el 2.° corto, más claro, los demás pardos. Clípeo, epístoma y mandíbulas testáceos. Palpos pardos.

Tubérculo del mesonoto junto á la base del ala más bien cónico que esférico, muy saliente hacia fuera, negruzco.

Abdomen pardo-rojizo, velloso, truncado posteriormente, con valvas conniventes; segmentos no engrosados posteriormente. Oviscapto de la longitud del cuerpo próximamente, largo, delgado, comprimido, filiforme, del mismo color; ápice redondeado.

Patas muy vellosas, casi totalmente pardas.

Alas más estrechas, sobre todo las anteriores, con la membrana teñida levemente de pardo, sobre todo las posteriores.

Ala anterior (fig. 1.ª, *h*) oblonga, casi triangular, redondeada en el ápice. Venación parda. Campo costal ensanchado antes del medio, con numerosas venillas, simples ó ahorquilladas. Campo subcostal y radial con muchas venillas. Sector 2.° siete veces ahorquillado. Sector 1.° indiviso hasta el tercio externo. Procúbito ahorquillado antes del medio y en el tercio último. El cúbito lo está cerca de la base y se enlaza repetidas veces con el procúbito por medio de venillas. Estas son abundantes en el disco, las externas vienen á formar serie gradiforme de unas 8. Las manchas se enlazan entre sí más ó menos, formando bandas transversales incompletas. Todo el margen externo presenta ancha faja del mismo color pardo-rojizo de las manchas. Pupila externa situada más allá de la mitad del ala, la interna en el tercio basilar.

Ala posterior (fig. 1.ª, *i*) oval, con ápice anchamente redondeado, de curvatura elíptica. Las manchas sólo se hacen visibles en la mitad anterior; toda la

membrana en su mitad posterior es de un tinte uniforme, y en la anterior las manchas aparecen de un pardo más intenso sobre un fondo más pálido, ó á manera de manchas pálidas hacia el centro. Campo costal de bordes paralelos, con venillas sencillas, con la membrana pardusca, sin manchas aparentes, las cuales comienzan en el campo subcostal. Campo radial, ó sea el espacio sobre el radio y su sector segundo con unas 13 venillas. Sector 2.° con seis ó siete ramos. Sector 1.° confluente con el 2.° un trozo más allá de la raíz de éste y ahorquillado cerca del extremo. Pupila entre ambos sectores poco antes de la mitad del ala. Fimbrias bastante densas y largas.

	♂	♀
Longitud del cuerpo. . . .	6 mm.	6 mm.
— — ala anterior . .	13-14 »	10'5 »
— — posterior. .	12-12'5 »	9'5 »

La descripción está hecha á la vista de dos ejemplares ♂ ♀ tipos de Rambur, pertenecientes á la colección Selys y existentes en el museo de Bruselas. He visto también otro ejemplar ♂ del museo de Berlín.

Patria. Sierra Nevada [2], Andalucía (Mus. Berlín), Portugal (Hagen).

En Sierra Nevada lo halló después Rosenhauer y más tarde D. Antonio Handlirsch en Güejar-Sierra, en la misma Sierra Nevada; y este ejemplar con otro más antiguo está en el museo de Viena. Mac Lachlan [21] lo cita de Cuenca; mas esta cita acaso deba referirse á la especie siguiente.

Será conveniente hacer alguna observación ó rectificación á la descripción y figura de Rambur en vista de sus ejemplares tipos.

Las antenas del ♂ difieren mucho de lo que aparece en la figura 3 (lám. 10). No he podido contar más que 22 ramos ó dientes laterales en vez de 26 que trae la figura; la longitud de los medianos proporcionalmente no es tan larga, y en el extremo hay algunos artejos, unos 5, desprovistos de dientes, siendo el último muy delgado. Como este pedazo es muy corto, fácilmente puede confundirse con alguno de los ramos al estar las antenas encogidas.

En el ala anterior existen dos pupilas en su sitio normal y no una sola, como supone Rambur, si bien la interna es pequeña, menos visible; y aun en el ala de la derecha del ♂ en el ejemplar de Rambur esta pupila es triple (fig. 1.ª, *g*). Es frecuente en los Díláridos que se multiplique la pupila interna.

2. **Dilar dissimilis** Nav. (fig. 2.ª)

Dilar dissimilis. Navás, Diláridos de España, 1903, p. 4. [19]

Muy semejante al *nevadensis*. Pardo, grande.

♂ Vértex hinchado, brillante, con surco longitudinal bien distinto; tubérculos posteriores de contorno elíptico, medianos, el anterior circular, mucho más pequeño. Antenas de más de 30 artejos; los dos primeros pardo-testáceos, los restantes pardos, el 1.° dilatado, algo deprimido, el 2.° muy corto, los restantes alargados, los 3-25 con ramos laterales hasta dos y tres veces más largos que sus artejos, acortándose los primeros y últimos; los 10 últimos inermes. Frente entre las antenas y el tubérculo anterior pardo-obscura, clípeo pardusco, labro y palpos testáceos. Ojos muy prominentes, hemisféricos.

Protórax (fig. 2.ª, *a*) transverso, con los márgenes anterior y posterior rectos, los laterales convexos. Disco pardo obscuro, tubérculos y margen anterior testáceos. Margen anterior todo él hinchado en forma de rodete ó tubérculo transversal, más sensible á los lados. Tubérculos centrales poco separados, redondeados, pequeños; tubérculo lateral grande, redondeado, casi continuado con el posterior que es corto, elíptico, poco transverso. Mesonoto pardo, brillante, testáceo junto á la raíz del ala y hacia el centro. Metanoto mezclado vagamente de pardo y testáceo, pardo en el centro y lados.

Abdomen pardo, con pelos finos leonados; segmentos no engrosados posteriormente; extremo del penúltimo segmento y último leonados. Valvas (fig. 2.ª, *b*) convexas exteriormente, en forma de ancho rodete, por encima conniventes y como articuladas, deprimidas y ensanchadas, apartadas por abajo, con pelos finos leonados, más densos y más largos por abajo. Cercos inferiores leonados, en forma de lámida delgada, cóncava por dentro, convexa por fuera, asomando al exterior su extremo redondeado.

Patas leonadas, extremo de los fémures y de las tibias pardo. Primer artejo de los tarsos más largo que el 2.° y 3.° juntos, el 5.° hinchado en el ápice (fig. 2.ª, *c*); uñas muy delgadas, arqueadas, abiertas, arolio alargado.

Alas poco alargadas, anchas, con membrana hialina teñida levemente de amarillento, con manchitas pardo-rojizas esparcidas por toda su extensión, aunque menos en número y más pálidas en el ala posterior, sobre todo en la mitad posterior.

Ala anterior (fig. 2.ª, *e*) con el campo costal bastante ancho; vena costal arqueada cerca de la base, venillas costales las más sencillas, otras ahorquilladas ó ramificadas. Campo subcostal de bordes paralelos, con más de 10 venillas (unas 14). Unas 12-14 venillas entre el radio y su sector 2.° Este con seis ramos ú horquillas, el primero ramificado en su tercio apical. En el ejemplar que tengo á la vista el primer sector es anómalo. En el ala izquierda confluye con el 2.° antes

de la base de éste y en la derecha se ahorquilla para incluir entre sus ramas la pupila. Algunas venillas, 2-4 antes de la pupila externa. Venillas gradiformes irregulares, unas $^4/_6$. El procúbito se ahorquilla cerca de la base y se enlaza con el cúbito mediante unas 5 venillas, y lo mismo el cúbito con el postcúbito. El margen externo presenta una faja del mismo color que las manchas.

En el ala posterior el sector 2.° tiene unos 6 ramos y el 1.° confluye con él un trecho en la base. Las manchitas están esparcidas por toda el ala, pero van disminuyendo en tamaño y color hacia el margen posterior.

♀ Más obscura en un todo. Tubérculos del vértex mayores, sobre todo el anterior. Frente entre las antenas, de un pardo obscuro, el clípeo más pálido, especialmente en el centro, labro testáceo; maxilas alargadas, palpos gruesos. Antenas muy delgadas, el primer artejo globoso, dilatado, pardusco, el 2.° corto, testáceo obscuro, los restantes alargados, cilíndricos, pardos.

Protórax (fig. 2.ª, *d*) dilatado lateralmente en el centro; margen anterior más abultado hacia los lados en forma de rodete; disco pardo obscuro; tubérculos centrales pequeños, separados, los laterales grandes, continuados con los posteriores. Mesonoto pardo en el escudo anterior y junto á las alas; tubérculo anterior esférico, negruzco; escudo posterior pardo. Metanoto testáceo en medio, pardo á los lados. Pleuras pardas.

Patas vellosas, las de los dos primeros pares pardas, las posteriores leonadas; extremo de los fémures y de las tibias pardo.

Alas alargadas, ensanchadas en su tercio externo, de ápice elíptico. Alas anteriores (fig. 2.ª, *e*) con manchas abundantes, de pardo café, muchas confluentes entre sí, dominando sobre el fondo pálido. Alas posteriores (fig. 2.ª, *f*) más bien sin manchas, estando teñidas totalmente de pardo-café, más pálido hacia la base y con algún pequeño claro en el disco.

Convendrá hacer notar las diferencias con el *nevadensis*.

♂ Las alas son proporcionalmente mucho más anchas, el ápice más redondeado, con más manchas, pero más menudas. La membrana es más hialina. Las venillas discales son menos en número y están dispuestas con más regularidad. Las fimbrias son muy cortas.

Las antenas tienen los dientes algo más cortos y el trozo terminal sin dientes más largo (de unos 10 artejos en vez de 5 y más largos). Las verrugas del vértex son más redondeadas.

El protórax es distinto: todo el margen anterior hinchado, sin distinguirse apenas en tubérculos; todo el disco negruzco, excepto los tubérculos; los centrales son aproximados, más aproximados, los laterales más pequeños, más esféricos y más regulares, los posteriores pequeñitos, elípticos y apenas transversos.

El abdomen no tiene los segmentos engrosados posteriormente, ó muy poco. Las valvas posteriores no se levantan y estrechan por encima, sino que por el contrario se aplanan y ensanchan.

♀ Las antenas son mucho más delgadas, el abdomen más largo, las alas anteriores más pálidas hacia la base.

Patria. Hasta ahora no se ha encontrado más que en el Moncayo (Zaragoza); pero es de creer que su área se extienda á otras regiones de Aragón y Castilla. Los tipos se hallan en la colección del Colegio del Salvador de Zaragoza.

3. **Dilar Kolbei** sp. nov. (fig. 3.ª)

Similis *nevadensi*. Fuscus, major.

Caput testaceum, nitens, vertice fornicato, sulco longitudinali impresso, plica bina longitudinali adjuncta item sulcata; tuberculis grandiusculis, fulvis, opacis; posticis irregulariter ovali-ellipticis, antico minore, rotundato-triangulari, nigro limbato; fronte inter et ante antennas fusco-nigra, clypeo et epistomate fuscescentibus, palpis fulvis, antennis fuscis, pilosis, 35 articulatis, articulo primo subpyirformi, interne validius dilatato, 2.° brevi, testaceo, reliquis elongatis, 3-25 ramo laterali instructis cylindrico, flexibili, articulo ipso duplo ant amplius longiore, præter primum brevissimum et ultimos; articulis decem ultimis muticis, ultimo conico.

Prothorax (fig. 3.ª, *a*) transversus, medio latior, fusco-niger, præter tuberculos et marginem anticum. Margo anticus medio deplanatus, lateraliter in tuberculum transversum inflatus. Tuberculi centrales minuti, elliptici, separati, obliqui. Tuberculi postici elliptici, transversi, lateralibus proximi. Meso-et metanotum fuscum, nitens, læve, lobulis lateralibus inferne fuscis. Tuberculus lateralis anticus mesonoti parvus, sphæricus, niger, ad alæ basim situs.

Abdomen fusco-rufum, pilis tenuibus mediocribus, sparsis, fulvis; singulis segmentis margine postico haud inflato; valvis decimi segmenti (fig. 3.ª, *b*) externe convexis, digitiformibus, superne approximatis, sed sejunctis, haud elevatis nec ampliatis, sed angustatis, retrorsum sensim separatis, spatium ellipticum inter se relinquentibus, pilosis, inferne (fig. 3.ª, *c*) distantibus; cercis inferioribus *(b, d)* fulvis in laminam interne concavam, externe convexam, apice rotundato subhyalino nitente, ad valvas apparente.

Pedes fulvi, pilosi, femorum et tibiarum apice fusco, tarsorum articulo primo secundum et tertium longitudine subæquante, 5.° subfusco, longitudine 3.° æquali, unguibus tenibus, divaricatis, arolio bifido.

Alæ elongatæ, ultra medium ampliatæ, membrana hyalina, levisime fusco-cinereo tincta, venatione fusca, pilosa; fimbriis densis, mediocribus, fulvis.

Ala anterior (fig. 3.ª, *e*) maculatissima, maculis fusco-rufis, minutis per totam alam sparsis, aliquot inter se irregulariter confluentibus, vix series transversas formantibus. Campus costalis ante medium modice dilatatus, post medium et ante stigma modice angustatus, venulis plerisque simplicibus. Campus

subcostalis plerumque 10, radialis seu inter radium et secundum sectorem 6-12 venulis instructus. Sector 2.us radii sexies furcatus. Sector 1.us a secundo basi remotus, nec nisi apicem versus divisus. Procubitus cum cubito ferme 6 venulis conjunctus, in tertio basilari et apicali divisus. Venulæ gradiformes in duas series $^5/_5$, quarum interior magis regularis. Margo externus fusco-rufo limbatus.

Ala posterior (fig. 3.ª, *f*) a campo subcostali ad axilarem maculata, maculis pallidioribus et rarioribus quam in ala anteriore, retrorsum sensim evanescentibus. Campus radialis plerumque 10 venulis. Sector 2.us 6-7ies furcatus, 1.us cum 2.° ultra hujus radicem confluens.

Femina mihi ignota.

Long. corp.	6 mm.
— alæ anter	11'5 »
— — poster	9'5 »

Patria. Andalucía. He visto dos ejemplares que del museo de Berlín me envió el Sr. Kolbe con el rótulo antiguo de *D. nevadensis*. A la vista de los tipos de Rambur me ha parecido deber separarlo, y en testimonio de gratitud al Sr. Kolbe, se lo he dedicado. El tipo se halla en el museo de Berlín.

Aunque es muy parecido al *D. nevadensis*, del cual se podría considerar como variedad, se distingue fácilmente de él por los siguientes caracteres:

Las alas son mucho más manchadas, con manchas más menudas, con la membrana menos hialina; ítem son más estrechas, ó menos ensanchadas proporcionalmente.

La parte no dentada de las antenas es mucho más larga, con más artejos, el último de los cuales es mayor; los dientes de los artejos que los poseen son más cortos, especialmente el primero, ó sea el del 3.er artejo, que es dentiforme, más corto que el artejo mismo.

Las valvas abdominales están manifiestamente distantes por encima y no se levantan, como ocurre en el *nevadensis*.

La forma de las patas es distinta, especialmente la del arolio.

4. **Dilar corsicus** sp. nov. (fig. 4.ª)

Similis *nevadensi*.

♀ Caput (fig. 4.ª, *a*) fusco-testaceum, vertice modice fornicato, sulco longitudinali profundo, tuberculis ocelliformibus grandibus, posticis ellipticis, bicoloribus, parte anteriore straminea, posteriore testaceo-livida, antico subrotundato, minore, stramineo, pilis stramineis fuscis mistis; facie juxta antennas fusca, medio stra-

minea; clypeo et epistomate stramineis; labro antice suaviter emarginato, mandibulis testaceis, acutis, palpis stramineis; antennis fuscis, 30-articulatis, primo articulo subgloboso, pallidiore, 2.° nitido, obscuriore, reliquis elongatis.

Prothorax (fig. 4.ª, *b*) transversus, marginibus anteriore et posteriore subrectis, margine antico medio membranaceo, tenui, ad latera in tuberculum transversum rufulum incrassato, disco fusco, tuberculis centralibus grandibus, subellipticis, obliquis, lateralibus elongatis, posticis parum prominentibus; præterea inferne duplici tuberculo testaceo laterali elliptico instructus, tuberculis pilis longis hispidis. Mesonotum fuscum, fuscum, præscuto longitudinaliter sulcato, disco ad latera testaceo, maculam fuscam liberante, tuberculo sphærico fusco hispido, pilis fuscis, antice sito ad alæ basim. Metanotum fuscum, medio testaceo mistum.

Abdomen rufum, pilosum. Ovipositor testaceus, compressus, sensim angustatus, apice obtusus, corporis longitudine paulo brevior.

Pedes fusco-testacei, villosi; tibia ante apicem testacea, apice fusco annulata; tarsis pallidioribus, singulis articulis apice fuscis, 1.° longitudine 2.° et 3.° simul sumptis breviore; unguibus testaceis.

Ala oblongæ, ultra medium ampliatæ, apice rotundatæ, membrana hyalina, levissime fulvo tincta, tota maculis fuscis adspersa præterquam in campo posteriore in alis posterioribus; maculis plerumque sejunctis, aliquot inter se confluentibus, sed vix in fascias transversas; reticulatione fulva, ad maculas fusca; pilis fimbriisque mediocribus fulvis.

Ala anterior (fig. 4.ª, *c*) venulis copiosis. Campus costalis basi angustatus, dein regulariter dilatatus, mox marginibus parallelis, venulis aliquot furcatis aut ramosis. Campus subcostalis angustus. Venulæ radialis inter radium et secundum sectorem 12-13. Sector secundus 6-7 ramos retrorsum emittens. Procubitus in tertio basilari et apicali furcatus, 3-4 venulis cum cubito conjunctus. Venulæ discales in plures series irregulares dispositæ, gradiformes $^4/_4$ aut $^4/_5$.

Ala posterior (fig. 4.ª, *d*) venulis discalibus seriem vix formantibus. Campus costalis prope basim modice ampliatus, venulis fere omnibus simplicibus. Campus subcostalis angustus 8-10 venulis. Inter radium ejusque sectorem 10 venulæ. Sector 1.us cum 2.° ad basim confluens, vel cum eo brevi spatio confusus. Sector secundus quinque ramos retrorsum emittens. Procubitus in tertio basilari et apicali fuscatus, cum cubito venulis 2 conjunctus, cubitus retrorsum ramosus.

Mas mihi ignotus.

Longit. corporis	7	mm.
— alæ anter.	12	»
— — poster.	10'8	»
— oviposit	6'6	»

Patria. La Foca (Córcega), 19-8-93. El tipo se encuentra en el museo de Londres.

En la venación se nota más anomalía que de ordinario en esta especie. Algunas venas se enlazan irregularmente entre sí, se desvían de su posición normal ó se terminan antes de lo ordinario.

Su distinción de las demás especies del grupo *nevadensis* es facilísima con sólo atender á las alas. En esta especie se parecen mucho las de la ♀ por su tamaño, figura y manchas á las formas del ♂ de dicho grupo; la membrana carece del tinte que suele empañar la de las ♀♀, y las manchas están separadas y dispersas, como acontece en el ♂.

5. **Dilar algericus** sp. nov. (fig. 5.ª)

Caput testaceum, nitens, vertice sulcato, sulco in occiput continuato; tuberculis stramineis, longiter hirsutis, posterioribus ovalibus, hoc est, retrorsum angustatis, mediocribus, anteriore minuto, rotundato; oculis prominentibus, hemisphæricis, nigro-plumbeis; facie inter antennas et ante tuberculum anticum fusca, clypeo pariter fusco, medio stramineo, genis stramineis; epistomate postice fusco, antice stramineo; palpis stramineis, tenuibus, longis; antennis plus quam triginta articulis fusco-fulvis, scrobe fulva, primo articulo crasso, externe pallidiore, 2.º, 3.º et 4.º brevissimis, reliquis elongatis; a 3.º et 20 sequentibus ramo laterali instructis flexibili, primo brevissimo, dentiformi, reliquis usque ad medium crescentibus, plerisque triplo longitudinem articuli superantibus, 10 ultimis muticis.

Prothorax (fig. 5.ª *a*) transversus, disco fuscus, margine antico medio incrassato in modum tuberculi; tuberculis mediis parum inter se distantibus, rotundatis, lateralibus distantibus, grandibus, elongatis, haud transversis, margine postico in duos tuberculos transversos incrassato lateralibus contiguos. Mesothorax subfuscus. Metathorax ad basim alarum fuscescens, medio stramineus.

Abdomen... (deest).

Pedes villosi, straminei, femorum apice, tibiarum basi et apice; dorso etiam maculatim, articulis tarsorum inferne, ultimo toto, fuscentibus.

Alæ oblongæ, parum ultra medium ampliatæ, apice rotundatæ, pilis fimbriisque longis, fulvis; membrana hyalina flavescente, tota maculis griseis notata, plerisque se invicem contingentibus, nonnullis in series transversas parum visibiles, parum definitas, dispositis.

Ala anterior (fig. 5.ª *b*) campo costali basi angustato, venulis plerisque simplicibus. Campus costalis et radialis (inter radium et sectorem) 10 venulis instructi. Sector 2.us radii sexies furcatus, 1.us bifurcatus, nec nisi in tertio apicali. Procubitus in tertio basilari furcatus, singulis ramis vicissim furcatis. Cubitus cum procubito 7 venulis conjunctus, basi et apice ramosus. Pupillæ exiguæ, externa pone radicem secundi rami secundi sectoris, inter hunc et primum, interna vix

apparens inter 1.um et procubitum, supra hujus furcam. Venulæ præter basilares quasdam, in duplicem seriem gradiformem in disco $^5/_4$ inter procubitum et radium.

Ala posterior maculis dilutis, totam membranam griseo-fusco tingentibus; pupilla exigua, sed bene apparente, inter sectores radii ultra radicem 1.i rami sectoris 2.i

Long. corporis.
— alæ anter. . . . . 10 mm.
— — poster. . . . . 9 »

Femina mihi ignota.

Patria. Argel. Con el nombre de *Dilar parthenopæus* Costa recibí un ejemplar de la casa Staudinger, de Dresde.

Es tan parecido á primera vista con mi *D. Bolivari*, que al principio lo tomé por tal; mas habiéndolo comparado con el ejemplar de esta especie existente en el museo de Madrid, me pareció diferir de ella constituyendo una nueva, que me ha parecido dar á conocer, por más que la carencia de abdomen en mi ejemplar no permita una descripción completa.

Por lo mismo será conveniente señalar algunas de sus diferencias con el *D. Bolivari*.

Es mucho más velloso, siendo más largos y más abundantes los pelos, sobre todo en las patas.

Estas son más pintadas de pardo, especialmente el dorso de las tibias.

Las antenas son más largas y de más artejos, habiendo 21 ramos en los intermedios, en vez de 18.

El vértex está manifiestamente asurcado, como ocurre de ordinario.

Toda la parte anterior de la cabeza es más obscura.

Los tubérculos del vértex son de figura distinta, y el anterior mucho más pequeño.

Los tubérculos laterales del protórax son longitudinales, es decir, alargagados de delante atrás y no de izquierda á derecha, como en el *Bolivari;* los del margen anterior forman uno solo central.

Las alas son más salpicadas y con malla de más perfecta regularidad. Sus pupilas son más menudas.

6. **Dilar turcicus** Hag. (fig. 6.ª)

Dilar turcicus. Hagen, Stett. Zeit. XIX, p. 129 [8]. Die Neuropteren Spaniens [12]. *Dilar nevadensis.* Hagen, Viener Monatsschr. VII, p. 199.

♂ Leonado amarillento.

Cabeza leonada, vértex bien hinchado, con surco bien distinto y una faja

central parda que llega desde el occipucio hasta el nivel de los tubérculos posteriores; á veces casi todo él pardusco. Tubérculos del vértex medianos, casi iguales, los posteriores elípticos, el anterior redondeado-triangular, algo transverso; sus pelos largos amarillentos. Detrás del tubérculo anterior hay un surco transverso corto. Frente entre las antenas y por delante con el clípeo, excepto el centro del margen anterior y márgenes laterales de un pardo obscuro, casi negro, brillante; epístoma y palpos amarillentos. Antenas de un pardo grisáceo, de unos 28 artejos, los dos primeros y los nueve últimos inermes, los 17 intermedios ramosos. Primer artejo regularmente hinchado, el 2.° transverso, los restantes cilíndricos alargados, incluso el último. Primer ramo lateral ó sea del tercer artejo corto, puntiagudo, los demás largos como dos veces ó más que sus artejos flexibles, engrosados en la punta (fig. 6.ª, *a*).

Protórax (fig. 6.ª, *b*) transverso con el disco negruzco y tubérculos amarillentos; los centrales juntos, grandes, alargados y continuados con los anteriores que no llegan al borde lateral ni al centro; los laterales casi continuados con los posteriores, que son gruesos y transversos. Mesotórax con el tubérculo anterior esférico, pequeño, amarillento; parte superior parda, á los lados y en el centro amarillenta, y semejantemente pintado el metanoto.

Abdomen totalmente amarillento, con pelos del mismo color, largos en el margen posterior de cada segmento, tanto como los segmentos mismos; truncado algo oblicuamente en el extremo. Valvas laterales alargadas, digitiformes, contiguas en la parte superior, donde se adelgazan y se hienden, separadas y engrosadas en medio, dejando entre sí un espacio elíptico alargado, obtusas y algo distantes en la parte inferior (fig. 6.ª, *c*); en su primer tercio con una impresión transversal, vistas por detrás, que parece dividirlas en dos partes muy desiguales; vistas por debajo (fig. 6.ª, *d*) son obtusas y están casi ocultas por los pelos del semento último. El surco transversal de las valvas es poco sensible á veces, ó substituído por un pequeño seno.

Patas amarillentas; extremo de los fémures y de las tibias pardo, tarsos largos, el 1.er artejo más largo que el 2.° y el 3.° juntos, el último pardusco; uñas divergentes, arqueadas, arolio truncado.

Alas oblongas, pero ensanchadas después del medio, con ápice redondeado, membrana hialina grisácea, con manchas rojizas numerosas, confluentes muchas entre sí en bandas transversales cortas, interrumpidas. Venación leonada. Pelos largos leonados. Fimbrias cortas, finas, leonadas.

Ala anterior (fig. 6.ª, *e*) con manchas esparcidas casi por igual por toda ella. Campo costal suave y regularmente ensanchado en el tercio basilar, con venillas oblicuas, algunas de ellas ahorquilladas. Campo subcostal algo ensanchado hacia el extremo, con numerosas venillas, 10 ó más. Campo radial casi regular, ó sea de bordes paralelos, con 13-15 venillas. Segundo sector con cinco ramos, el primer sector bien separado del segundo y paralelo á él, dividido en su último tercio. Procúbito con algunas venillas entre sus ramas y enlazándolo con el cú-

bito. Venillas discales numerosas, algunas en serie gradiforme irregular, otras cerca de la base. Pupilas pequeñas, la externa situada antes del centro del ala, la interna muy pequeña, dividida en dos ó tres. Venillas libres bien distintas en todo el margen externo.

Ala posterior (fig. 6.ª *f*) con las manchas mucho más pálidas, apenas sensibles, sobre todo hacia el borde posterior, donde sin embargo existen, aunque más diluídas. Pupila muy interna en el primer tercio del ala. Numerosas venillas, sobre todo en los campos costal, subcostal y radial, algunas hacia la base y campo posterior, otras discales en serie imperfecta. Sector primero enlazado con el segundo en la raíz de éste.

Esta descripción está basada sobre los tipos de Hagen del museo de Berlín.

Pero no será inútil trasladar aquí la descripción que da el mismo Hagen [12].

«Mas long. c alis 11-12 mill. Exp. al. 22-24 mill.

Muy parecido al *meridionalis* en la forma y colores, pero más pálido y más amarillo, con la vellosidad amarillenta. La frente delante de las antenas es negra; el surco longitudinal orillado de negro en el occipucio. Antenas grisáceo-parduscas. Tórax manchado de un modo semejante, pero prevaleciendo el amarillo. Patas amarillas, extremo del fémur y de las tibias negros. Abdomen amarillo. Alas semejantes, pero más amarillentas.

»Del medio del último segmento dorsal del abdomen se adelanta una prominencia corta, puntiaguda, cultriforme, encorvada hacia abajo; ambos rodetes se relacionan entre sí, una membrana se extiende por su parte inferior, de manera que la prominencia vista de lado, parece una hoja de cortaplumas. Las valvas son cortas y semejan dos rodetes tuberculiformes que se estrechan hacia arriba y no se encuentran en su parte superior. Entre ellas se ven los apéndices inferiores, que son muy puntiagudos y casi llegan á la mitad de la prominencia mediana. En su mitad aparece un tuberculito.

♀ En todo parecida al ♂.

Tubérculos del protórax algo diferentes: los centrales más elípticos y oblicuos, más separados del margen anterior, el cual es hinchado, apenas distinto en tubérculos.

Alas más manchadas y membrana ligeramente teñida de leonado. Las manchas del ala anterior son abundantes y muchas se enlazan, con tendencia á formar series transversas, su campo costal poco dilatado. Lo mismo las del ala posterior, pero más pálidas, sobre todo en la mitad posterior.

	♂	♀
Longitud del cuerpo. . .	6	mm.
— ala ant.	11	»
— — post.	9'5	»
— oviscapto	7	»

Patria. Turquía, Armenia y Siria (Hagen). Esmirna y Bosdagh (Mus. Berol.), Atica, Morea meridional, Corfú, Dalmacia, Hercegovina, Lakat, Gülek y Esmirna (Mus. de Viena.)

Hay que advertir que para Hagen ha tenido distinto valor esta especie. Por la descripción que da [12] y se acaba de transcribir del extremo del abdomen del ♂, debiera incluirse en mi género *Lidar*. Más aún, el *D. parthenopæus* de Costa para Hagen debiera identificarse con ella. Sin embargo, al añadir á continuación que no ha advertido el proceso posterior del extremo del abdomen en los ejemplares que tenía á la vista se evidencia su distinción del verdadero *parthenopæus,* que lo posee muy manifiesto. Esta misma carencia y otros caracteres hacen pasar esta especie al género *Dilar* y lo aproximan al *D. nevadensis*. En efecto, en otra ocasión el mismo Hagen lo identificó con el *Dilar nevadensis*, con el cual tiene mucho parecido exterior. Creíble es que Hagen al describir el *D. turcicus* tuviese á la vista dos ó más especies.

Distínguese del *D. nevadensis* por la forma de las antenas con menor número de artejos y ramos, por la estructura del abdomen, la figura y tamaño de las alas, etc. Hagen [8] lo distingue por la carencia de pupilas en las alas; pero en todos los ejemplares que he visto, existen. La disposición característica de los tubérculos del protórax lo distinguen con facilidad de las otras especies sus congéneres. Por las manchas de las alas tiene bastante parecido con algun as especies del género *Lidar,* como *parthenopæus, meridionalis,* etc. Pero el abdomen y estructura de las alas, etc., son totalmente diversos.

7. **Dilar corcyræus** sp. nov. (fig. 7.ª)

Major, fulvus.

♀ Caput nitens, vertice fornicato, sulcato, tuberculis stramineis, rotundatis, posterioribus rotundato-ovalibus, paulo grandioribus, interne-fusco limbatis, anteriore rotundato; fronte stria fusca inter antennas et tuberculum anteriorem, alia ante antennarum basım; labro emarginato; mandibulis apice fuscis; palpis maxillaribus articulis brevibus, crassis, ultimo tenniore; antennis plus quam 25 articulis (1), cylindricis et præter tres basilares; elongatis.

Prothorax (fig. 7.ª *b*) transversus, tuberculis parum definitis, stramineis, disco fusco, margine antico stramineo, subrecto, vel medio antrorsum promiente, subtoto inflato, vix in tuberculos prominulo; tuberculis centralibus deplanatis, lateralibus irregularibus, posticis exiguis, transversis. Mesonotum subtotum fu-

(1) En el ejemplar que tengo á la vista he contado hasta 25 artejos, mas le faltan algunos, unos cinco.

scum, tuberculo ad basim fusco, hemisphærico. Metanotum medio late fulvo stramineum, macula scapulari grandi picea nitente.

Abdomen fulvum, pilis longis hirsutum. Ovipositor stramineus, longus.

Alæ grandes, amplæ, apice rotundato-ellipticæ, venatione fulva, ad maculas basimque pilorum fusca; membrana hyalina, flavescente leviter tincta, maculis fusco-fulvis tota conspersa.

Ala anterior (fig. 7.ª, *c*) campo costali dilatato, vena costali in arcum latum ante medium convexa, dein angustato; venulis costalibus multis furcatis. Campi subcostalis et radialis ferme 10 venulis. Procubitus cum cubito, cubitus cum ramo posteriore ferme 5 venulis conjuncti. Venulæ gradiformes irregulares. Pupillæ exiguæ, maxime interna; externam 5-6 venulæ præcedunt. Membrana crebre pilosa, maculis dense irrorata. Pili fusci, fimbriæ fulvæ. Margo posterior usque ad medium alæ subrectus.

Ala posterior (fig. 7.ª *d*) tota minus maculata, maculis minoribus dilutioribusque, maxime retrorsum, ad campum axillarem subevanidis. Campus costalis haud ampliatus, venulis simplicibus. Campi subcostalis et radialis 8 venulis aut paucioribus. Pupilla exigua, venulis aliquot 2-3 præcedentibus. Sector secundus cum primo basi confusus. Venulæ discales raræ. Margo posterior totus regulariter arcuatus.

Pedes straminei, apice femorum tibiarumque fuscescente. Tarsi articulo primo 2.° et 3.° æquilongo; unguibus tenuibus, ante apicem arcuatis.

Long. corporis.	8	mm.
— alæ anter.	15	»
— — poster.	13'6	»
— oviposit.	7'5	»
Latit. alæ anter.	7	»
— — poster.	6'4	»

Mas mihi ignotus.

Patria. Corfú. El tipo se halla en el museo de Viena.

Obs. Podrá parecer idéntico al *turcicus*, y con este rótulo lo recibí del museo de Viena, ó bien una simple variedad del mismo, var. *corcyræa*, mas lo creo especie distinta, vecina del *turcicus* y *corsicus*. Las figuras y descripción fácilmente lo distinguirán de ambas especies. Del *turcicus* lo distingue al momento la amplitud y figura del campo costal, del *corsicus* la figura, anchura y sencillez de los tubérculos posteriores del vértex.

Es la especie de mayor tamaño que conozco.

8. **Dilar syriacus** sp. nov. (fig. 8.ª)

Similis *nevadensi* et affinibus. Fulvus, major.

Caput fronte inter antennas et tuberculum anticum fusco-nigra, clypeo fusco, epistomate fulvo, palpis fuscis; vertice et occipite fornicatis, fulvo-fuscis, sulco longitudinali distincto; tuberculis ocelliformibus mediocribus, subrotundis sive hemisphæricis, subæqualibus, antico paulo minore, pallidioribus, punctis microscopicis fuscis, conspersis, pilis longis flavescentibus hispidis; antennis fulvis, atomis fuscis sub forti lente distinctis, pilosis, articulis 30? (1), primo crasso, 2.º, 3.º et 4.º brevibus, longitudine crescentibus, reliquis elongatis, penitus cylindricis, ad articulationes aliquatenus constrictis, 3-20 dente seu ramo laterali instructis, duplo vel amplius, præter primos et ultimos, articulis ipsis longioribus, flexibilibus, cylindricis, apice vix incrassatis, obtusis.

Prothorax (fig. 8.ª, *a*) fortiter transversus, fulvo-pallidus, margine antico incrassato, producto, tuberculis duobus centralibus subcontiguis, linea fusca, antice ampliata divisis, pilis longis fulvis instructis; tuberculis lateralibus elongatis, similiter pilosis, extrinsecus fusco limbatis; aliis duobus tuberculis pone eos minoribus, transversis seu ellipticis. Meso-et metathorax medio fulvi, ad scapulas fusci, scutello metathoracis tribus punctis fuscis distincto.

Abdomen... (deest).

Pedes fulvi, longiter pilosi, femoribus apice fuscis, tibiis puncto medio fusco impresso ad dorsum notatis; tarsis primo articulo sequentes tres longitudine subæquante, 5.º inflato, unguibus tenuibus, arcuatis.

Alæ amplæ, apice rotundatæ, membrana hyalina flavescente, maculis fusco-pallidis tessellatis, reticulatione fulva ad maculas fusca, pilis fimbriisque fulvis, his densis, ad marginem posteriorem densioribus.

Ala anterior (fig. 8.ª, *b*) campo costali ad tertium basilare ampliato, venulis plerisque simplicibus, aliquot furcatis; campo subcostali 8-10 venulis; ad apicem sex ramis simplicibus inter apicem subcostæ et radii; radio cum sectore plerumque 10 venulis conjuncto; sectore 2.º radii 7-8 ramos retrorsum emittente pluries apicem versus furcato; sectore primo ultra medium alæ indiviso, dein bifurcato; procubito in tertio basilari furcato ramis similiter ante marginem furcatis; cubito cum procubito ejusque ramo inferiore 4-5 venulis conjuncto; venulis gradatis inter procubitum et radium in duplicem seriem dispositis, interna ultra pupillam 5, externa juxta furculas 4, parum visibilibus, præter-alias, interiores seu inter pupillas; maculis pluribus fuscis, quibusdam confluentibus, sed vix seriem formantibus, totam alam adspergentibus; pupillis duabus parvis, externa inter duplicem radii sectorem, ultra radicem secundi rami, interna inter primum sectorem et

(1) He contado 27, pero parece que faltan los últimos en el ejemplar que tengo á la vista.

procubitum, ultra radicem secundi sectoris et ante divisionem procubiti (1); venulis marginalibus liberis a medio marginis anterioris ad medium posterioris recurrentibus.

Ala posterior maculis multo rarioribus, ad marginem anticum et apicem frequentioribus, ad discum evanescentibus, in regione basilari obsoletis; campo costali marginibus subparellelis, venulis simplicibus; campo subcostali fere 5 venulis, ad apicem radio 4-5 ramos plerosque furcatos antrorsum emittente, ita ut ad marginem 8 rami numerentur inter apicem subcostæ et radii; radio cum sectore 5-8 venulis conjuncto, sectore radii pluries, 4-6 ies furcato; pupilla grandi, visibili, ante medium alæ sita.

Longit. alæ anter. . . . . 12 mm.
— — poster. . . . . 10'5 »

Femina mihi ignota.

Patria. Siria, Creo que es de los alrededores de Beirut; le cogió el P. Béraud S. J.

Aunque al principio me incliné á creerlo el *D. turcicus* Hag., pero su tamaño, la forma del pronoto, la disposición de las alas y algunos pormenores de la cabeza en que no se conforma con aquél me han inducido á creerlo especie nueva y á describirlo, aunque el ejemplar que poseo carezca de abdomen. En el aspecto exterior tiene gran semejanza con el *nevadensis*.

9. **Dilar lineolatus** sp. nov. (fig. 9.ª)

Similis *syriaco*. Fuscus, hirtus.

♀ Caput globosum, fulvum, oculis prominulis, nigris, vertice inflato, opaco, tomentoso, sulco longitudinali diviso, tuberculis concoloribus, posterioribus ellpticis, grandibus, anteriore rotundato, paulo minore, pilis fuscis hispidis; antenis 25-articulatis, articulo 1.° crasso, brevi, testaceo, 2.° brevi, testaceo, reliquis elongatis, apice dilatatis, pilosis.

Prothorax (fig. 9.ª *a*) transversus, fuscus, tuberculis fulvis; margine antico recto, tuberculis ad angulum sitis, parum apparentibus; tuberculis centralibus

(1) El ala izquierda del ejemplar que poseo ofrece una anomalía no rara en estos insectos y que es la multiplicación de la pupila. La externa ocupa su posición normal, mas la interna se ha dividido en 6; una de ellas está en su sitio propio, entre la raíz del 2.° sector y la división del procúbito; otra se ha corrido hacia fuera, viniendo á situarse encima de la horquilla de éste; una tercera se ha introducido entre las dos ramas del mismo, en su axila; las otras tres se ven en línea, más adentro que ésta, entre el cúbito y el procúbito.

rotundatis, parum prominentibus; lateralibus grandibus, posterioribus his proximis, transversis. Mesonotum fuscum, tuberculo ad alæ basim fulvo, fusco-hispido. Metanotum testaceum, læve, nitidum.

Abdomen fuscum, pilis tenuibus raris longisque fulvis. Ovipositor fulvus, tenuis, truncatus.

Pedes testacei, villosi, apice femorum, tibiarum, articulorum tarsi infuscato. Metatarsus duobus sequentibus articulis subæqualis. Ungues tenues, testacei, divaricati, arcuati.

Alæ oblongæ, post medium parum ampliatæ, apice elliptice rotundatæ, totæ hispidæ pilis fuscis longis divaricatis ex venis (aliquot ex membrana venis proxima) nascentibus; fimbriis densis, longis, fuscis; membrana hyalina, fusco leviter tincta, tota maculis fuscis conspersa; venatione fulva fusco mista ad pilos maculasque.

Ala anterior (fig. 9.ª, *b*) maculis fuscis creberrimis, inter se plerumque confluentibus, fascias tranversas breves interruptas formantibus, spatium ultra pupillam externam liberantibus. Campus costalis regulariter ante medium ampliatus, venulis plerisque simplicibus. Campus subcostalis itemque radialis ferme 10 venulis divisi. Sector radii sexies furcatus. Inter procubitum et cubitum 5, inter cubitum ejusque ramum 6 venulæ, ferme pilis occultatæ, similiter et gradatæ irregulares, vix apparentes. Pupilla externa ultra medium alæ sita, venulis tribus præcentibus. Vena subcostalis basi macula nigra callosa lineari brevi distincta.

Ala posterior (fig. 9.ª, *c*) pilis brevioribus tenuioribusque, fimbriis æqualiter longis. Maculæ dilutiores in campo axillari obsoletæ. Campus costalis venulis simplicibus. Campus subcostalis 6 et radialis 6-8 venulis divisi. Sector secundus 6 ramis instructus, primus cum illo basi confusus. Pupilla ad medium alæ sita, tribus venulis præcedentibus.

Longit. corp.	6	mm.
— alæ auter	10'5	»
— — poster.	9	»
— — oviposit.	6'5	»

Mas mihi ignotus.

Patria. Tekke en la Turcomania. El tipo se halla en el museo de Berlín.

Obs. La abundancia de los pelos á manera de cerdas en la cabeza y alas, sobre todo en el ala anterior, el rasgo negro á manera de callo que se ve en la base de la vena subcostal de la misma (de donde el nombre de *lineolatus*), el color testáceo del metanoto á manera de faja torácica y el tinte de la membrana distingue esta especie de todas las afines que conozco. La forma del protórax es muy diversa de la del *D. turcicus*, al cual también se avecina.

10. **Dilar Bolivari** Nav. (fig. 10)

Dilar Bolivari. Navás, Notas entomológicas. XI. Algunos insectos nuevos ó poco conocidos. Bol. Soc. Esp. Hist. Nat., Febr. 1903. [20]

♂ ♀. Testáceo-leonado.

Cabeza de color testáceo, brillante, casi lampiñd. Ojos grandes, bemisféricos, de un negro azulado Vértex abultado, sin surco longitudinal, sólo manifiesto en el occipucio; en el vértex en vez de surco se distingue una fina línea pardusca. Tubérculos oceliformes grandes, de color pajizo, los posteriores aovados, el anterior más pequeño, triangular cónico, más ancho por detrás; una impresión ó surco oblicuo entre los tubérculos posteriores y los ojos. Frente pardusca entre las antenas y delante del tubérculo anterior. Antenas largas y delgadas (fig. 10, *a*) leonadas, tomentosas, de unos 30 artejos, el 1.° grueso, el segundo muy corto, el 3.° con una rama lateral muy corta, (1) los 17 siguientes con ramo ó diente lateral en general dos veces más largos que sus artejos correspondientes, los 10 últimos inermes. En la ♀ hay unos 28 artejos, sin dientes, el último oval.

Protórax (fig. 10, *b*) fuertemente transverso; disco pardo-leonado; margen anterior engrosado en un rodete tuberculiforme transverso, casi completo, pajizo; tubérculos pajizos, los centrales poco separados, los laterale smucho, ensanchados, es decir, algo transversos, en la ♀ menos gruesos. Meso- y metatórax leonado-parduscos á los lados, más pálldos en el centro.

Abdomen pardo-leonado, más rojizo en la ♀. Ultimo segmento leonado (figura 10, *c*, *d*) truncado posteriormente, con un surco en el dorso; valvas laterales convexas, vistas por detrás (fig. 10, *c*) con un fuerte ángulo hacia el centro por la parte interna, dejando entre sí dos espacios, el uno superior casi rectangular y el otro inferior mayor, casi circular, en el cual se distinguen, en su fondo, otros apéndices abdominales. En la ♀ se distinguen las dos valvas laterales dejando un espacio elíptico alargado, debajo del cual está el oviscapto.

Patas leonado-pajizas delgadas, con el extremo de los fémures, tibias y artejos tarsales parduscos; el último de estos artejos pardusco totalmente.

Alas poco ensanchadas, con membrana hialina, toda ella con numerosas manchas parduscas más ó menos dispuestas en series transversales, muy pálidas en el ♂, mucho más visibles en la ♀, llegando á confundirse hacia la base del ala posterior. Reticulación leonada.

Ala anterior (fig. 10, *e*, *f*) con el campo costal poco dilatado cerca de la base, con casi todas sus venillas simples; campo subcostal con unas 8 venillas; en el ápice se cuentan 5 ramos anteriores del radio entre la terminación posterior de

(1) En mi descripción primera [20] dije que este apéndice estaba en el 4.° artejo, porque el 3.° parecióme dividido en dos.

éste y la subcostal. Radio unido con el sector por unas 10 venillas. Segundo sector del radio con 5-7 ramos á su vez ramificados. Primer sector bifurcado cerca del extremo. Series de venillas discales de 5 cada una, la interna más visible. Pupilas sencillas, bien visibles.

Ala posterior parecida. Venillas costales sencillas. Una pupila.

	♂	♀
Longitud del cuerpo. . . .	4 mm.	5'5 mm.
— de las antenas . .	7 »	5'5 »
— del ala anterior . .	10 »	7 »
— — posterior . .	8 »	6'5 »
— oviscapto. .		5'5 »

Patria. Orán (Argelia). Dos ejemplares ♂ ♀ cogidos por D. Ignacio Bolívar y existentes en el museo de Madrid.

11. **Dilar nepos** Nav. (fig. 11)

Dilar nepos. Navás, Neurópteros nuevos de la fauna ibérica. Memorias del primer Congreso de Naturalistas españoles, p. 151 [27].

♂. Menor, pardo, de un aspecto exterior semejante al *nevadensis*.

Cabeza leonado-pardusca, brillante. Vértex muy hinchado, dividido por un surco longitudinal. Tubérculos del vértex bastante grandes, leonado-pajizos, los posteriores elípticos, divididos en dos porciones, la posterior muy estrecha en forma de media luna, la anterior elíptica, tubérculo anterior más pequeño, ceñido de pardo-negruzco; pelos de los mismos leonados, dirigidos hacia delante. Antenas pardas, excepto los dos primeros artejos que son leonados brillantes, unos 20 dientes laterales en los artejos intermedios, doble más largos que ellos; últimos 10 ó 12 artejos inermes, cortos, especialmente los últimos.

Protórax (fig. 11, *a*) transverso, con el disco pardo obscuro, los tubérculos y márgenes anterior y posterior leonados. Tubérculos centrales pequeños, aproximados. Margen anterior engrosado en tubérculos tranversos poco distintos. Tubérculos laterales grandes, casi continuados con los posteriores que son transversos, poco distintos. Meso- y metanoto de un pardo obscuro junto á las alas, leonado en el centro, pardusco á los lados. Tubérculo anterior del mesonoto pequeño, hemisférico, negruzco, situado en la raíz del ala, en el ala misma.

Abdomen pardo, velloso, con pelos largos leonados; segmentos engrosados posteriormente, los últimos pálidos, valvas abdominales (fig. 11, *b, c*) leonadas, convexas exteriormente, más gruesas por la parte superior, donde son contiguas en medio, más estrechas en la parte inferior y distantes; vistas por detrás dejan entre sí un espacio triangular-elíptico, en cuyo fondo aparecen los apéndices ab-

dominales y á un lado y otro el cerco inferior laminar, pardo negruzco, cóncavo por dentro y convexo por fuera, ó sea por detrás, redondeado en el ápice. Vistas por debajo (fig. 11, *c*) las valvas aparecen casi rectangulares, alargadas, rectas por fuera, sinuosas por dentro, casi igualmente distantes en la base y en el ápice; entre ellas aparecen los apéndices abdominales, en su punta sobresale el cerco inferior y del último segmento se adelanta un proceso laminar transverso, redondeado posteriormente. El segmento abdominal es pardo, con el margen posterior leonado, engrosado.

Patas leonadas, vellosas, con los pelos más pálidos; extremo de los fémures y de las tibias pardos. Tarsos con el primer artejo más largo que los dos siguientes juntos, 2.°, 3.° y 4.° decrecientes progresivamente, el 5.° más largo que el 4.°, pardusco; uñas pardas, delgadas, poco arqueadas, divergentes.

Alas grandes, ensanchadas en su mitad externa, redondeadas en el ápice. Fimbrias abundantes, leonadas, de mediana longitud. Pelos de la malla largos, pardos. Venillas libres cortas en todo el margen de la mitad apical.

Ala anterior (fig. 11, *d*) con venación leonada, mezclada de pardo en las manchas. Membrana toda ella jaspeada casi por igual, pero irregularmente, con manchas pardo-rojizas, muchas de las cuales se juntan entre sí, pero sin formar series transversas; más bien se disponen á lo largo de las venas y venillas; buena parte del margen externo franjeado del mismo color. Pupilas con tendencia á multiplicarse, sobre todo la interna. Venillas gradiformes irregulares, de ordinario $^4/_2$. Unas 10 venillas en los campos costal y radial; algunas venillas antes de la pupila externa y otras en mayor número, unas 5 entre el procúbito y el cúbito.

Ala posterior mucho menos manchada; las manchas son bien visibles en todo el tercio anterior y van diluyéndose á medida que se retrocede hasta el mismo margen posterior, donde apenas sombrean el ala. La pupila es grande, negra, situada en medio de una mancha.

Longitud del cuerpo.	5	mm.
— del ala anterior . . .	10	»
— — post.	9	»

No se conoce la ♀.

Patria. Muel (Zaragoza).

Obs. Las alas ofrecen bastantes anomalías; en un ejemplar la vena subcostal confluye evidentemente con el radio en ambas alas anteriores, en vez de terminar en el margen anterior. Algunas venas se enlazan entre sí de un modo anómalo. Así ambos sectores del radio del ala anterior en un ejemplar se unen un trecho en la base; otras se desvanecen antes de llegar á su extremo, la pupila interna se suele multiplicar en tres ó más y aun la externa ofrece á veces una hijuela.

2. Género **Lidar** Nav.

Navás. Neurópteros nuevos de la fauna ibérica. Memorias del Primer Congreso de Naturalistas Españoles. Zaragoza, 1908, p. 153 [27]

Etimología. Anagrama de *Dilar*.

Caracteres. Parecido al *Dilar*. Sexos poco diferentes en el color y forma de las alas. Campo radial con unas 10 venillas que enlazan el radio con su sector, de ordinario menos, rara vez más. Sector del radio con 5 ó más ramos. Manchas en toda la superficie de las alas, excepto en la región basilar del ala posterior. Procúbito en ambas alas ahorquillado en su primer tercio:

Tamaño, en las especies conocidas, menor que el *Dilar*.

Antenas del ♂ con unos 20-30 artejos, 12-17 de ellos con diente lateral poco más largo que el artejo correspondiente. Abdomen del mismo terminado en la parte superior con un proceso doble digitiforme, arqueado, unido posteriormente por una membrana; valvas laterales convexas, en forma de cuchara.

Puede tomarse como tipo el *Lidar meridionalis* Hagen.

Cuadro de las especies del género **Lidar**

1. Tamaño mayor, 4-6 mm. de longitud; 15 ó más de envergadura, antenas de 25 ó más artejos, las del ♂ con 14 ó más dientes laterales, los del centro doble ó más largos que sus artejos correspondientes 2
— Tamaño menor, unos 3-4 mm. de longitud; antenas de menos de 25 artejos, las del ♂ con menos de 14 dientes laterales 3
2. Unos 17 dientes en las antenas del ♂. Proceso abdominal con dos lóbulos laterales arqueados á manera de rodetes, unidos por detrás por una membrana bien visible, ancha. Cercos inferiores cortos y anchos. Valvas en forma de cuchara. . . . . **1. meridionalis** Hag.
— Unos 14-16 dientes en las antenas del ♂ Proceso abdominal con dos lóbulos rectos corniformes de punta blanca, que sobresale por detrás, unidos por una membrana poco visible, algo escotada; cercos inferiores alargados, aleznados . . . . . **2. nemorosus** Nav.
3. 12 dientes en las antenas del ♂, los del centro algo más largos que sus artejos; unas 8 venillas en el campo radial. . . . **3. parthenopæus** Costa.
— 10 dientes en la antena del ♂, más cortos que sus artejos; unas 5 venillas en el campo radial . . . . . **4. pumilus** Nav.

1. **Lidar meridionalis** Hagen (fig. 12)

Dilar meridionalis. Hagen, Die Neuropteren Spaniens [12].—*Dilar pictus.* Navás, Diláridos de España, p. 7 [19].—*Dilar pictus.* Navás, Neurópteros de España y Portugal, p. 126 [26].

Leonado pardusco, pelos leonados.

Cabeza brillante; vértex hinchado, con surco longitudinal hasta el occipucio y otro transversal detrás del tubérculo anterior. Tubérculos grandes, redondeado-aovados los posteriores, el anterior redondeado, tan grande ó mayor, prominente; un callo entre él y cada uno de los posteriores. Antenas de unos 30 artejos, pardo-leonadas, vellosas; artejo basilar ancho, el 2.° corto, los restantes alargados, 17 de ellos, á partir del 3.° con ramo lateral flexible, cilíndrico, engrosado en el extremo (fig. 12, *a*), los primeros y últimos más cortos que su artejo correspondiente, los medianos hasta dos veces más largos. Frente entre las antenas pardusca, lo demás de la cabeza leonado. Ojos grandes, hemisféricos, negros.

Protórax transverso, con el disco pardusco, márgenes y tubérculos leonados, margen anterior adelgazado en el medio, engrosado en forma de tubérculo transversal á los lados, con largos pelos negros. Tubérculos centrales cercanos, redondeades, los laterales apartados, grandes, irregulares. Margen posterior con dos abultamientos transversos, más pequeños que los anteriores. Mesonoto brillante, pajizo en medio, pardo junto á las alas y una mancha parda aislada á cada lado. A veces el pardo lo invade casi todo. Metanoto semejante, pálido en medio.

Abdomen leonado, pardo-rojizo en la ♀, con faja parda posterior en los segmentos dorsales.

♂. Ultimo segmento pajizo, terminado en el dorso por un proceso formado lateralmente por un apéndice ó rodete digitiforme (fig. 12, *b*), arqueado, cóncavo hacia fuera, aproximado por el centro al del otro lado y unidos ambos por una membrana posteriormente, truncada ó algo escotada. Valvas laterales convexas, con largos pelos, por encima y antes del proceso dicho, deprimidas lateralmente; margen interno redondeado, ensanchado, dejando un espacio entre ellas más ancho en la parte superior, en cuyo fondo aparecen los apéndices abdominales; (1) en la parte más convexa una pequeña impresión y una línea parda transversal.

♀. Ultimo segmento amarillento, entreabierto, con dos lóbulos ó tubérculos redondeados en la parte superior; oviscapto delgado, comprimido y ensiforme en la base, adelgazado y casi cilíndrico á continuación hasta el ápice.

---

(1) El estudio microscópico de estos apéndices sería de interés taxonómico grande, por dar caracteres muy decisivos; pero no me ha sido posible, por falta de ejemplares, más que en muy pocas especies, por lo que he debido prescindir de él en general.

Alas grandes, manchadas más allá de la mitad, con el ápice redondeado membrana hialina algo amarillenta; manchas pequeñas, pardas, abundantes, juntadas algunas de ellas, pero apenas dispuestas en series; reticulación leonado parda en las manchas; pelos pardos, fimbrias leonadas, más largas en la ♀; venillas libres en toda la mitad marginal exterior.

Ala anterior con el campo costal poco dilatado antes de la mitad; casi todas sus venillas sencillas. Campo subcostal con unas 5-10 venillas; y en el ápice, entre la terminación de la subcostal y del radio se cuentan 7-10 venillas ó ramas, procedentes de las ramas anteriores del radio y sus divisiones. Unas 10 venillas entre el radio y su segundo sector, rara vez hasta trece, muchas más veces 8 ó menos. Sector 2.° del radio con 5-7 ramos ahorquillados. Sector 1.° del mismo indiviso hasta su tercio apical, donde se ahorquilla. Procúbito ahorquillado en su tercio basilar, y cada rama varias veces ahorquillada. Cúbito unido al procúbito y su ramo posterior por unas 5 venillas. Pupilas normales.

Ala posterior con manchas más pálidas y menos numerosas, desvanecidas en la región basilar. Sector 1.° del radio unido ordinariamente al 2.°, simulando la primera rama de éste. Campo radial con unas 10 venillas ó menos. Procúbito ahorquillado cerca de la base y ambas ramas varias veces ahorquilladas.

Patas delgadas, amarillentas, vellosas; un punto negro en el extremo de los fémures anteriores é intermedios; un anillo negro en el extremo de los posteriores, extremo de las tibias pardusco; metatarso posterior poco menos largo que los otros artejos juntos; uñas divergentes, delgadas, largas y arqueadas.

Es muy variable en el tamaño y aun algo en la figura de las alas.

	♂	♀
Longitud del cuerpo . . .	4·6 mm.	6·6'5 mm.
— ala anter. . .	9-11 »	10-11 »
— — poster. . .	8-9'5 »	9-9'5 »
— oviscapto . .		5'5 »

Patria. Es sin duda la especie más abundante y extendida en España. San Ildefonso [12] (Staudinger, mi colección, Escalera, Mus. de Madrid), Escorial (Lauffer), Madrid (Vázquez), Tragacete [17], Albarracín [17], Montserrat (P. Marcet, ipse), Montseny (P. Saz), Branuelas [21].

Lidar meridionalis Hag. var. **picta** nov.

Alis penitus infuscatis, maculis confertis, minutis, plerisque confluentibus; membrana leviter infuscata, venis venulisque fuscis, pedibus stramineo-fuscis; abdomine, præter apicem, fusco.

Conservando el nombre de mi descripción primera [19] y modificando ésta, doy como variedad una forma de color más subido que el tipo, con la membrana algo teñida de pardo en toda su extensión en ambas alas, aunque más pálida hacia la base y centro del ala posterior. El abdomen es igualmente pardo, tirando á café.

Patria. San Ildefonso (Segovia). El tipo de esta variedad se halla en el museo de Madrid.

2. **Lidar nemorosus** Nav. (fig. 13)

Lidar nemorosus. Navás, Neurópteros nuevos de la fauna ibérica. Memorias del primer Congreso de Naturalistas Españoles, p. 153 [27].

♂ Pardo, manchado de leonado.

Cabeza leonada, con una faja transversa en el epístoma, la frente entre las antenas y delante de ellas, una mancha en las mejillas, parduscas; palpos pardos, de artejos cortos, relativamente gruesos, el último leonado en la punta. Vértex hinchado, brillante, con el surco algo más pálido. Tubérculos del vértex pajizos, medianos, los posteriores cordiformes, más anchos por delante, el anterior redondeado y más pequeño. Antenas pardas, de unos 27 artejos, el primero grande, cilíndrico, ancho más que alto; el 2.° pequeño, testáceo, los demás alargados; unos 14-16 dientes laterales, los del centro casi tres veces tan largos como sus artejos, los 10 últimos artejos inermes.

Protórax muy corto, disco pardo, tubérculos y márgenes leonados. Margen anterior casi en toda su extensión hinchado, más hacia el lado en forma de tubérculo transverso; los tubérculos centrales grandes, redondeados, muy juntos, los laterales poco mayores, irregulares, los posteriores pequeños, próximos á ellos. Meso- y metanoto de fondo pajizo, pero con grandes manchas en el centro y á los lados. Tubérculo interior del mesonoto pequeño, pardo, poco prominente, hemisférico, situado en la base del ala anterior, en el mismo mesonoto.

Abdomen pardo brillante, con largos pelos leonados. Segmentos engrosados posteriormente. Décimo segmento totalmente leonado. Proceso superior (figura 13, *a*, *b*) en dos lóbulos laterales divergentes puntiagudos en forma de cuerno blanco, unidos posteriormente por una membrana tenue, de margen posterior cóncavo. En la base de dichos dos lóbulos y entre ellos avanza otro proceso corto leonado-pardusco, que llena el hueco que aquellos dejan entre sí. Valvas laterales convexas por fuera, más anchas en la región inferior (fig. 13, *b*), en cuya parte más ancha se ve una mancha parda transversal. Dichas valvas arrancan del proceso superior, se arquean, é inferiormente casi se tocan, dejando entre sí un doble espacio redondeado-triangular, mucho más ancho el superior, estrecho el inferior. En el fondo se distinguen los apéndices abdominales. Los cercos inferiores son largos, aleznados, rectos (fig. 13, *a*).

Patas delgadas, pajizas, vellosas; extremo de los fémures y de las tibias, como también el último artejo de los tarsos, pardos. Primer artejo tarsal casi tan largo como los tres siguientes juntos. Uñas cortas, arqueadas, delgadas.

Alas ensanchadas en su último tercio, con el ápice redondeado. Reticulación leonada manchada de puntos pardos en la base de los pelos, que son pardos también. Fimbrias largas leonadas. Membrana hialina, con ligero tinte amarillento, toda ella salpicada de manchas pardo-rojizas. Venillas libres en todo el tercio exterior marginal.

Ala anterior con la pupila externa grande, muy visible, la interna menuda, dividida en dos ó tres. Campo costal con casi todas las venillas sencillas. Campos subcostal y radial con 5-8 cada uno. Venillas gradiformes dispuestas con irregularidad, unas $^5/_3$. Algunas venillas 4-6 entre el procúbito y el cúbito, así como entre éste y su ramo posterior. Manchas dispuestas casi por igual en toda el ala, algo espaciadas cerca de la pupila externa.

Ala posterior con las manchas bastante visibles en toda su extensión, más obscuras en su región anterior, casi totalmente desvanecidas en el campo axilar. Unas 8 venillas en los campos subcostal y radial.

Longitud del cuerpo	4	mm.
— ala anterior . .	8'5	»
— — posterior . .	8	»

Patria. Sierra de Guara (Huesca).

3. **Lidar parthenopæus** Costa (fig. 14)

Dilar parthenopæus. Costa, Fauna del regno di Napoli. Neurotteri. Emerobiidei, 1855, p. 19, tav. XI, fig. 5 [6].

Dada la brevedad de la descripción de Costa y lo imperfecto y aun erróneo de las figuras que trae, se hace necesario dar una descripción más extensa.

♂ Pequeño, leonado, pelos del mismo color.

Cabeza leonada, pardusca, brillante, con vértex hinchado, las tres verrugas oceliformes grandes, de un leonado más pálido, con pocos pelos, las dos posteriores ovales algo reniformes, con motitas parduscas, colocadas oblicuamente, la anterior triangular algo cónica. Surco longitudinal del vértex desde junto al tubérculo anterior hasta el occipucio, el cual está hinchado también. Ojos grandes, negros. Antenas (fig. 14, *a*) largas, doble que el cuerpo, leonadas, muy punteadas de pardo, vellosas, de unos 24 artejos, el 1.° hinchado, el 2.° muy corto, los 3-14 alargados, más hinchados en el ápice, en el cual llevan exteriormente una rama alargada, poco más que el artejo mismo las del centro, las primeras y últimas menos, flexible, cilíndrica, apenas engrosada en el extremo; los últimos artejos no llevan apéndice y son más cortos, cilíndricos, oval el último.

Protórax (fig. 14, *b*) transverso, de fondo más obscuro, con los tubérculos más pálidos, grandes, los medianos muy juntos, separados tan sólo por un surco; los laterales muy apartados, con pelos muy largos. Meso- y metatórax brillantes, con los lóbulos escapulares algo parduscos.

Abdomen cilíndrico, algo pardusco, con largos pelos leonados, más densos en el extremo. Ultimo segmento amarillento; proceso superior truncado posteriormente, engrosado en los lados en un relieve digitiforme enroscado; valvas engrosadas, sencillas, ovales, de un leonado pálido, enlazadas superiormente con el proceso superior, muy convexas, dejando entre sí un espacio triangular, más ancho por encima, en el cual aparecen los apéndices interiores, erizadas de largos pelos (fig. 14, *c*).

Patas delgadas, de color uniforme, salpicadas de motitas microscópicas pardas, cilíndricas, los fémures algo ensanchados hacia el extremo, vellosas, con pelos largos y abundantes; tarsos largos, primer artejo casi tan largo como los tres siguientes juntos, los cuales van disminuyendo de longitud; el 5.° largo como el 3.°; uñas pequeñas, algo encorvadas, con enorme arolio en la base.

Alas oblongas, ensanchadas más afuera de la mitad, con ápice redondeado, salpicadas de manchitas pardas que tienden á formar series transversales. Membrana hialina. Venación leonada, con puntitos microscópicos pardos en la base de los pelos. Pelos y fimbrias muy largos, aunque tenues y poco visibles.

Ala anterior (fig. 14, *d*) con el campo costal de márgenes casi paralelos, poco dilatado después de la base; casi todas sus venillas sencillas. Campo subcostal bastante ancho, con 5 ó 6 venillas que enlazan la subcostal al radio, y en el ápice unas 6 ramas marginales entre el extremo de la subcostal y el ramo posterior del radio. Este con dos sectores, el 2.° ó principal cinco veces ahorquillado, la horquilla marginal muy corta, unido al radio por unas 8 venillas; primer sector indiviso hasta la mitad del ala y cada rama del mismo ahorquillada. Procúbito ahorquillado en el tercio interior del ala, y cada rama bifurcada. Cúbito enlazado con el procúbito por 5 venillas, dos veces bifurcado hacia el extremo. Las venillas intercalares comienzan antes de la región estigmática y dando la vuelta al ápice del ala desaparecen hacia la mitad del margen posterior, más adentro de la terminación del procúbito. Entre el radio y el procúbito, en el disco del ala, hay dos series de venillas gradiformes casi paralelas entre sí, compuestas cada una de unas 4. Las dos pupilas se hallan, la externa entre el 1.° y el 2.° sector, debajo de la primera rama de éste, y la interna entre el primer sector y el procúbito, debajo de la raíz del sector segundo.

Ala posterior (fig. 14, *e*) parecida. Campo costal con todas las venillas sencillas. De 4 á 8 venillas entre la subcostal y el radio y entre éste y su sector. Este con 5 horquillas. Pupila muy manifiesta, grande, única, situada entre ambos sectores que confluyen en la base. Dos series regulares de venillas gradiformes, de 3 ó 4 cada una. Manchas de la membrana menos numerosas, apenas alineadas en series, más ó menos desvanecidas en la mitad basilar ó interior del ala.

Longitud del cuerpo . . . . 3 mm.
— ala anterior . . 6'5 »
— — posterior . . 6 »

Patria. Costa lo halló en los alrededores de Nápoles y en el monte de Cava (Salerno). Del museo de aquella ciudad me lo han comunicado del Monte di Cava, Aritzo y Lagopesole.

La ♀ no la conozco todavía.

4. **Lidar pumilus** Nav. (fig. 15)

Dilar pumilus? Navás, Diláridos de España, 1903, p. 10 [19].—*Lidar pumilus*. Navás, Neurópteros nuevos de la fauna ibérica [27].

Con duda de que fuese especie nueva apunté brevemente una característica; ahora, que he podido comparar mi único ejemplar ♂ con la especie más afín, el *L. parthenopæus* Costa, la tengo por buena y completaré en lo que pueda aquella descripción.

♂ Tamaño pequeño, color pardo rojizo algo vinoso, del cual son también las manchas de las alas.

Cabeza pardo-leonada, brillante; ojos negros, plomizos; vértex elevado, asurcado longitudinalmente; tubérculos del mismo bastante grandes, del mismo color ó algo más obscuros que el vértex, los posteriores aovados, el anterior redondeado, entre él y las antenas una mancha pardo-negruzca. Cara de un pardo leonado casi uniforme. Antenas leonadas, de unos 20 ó más artejos (1), el 1.° grueso y pardo, el 2.° corto testáceo, los demás alargados, unos diez dientes laterales, todos más cortos ó no más lárgos que los artejos que los sustentan, cilíndricos y flexibles, obtusos y engrosados en el extremo (fig, 15, *a*), parduscos.

Protórax (fig. 15, *b*) transverso, de un leonado pardusco uniforme; tubérculos centrales muy poco prominentes, los marginales anteriores y posteriores poco sensibles, los laterales grandes.

Abdomen del color general, pelos largos leonados; último segmento amarillento. Valvas laterales (fig. 15 *c*) en forma de cuchara, más hinchadas y negruzcas inferiormente, vistas por detrás, dejando entre sí interiormente un espacio redondeado triangular. Vistas por debajo (fig. 15 *d*) las valvas dejan entre sí un espacio triangular, en cuya base aparece la lámina subgenital transversa. Proceso superior truncado posteriormente, apenas engrosado en rodete lateral.

Alas con membrana hialina, cenicienta, venación leonada pardusca en las manchas y en la base de los pelos. Fimbrias leonadas. Manchas con tendencia á formar bandas transversales.

(1) En el ejemplar que tengo he contado 21, no sé si alguno le falta.

Ala anterior (fig. 15 *e*) (1) con el campo costal poco dilatado al final de su primer tercio; la mayor parte de sus venillas simples. Campos subcostal y radial con unas 5 venillas. Sector 2.° con unos cinco ramos posteriores. Pocas venillas (dos) entre el procúbito y el cúbito, 1 ó 2 entre éste y su sector.

Patas de un leonado pálido, muy poco sombreadas de pardusco en el extremo de las tibias y de los artejos tarsales, el primero de los cuales apenas llega á la longitud de los 2.° y 3.° juntos.

Longitud del cuerpo	3'5 mm.
— ala anterior . .	6'8 »
— — posterior . .	5'9 »
— de las antenas . . .	3'5 »

Patria. Cartagena. No he visto más que un ejemplar cogido en junio de 1900 por D. Juan Cáceres.

3. Género **Fuentenus** Navás

Fuentenus. Navás, Neurópteros nuevos de la fauna ibérica. Mem. Primer Congr. de Nat. Españoles, p. 154 [20].

Etimología. Nombre tomado del apellido del Rdo. D. José M.ª de la Fuente, Pbro., distinguido entomólogo de Pozuelo de Calatrava (Ciudad Real) y descubridor de la primera especie de este género.

Caracteres. Semejante á los géneros *Dilar* y *Lidar*, más al segundo por su aspecto exterior y más al primero por la terminación del abdomen del ♂.

Alas oblongas, salpicadas con manchas parduscas; abdomen del ♂ truncado muy oblicuamente por detrás, con las valvas digitiformes, casi paralelas entre sí, confluentes por encima, distantes por debajo; abdomen sin proceso superior en el extremo, antes escotado. Antenas del ♂ con menos de 17 dientes laterales, poco más largos que sus artejos. Pocas venillas en el campo radial, de ordinario menos de 10, pero siempre más de 5.

Tipo el *Fuentenus campestris*.

1. **Fuentenus campestris** Nav. (fig. 16).

Dilar campestris. Navás, Diláridos de España, p. 10 [19].—*Dilar campestris.* Navás, Notas entomológicas. XII. Neurópteros de Pozuelo de Calatrava,

(1) Unica que se puede estudiar en mi ejemplar.

Bol. Real Soc. Esp. Hist. Nat , dic. 1905, p. 506 [23].—*Dilar meridionalis*. Navás, Neurópteros de España y Portugal, p. 126 [26].—*Fuentenus campestris*. Navás, Neurópteros nuevos de la fauna ibérica. Memorias del Prim. Congr. de Naturalistas Esp., p. 155 [27].

Color pardo, testáceo.

Cabeza testácea, globosa, transversa; ojos prominentes hemisféricos; vértex con el surco longitudinal que llega al occipucio, donde encuentra otro transverso en forma de media luna. Tubérculos del vértex del mismo color que éste ó más obscuros, los posteriores elípticos, cortos, el anterior redondeado. Frente entre las antenas y el tubérculo anterior pardusca. Antenas (fig. 15, *b*) de unos 28 artejos, el 1.° grueso, pardo, el 2.° corto, testáceo, los siguientes leonados, alargados; unos 16 dientes laterales poco más largos que los artejos correspondientes; los 9 últimos inermes, decrecientes en longitud.

Protórax transverso, de color testáceo uniforme; tubérculos centrales gruesos, redondeados, contiguos; margen anterior recto, apenas hinchado, con tubérculo apenas sensible; margen posterior convexo; tubérculos laterales gruesos, muy salientes. Meso- y metatórax parduscos, más pálidos en el medio.

Abdomen pardo, con pelos largos, leonados; segmentos engrosados posteriormente, el último amarillento. Valvas laterales (fig. 16, *a*, *b*, *c*) digitiformes, contiguas por encima, separadas por debajo, dejando entre sí, vistas por detrás, un espacio elíptico muy alargado (*a*); de lado (*b*) parecen un rodete del extremo del abdomen, por debajo (*c*) separadas.

Alas ensanchadas después del medio, con ápice redondeado; membrana hialina, venación leonado-pardusca, pelos y fimbrias leonados.

Ala anterior salpicada toda ella de manchas pardo-grisáceas, aisladas ó poco confluentes, sin formar series, ó muy cortas. Campo costal muy poco dilatado, las más de sus venillas simples. Campo subcostal con 5-7 venillas, el radial con 7-10. Procúbito unido al cúbito con varias venillas (5-7) y éste con su ramo posterior con menos (3-5). Pupilas poco manifiestas, sobre todo la interior, que es pequeña.

Ala posterior mucho más pálida, con manchas á su vez muy pálidas, casi sólo visibles en su mitad apical y anterior. Venillas discales abundantes, casi en dos series gradiformes. Pupila bien visible.

Patas leonadas, con largos pelos, extremo de los fémures, principio y fin de las tibias parduscos; tarsos largos, su primer artejo más largo que el 2.° y 3.° juntos.

Longitud del cuerpo. . . .	3'5-5	mm.
— ala anterior . .	7-9	»
— — posterior .	6-8	»

No conozco la ♀ de esta especie.

Patria. Pozuelo de Calatrava (Ciudad Real). Leg. La Fuente.

2. **Fuentenus saldubensis** Navás (fig. 17)

Dilar saldubensis Nav. Laguna, Excursiones á Santa Fe y Cadrete. Boletín Soc. Arag. Cienc. Nat. 1902, p. 134 [18].—*Dilar saldubensis*. Navás, Diláridos de España. 1903, p. 8, fig. 4, 5 [19].—*Fuentenus saldubensis*. Navás, Neurópteros nuevos de la fauna ibérica, p. 155 [27].

Pequeño, pardusco.

Cabeza globosa, transversa, testácea, brillante. Vértex hinchado, asurcado longitudinalmente, con los tubérculos del mismo color ó algo más obscuros, los posteriores aovados, el anterior redondeado menor. Frente entre las antenas y el tubérculo anterior pardusca. Antenas pardas de unos 25 artejos, el 2.º testáceo, los 12 siguientes con ramo lateral apenas más largo que ellos, los 10 últimos inermes.

Protórax (fig. 17 *a*) transverso, con fondo pardusco, tubérculos y márgenes leonados. Margen anterior todo él hinchado en un rodete leonado apenas deprimido en medio. Tubérculos centrales redondeados, contiguos, los laterales grandes, salientes, contiguos con los posteriores que son transversos, elípticos. Meso y metatórax parduscos, leonados en el centro.

Abdomen pardusco, margen posterior de cada segmento adelgazado, provisto de largos pelos leonados. Valvas laterales leonadas, digitiformes, adelgazadas y conniventes por encima, engrosadas por debajo (fig. 17, *b*, *c*, *d*), vistas por detrás dejando un espacio alargado irregular (*b*); vistas de lado resultan cortadas oblicuamente, más salientes y convexas por debajo (*c*); vistas por debajo no se distingue la plaza subgenital.

Patas de un leonado pálido, más obscuras en el extremo del fémur, tibia y artejos tarsales; metatarso casi tan largo como los tres artejos siguientes juntos.

Alas oblongas, ensanchadas en el tercio apical, con ápice redondeado; membrana hialina algo teñida de leonado; malla parda, pelos y fimbrias largos, leonados.

Ala anterior toda ella manchada con motas parduscas que suelen enlazarse entre sí formando series transversas irregulares é incompletas. Campo costal apenas ensanchado, con unas 24 venillas, las más de ellas simples. Campos subcostal y radial con unas 6-8 venillas. Sector segundo con 4 ramos posteriores. Procúbito enlazado con el cúbito por varias venillas, 4-5, el cúbito con su ramo posterior por 2-3. Venillas discales dispuestas con bastante regularidad, las gradiformes unas $^6/_6$. Pupilas muy menudas, visibles sólo con lente.

Ala posterior semejante, pero de manchas mucho más pálidas. Campo subcostal con muy pocas venillas, las del radial unas 5, las discales en dos series irregulares y escasas. Pupila visible.

Longitud del cuerpo. . . .	4	mm.
— del ala anterior. . .	7	»
— — posterior . .	6	»

No conozco la ♀ de esta especie.

Patria. Zaragoza. El primer ejemplar lo cogí en los campos de Cadrete, el 27 de Abril de 1902, más tarde otros dos en Valdespartera el 13 de Abril de 1905, y últimamente el 23 de Abril de este año otros 9 en el mismo sitio, auxiliado por mis alumnos.

3. **Fuentenus** (1) **lusitanicus** spec. nov. (fig. 18)

Testaceus, similis *campestri*.

Caput (fig. 18, *a*) nitens, testaceum, oculis magnis, valde prominentibus, nigro-cæruleis; vertice valde fornicato, sulco longitudinali medio distincto, alio sulco seu lineola longitudinali fusca juxta tuberculos laterales; tuberculis posticis ovatis, vix pallidioribus, pilis longis stramineis nigris mistis hirsutis; tuberculo antico rotundato, deplanato, infuscato, pilis hispido, sulco transverso postico limitato; occipite sulco transverso arcuato, antrorsum concavo, fusco; fronte inter antennas et tuberculum anticum fusca; palpis stramineis, ultimo articulo triangulariter truncato; antennis (fig. 18, *b*) 27-articulatis, scrobe straminea, nigro limbata, primo articulo crasso, cylindrico, truncato, secundo transverso, reliquis elongatis, fulvis, dense et minute fusco punctatis, pilosis; articulis 3-17 ramo laterali flexibili, apice obtuso, subduplo articulo ipso longiore.

Collum elongatum, (2) tuberculo laterali externo.

Prothorax (fig. 18, *c*) transversus, margine antico subrecto, lateraliter incrassato, ad latus pone marginem tuberculo exiguo; disco plano, sulco longitudinali et transverso fuscis diviso; tuberculis mediis deplanatis, rotundatis, parum visibilibus, lateralibus grandibus, prominulis, hispidis, posterioribus transversis. Mesothorax ad alarum basim fuscus, nitidus. Metathorax scuto et lobis lateralibus longitudinaliter fuscatus.

Abdomen ... deest.

Pedes straminei, villosi, femoribus summo apice fusco, tarsis articulo primo duobus sequentibus æquali, 5.° parvo, tenui, fusco, arolio grandi, unguibus tenuibus, arcuatis, minimis.

---

(1) Por su semejanza con las dos especies anteriores y sobre todo con el *campestris*, incluyo esta especie en el mismo género, por más que la carencia de abdomen permita alguna duda.

(2) Esta longitud parece debida, en parte al menos, á defectos de preparación. El tubérculo lateral también lo he visto en alguna otra especie de Diláridos.

Alæ grandes, post medium ampliatæ, reticulatione fulva, pilis fimbriisque fulvis, his longis.

Ala anterior membrana hyalina, flavescente, maculis fusco-fulvis crebris, rotundatis vix confluentibus tota conspersa; campo costali post basim ampliato, venulis plerisque simplicibus; campo subcostali angusto, 5 venulis distincto; campo radiali 6-7 venulis instructo; sectore secundo radii 5 saltem ramos retrorsum emittente; venulis gradiatis externis obsoletis, internis 5; pupillis fuscis, centro nigris, externa inter utrumque sectorem ad medium alæ, interna inter primum sectorem et procubitum.

Ala posterior (fig. 18, *d*) membrana hyalina, flavescente, maculis vix in medio anteriore apparentibus. Campus costalis marginibus parallelis, venulis simplicibus. Campus subcostalis angustus, apice ampliatus, margine externo 6 ramis, præter venulas liberas, distincto. Campus radialis latus, 7 venulis dotatus. Sector secundus radii 7 ramos retrorsum emittens. Sector primus cum secundo ad hujus radicem confluens. Series gradata externa obsoleta, interna distincta, 4 venulis regulariter dispositis. Procubitus cum cubito 3 venulis conjunctus.

Long. alæ poster.. . . . . 7 mm.

Patria. Norte de Portugal.

He fundado esta especie en un ejemplar muy deteriorado del museo de Berlín. Le falta el ala anterior derecha, parte de la izquierda y todo el abdomen.

4. Género **Nepal** nov.

Etimología. El nombre genérico lo tomo de una región de la India, en la cual habitan las dos especies que en este género incluyo.

Caracteres. Simile *Dilaridi*. Antennæ maris articulis brevibus, crassis, ramis pectiniformibus longissimis, articulis ipsis 2-5ies longioribus, apice incrassatis. Alæ reticulatione regulari laxa; venulæ 5-8 inter radium et ejus sectorem. Sector secundus 4-5 ramos furcatos retrorsum emittit. Apex abdominis in ♂ superne in processum productus.

Tomo por tipo de este género la especie de Darjeeling, del museo de París.

1. **Nepal Harmandi** sp. nov. (fig. 19)

♂ Mediocris, fusco-rufus, alis infuscatis.

Caput fusco-testaceum, nitens, juxta oculos pallidius, facie fusca, vertice valde fornicato, sulco longitudinali parum profundo; oculis fuscis, hemisphæricis,

tuberculis ocelliformibus testaceis, posticis parvis, rotundatis, antico grandi, triangulari, postice sulco transverso limitato; antennis fuscis, primo articulo grandi, transverso, cylindrico, testaceo, secundo brevi, transverso, reliquis brevibus, paulo longioribus quam latioribus, apice amplioribus et externe dentatis, ramis externis longissimis, quinquies articulo longioribus, cylindrisis, apice crassioribus, flexibilibus (1) (fig. 19, *a*).

Prothorax transversus, fuscus, margine antico transverso, medio testaceo, tuberculis centralibus approximatis. Meso- et metathorax colore uniformes.

Abdomen (fig. 19, *b, c*) fusco rufum, hispidum, ultimo segmento pallidiore, oblique truncato, valvis lateralibus inflatis, medio dilatatis, superne elevatis et medio in processum abdominis cylindricum, oblongum, deflexum, apice obtusum desinentibus, inferne confluentibus et inter eas et processum conicum apice obtusum recurvum liberantibus, cavitatem triangularem inter se relinquentibus; pilis nigris longis hirsutis.

Alæ oblongæ, parum ampliatæ, apice rotundatæ; membrana subcartilaginea, granulata, pilis seriem simplicem vel duplicem inter venas formantibus, subopaca, venulis marginalibus liberis obsoletis seu in seriem pilorum fatiscentibus; venatione fusca; fimbriis brevibus, pilis longis.

Ala anterior (fig. 19, *d*) maculis fuscis adeo frequentibus et inter se conjunctis, ut potius tota membrana sit fusca et maculis exiguis pallidis in series transversas valde irregulares parum visibiles confluentibus, duabus grandibus, transversis, altera discali, ad medium alæ, altera inter hanc et basim, posteriore. Campus costalis parum ante medium ampliatus, venulis plerisque simplicibus, haud furcatis. Campus subcostalis angustus, paucis venulis (3 5), margine externo 5-6 ramis inter apicem subcostalis et ramum posticum radii. Radius cum sectore 5-8 venulis conjunctus. Sector secundus radii 4-5 ramos retrorsum emittens, successive et regulariter furcatos. Sector radii primus ultra medium alæ indivisus, dein bis terve furcatus. Procubitus ante medium alæ furcatus, ramis etiam pluries divisis. Cubitus cum procubito 2 venulis conjunctus, prope basim et apicem furcatus. Venulæ discales in duplicem seriem gradiformem valde irregularem dispositæ, $^5/_4$ numero. Aliæ venulæ in medio basilari. Pupillæ exiguæ, simplices; externa inter sectorem 1.um et 2.um, ante radicem 1.^{i} rami, interna inter 1.um et procubitum, ante hujus divisionem.

Ala posterior (fig. 19, *e*) tota uniformiter infuscata. Area costalis marginibus parallelis, venulis simplicibus. Radius cum sectore 5 venulis conjunctus. Pupilla infra radicem rami secundi sectoris sita. Venulæ discales ad medium alæ 4-5 in seriem simplicem gradatam dispositæ.

---

(1) En el ejemplar que tengo á la vista hay sólos 15 dientes ó ramos, por faltar lo restante de las antenas, pero de seguro que tiene algunos más, acaso unos 10.

Pedes testacei, pilosi, coxis fuscis, longiusculis, apice femorum, tibiarum et articulorum tarsorum, fuscis. Tibiæ ad dorsum medio leviter infuscatæ. Tarsi primo articulo duos sequentes longitudine æquante. Ungues exigui, tenues, curvi.

Long.	corp.	5 mm.
—	alæ ant.	9 »
—	— poster.	8 »

Femina mihi ignota.

Patria. Darjeeling en el Himalaya. Harmand leg., 1890. El tipo se halla en el museo de París.

2. **Nepal Hornei** Mac Lachl. (fig. 20)

Dilar Hornei. Mac Lachlan, On a Neuropterons insect from NW India, belonging to the Genus Dilar. Ent. Mo. Mag. Vol. v. p. 235 [13].

No habiendo visto los tipos, me limitaré á trasladar aquí la descripción del autor.

Cabeza castaña, algo teñida de negruzco, los tubérculos oceliformes amarillentos, con pelos amarillos; cara parda, con un surco profundo y ancho antes del clípeo; mandíbulas prominentes, amarillas, alargadas en una punta aguda pícea; antenas grises, con pubescencia corta grisácea, de unos 27 artejos; artejo basilar pardo; tercer artejo con un diente corto; los 4-21 con un largo ramo flexible, dos veces más largo que cada artejo.

Meso- y metatórax casi siempre con la superficie de los lóbulos algo negruzca.

Alas grisáceo-blanquizcas. Alas anteriores con numerosas manchitas transversales alargadas, más ó menos confluentes entre sí; en medio del disco una mancha ancha y obscura, que lleva en su centro un punto negruzco, más visible en su cara inferior; hacia la base existe otra mancha semejante, pero más pequeña; venación amarillenta; venas y márgenes cortamente franjeadas de amarillo. Alas posteriores con las manchas pardas casi desvanecidas, más aparentes en la porción apical; región estigmática amarillento blanquizca; indicio de mancha pupiliforme, como en las alas anteriores; las fimbrias del margen posterior mucho más largas, amarillas.

Patas de un amarillo de limón pálido, con pubescencia amarilla; rodillas y articulaciones de los tarsos marcadas de negruzco.

Abdomen pardo, cubierto de pelos largos, espesos, de un amarillo pálido. El último segmento dorsal lleva al parecer en el medio un lóbulo muy pequeño amarillo; las valvas laterales son muy anchas, cóncavas, con pelos largos amarillos; en la parte superior parece que se enlazan mediante una faja que deja un espacio

abierto entre ella y el margen del último segmento, en el cual espacio se ve el pequeño lóbulo mencionado antes; visto por encima, parece que estos lóbulos terminan en un proceso largo encorvado, no siendo otra cosa que el margen superior encorvado; vistos por detrás forman dos lóbulos anchos y redondeados unidos en medio: las partes existentes en la cavidad formada por estos lóbulos son de color píceo, con dos pequeños apéndices triangulares píceos, cuyo extremo es algo mucronado y dirigido hacia fuera (fig. 20).

Long. corp. 2‴; expans. alar 11‴

Patria. India, N. O.

5. Género **Rexavius** nov.

Etimología. *Rexavius* es anagrama de *Xaverius*. Formo este nombre genérico en obsequio del grande apóstol y civilizador de las Indias y del Japón San Francisco Javier. El género *Rexavius* comprende dos especies de la India (Ceilán) y del Japón.

Caracteres. Antennæ articulis brevibus crassisque, dentibus in ♂ prælongis. Abdomen maris apice truncatum, haud in processum productum sive appendiculatum. Alæ amplæ, haud duplo longiores quam latiores, apice rotundatæ, venis gradatis in duplicem seriem distinctam dispositis.

1. **Rexavius Nietneri** Hag. (fig. 21)

Dilar Nietneri. Hagen, Synopsis der Neuroptera Ceylons, Verh. zool. bot. Gesellsch. Wien, 1858, p. 482 [9].

Completaré algo la descripción de Hagen con el examen de los ejemplares tipos del museo de Berlín.

Pardo-leonado, muy velloso.

Tubérculos del vértex leonados, los posteriores elípticos, medianos oblicuos y casi transversales, el anterior triangular redondeado, manifiestamente transversal. Antenas (fig. 21, *a*) leonadas, con artejos cortos, ramos á partir del tercer artejo hasta el 25 muy largos, hasta 6 veces más que el artejo mismo, porción terminal inerme corta. Ojos medianamente prominentes, hemisféricos, de un pardo obscuro.

Protórax (fig. 21, *b*) transverso. Tubérculos anteriores transversales, separados hacia los lados, los centrales ovales elípticos, poco separados, los laterales pequeños, divididos en dos desiguales, y los posteriores grandes. Mesonoto mezclado de pardo y testáceo. Metanoto de un leonado pálido, escudo pardusco.

Abdomen leonado. Valvas (fig. 21, *c*, *d*) amarillentas, digitiformes, convexas por fuera y también posteriormente vistas de perfil (fig. 21, *d*), angostadas, levantadas y conniventes por encima, ensanchadas, obtusas y algo separadas por debajo.

Patas leonadas, con larga vellosidad del mismo color; extremo de los fémures, de las tibias y de los artejos de los tarsos pardo y un punto dorsal en la mitad de la tibia. Primer artejo de los tarsos igual al 2.° y 3.° juntos, el 4.° muy corto, el 5.° igual al 3.° al menos, las uñas pequeñas.

Alas anchas, más que la mitad de su longitud, teniendo su mayor anchura hacia su mitad ó antes. Membrana hialina, algo rojiza. Venación mezclada de pardo y leonado, dominando el primer color en el ala anterior y el segundo en la posterior. Pelos y fimbrias abundantes, largos, del color del ala respectiva. Venillas libres en más de la mitad del margen del ala.

Ala anterior (fig. 21, *e*) con el campo costal bastante dilatado cerca de la base; venillas sencillas, alguna ahorquillada. En un ejemplar se distingue alguna venilla transversal. Campo subcostal estrecho, con unas 8 venillas ó menos. Las mismas en el campo radial, que es más ancho. Pupilas muy pequeñas, la externa con dos ó tres venillas antes de ella, situada antes de la mitad del ala. Sector segundo con seis ramos. Dos series de venillas gradiformes externas á la pupila exterior, de unas $^6/_6$ venillas. En un ejemplar se ve vestigio de una tercera serie más externa.

Ala posterior (fig. 21, *f*) en todo más pálida, con más irisaciones, asimismo con dos series de venillas gradiformes, siendo más numerosas las exteriores.

La ♀ es desconocida.

Longitud del cuerpo. . . .	5	mm.
— del ala ant. . . .	8-10	»
— — poster. . .	7-8	»

Patria. Rainbode, en la isla de Ceilán. Abundante en las cercanías de Colombo, según el mismo Hagen.

2. **Rexavius japonicus** Mac Lachl.

Dilar japonicus. Mac Lachlan, Entom. Month. Mag., vol. XIX, march 1883, p. 220 [16].

♂ Cabeza, por encima, brillante, de un amarillo testáceo, con surco medio longitudinal; las verrugas ó tubérculos oceliformes muy anchas, más las laterales, con pelos amarillos; cara brillante parduscа; antenas de un amarillo pálido, de unos 30 artejos, los 3-21 con una rama fuerte claviforme muy larga, acortada

hacia la base y extremo de las antenas; tercer artejo con un diente interno inmediatamente debajo de la rama; artejos 6 y 7 cortos y casi moniliformes.

Pronoto amarillento, con dos tubérculos medianos contiguos. Mesonoto con los lóbulos anchamente parduscos. Metanoto amarillento.

Patas amarillentas, con pelos del mismo color; rodillas negruzcas; una mancha pardusca en el extremo de la tibia; la cara inferior de los tarsos, especialmente de los posteriores, es igualmente pardusca.

Alas de un amarillo-grisáceo, muy anchas, casi iguales en la forma, con ápice enteramente semicircular: las anteriores densamente salpicadas con manchas de un gris pálido, dispuestas en series transversales: hacia la base las manchas son más obscuras: existen las acostumbradas manchas pupiliformes, la una hacia la base debajo del primer sector del radio, la otra hacia el disco debajo de la primera rama del segundo sector: una serie bien definida de venillas gradiformes se extiende por debajo de la 4.ª rama del segundo sector (además de las que hay en la mitad basilar del ala): alas posteriores algo más pálidas, sin manchas grises, pero con las dos (?) acostumbradas manchas pupiliformes. (1).

Abdomen pardusco, cubierto de pelos muy largos amarillos: extremo amarillo, sus valvas laterales muy gruesas, reunidas por encima y por debajo (en el insecto seco), dejando entre ellas una cavidad apical estrecha y largamente oval: están vestidas con cerdas muy largas amarillas.

Envergadura 24 milímetros: longitud del ala anterior, 11'5 mil.: anchura de la misma, 6 mm.

Patria. Japón (Tukushima en la mayor de las islas), 28 jul. 1881, 1 ♂.

Obs. Debe de ser muy raro y tal vez no se encuentre más ejemplar en las colecciones que el de la de Mac Lachlan, que no he visto.

6. Género **Nallachius**, nov.

Etimología. Anagrama en vez de *Lachlanius*, á fin de no confundirlo con algún otro género, v. gr. *Lachlania*, que ya existe. Dedico este género al distinguido neuropterólogo inglés Roberto Mac Lachlan, honor que le es debido, así por sus méritos entomológicos, especialmente en el estudio de los *Dilar*, como porque él mismo indicó que con las dos especies americanas por él descritas, podía constituirse un nuevo género distinto.

Caracteres. Alæ venulis numero paucioribus, paucis in disco, 2-4 inter radium ejusque sectorem; sectore radii secundo 5-6 ramos retrorsum emittente. Statura minore. In reliquis convenit cum aliis ejusdem familiæ.

---

(1) Así dice Mac Lachlan; pero en los ejemplares que he visto existen dos pupilas en el ala anterior y una sola en la posterior.

1. **Nallachius Prestoni** Mc. Lachl.

Dilar Prestoni. Mac Lachlan, Occurrence of the Neuropterons Genus *Dilar* in South America. Entom. Mo. Mag. vol. XVII, jul. 1880, p. 35 [14].

Trasladaré la descripción original.

Cuerpo pardo negruzco, en parte testáceo ó amarillento.

En el centro de la cabeza hay dos tubérculos elevados, redondeados muy grandes, casi contiguos, colocados algo oblicuamente y delante otro todavía mayor, algo cónico; á los lados del disco, hacia los ojos, la cabeza está deprimida y cóncava. Las antenas son blanquizcas, el artejo basilar grueso y corto y el segundo algo testáceo, los siguientes (hasta el 9.°, lo restante está roto) son algo más largos que anchos, anillados de obscuro en el ápice; el 3.° tiene una rama corta, los siguientes una larga, fuerte y gruesa, algo obscura y más pubescente, crecientes gradualmente en longitud, de suerte que la rama del 9.° artejo es 7 ú 8 veces más larga que el artejo mismo, y las de los precedentes algo más cortas. Los palpos y patas de un blanco amarillento pálido, las últimas fuertemente pubescentes.

El abdomen muy obtuso (los apéndices anales no se pueden distinguir).

Las alas hialinas, de un blanquizco pálido, con algunas irisaciones, salpicadas ó reticuladas transversalmente con manchas de un gris pálido; venación pardusca, con pelos largos negruzcos. En el ala anterior las 4 ó 5 primeras venillas costales son sencillas, á continuación van alternando una ahorquillada y una sencilla con indicio de una marginal entre ellas y entre las horquillas; sector principal con 6 ramas, éstas ahorquilladas ó bifurcadas, y cada rama asimismo terminada en una pequeña horquilla marginal, con las acostumbradas venillas marginales rudimentarias; dos venillas entre el radio y su sector; las otras venillas en escaso número; una mancha pupiliforme entre la primera y segunda rama del sector. En las alas posteriores la venación es semejante en su disposición; el sector del radio tiene 6 ramas, pero éstas generalmente no tienen sino la horquilla marginal.

♂ Longitud del cuerpo unos 2 $^1/_3$ mm. Envergadura 10 $^1/_2$ mm.

Patria. Cercanías de Río Janeiro (Brasil).

Notable por su pequeñez y por el escaso número de venillas entre el radio y su sector.

2. **Nallachius americanus** Mc. Lchl.

Dilar americanus. Mac Lachlan, A North American species of Dilar. Entom. Mo. Mag. vol. XVIII, August 1881, p. 55 [15].—*Dilar americanus*. Banks, A revision of the neartic Hemerobidæ, 1905, p. 24 [24].

He aquí la descripción que da Mac Lachlan:

Cuerpo blanquizco, con un ligero tinte amarillento, cubierto de pelos blanquizcos, entre los cuales se mezclan algunos pocos negros.

Cara amarillenta. Ojos de un blanco metálico de plata. Tres tubérculos muy grandes, muy cercanos, ovalado-redondeados, en la parte superior de la cabeza. Antenas del mismo color que el cuerpo, al parecer de 17 artejos, los cuales son cortos, algo moniliformes, no dentados interiormente en el ápice; el último artejo oval.

Patas blanquizcas, con pelos blancos, el extremo del fémur, las tibias y los tarsos testáceos; uñas menudas, sencillas, de color píceo.

Extremidad del abdomen formando una abertura alargada piriforme, en medio de la cual hay dos tubérculos finamente granujientos, grandes, redondeados, blanquizcos (cuerpos extraños?); oviscapto más largo que todo el cuerpo en el insecto seco, blanco amarillento, semitransparente, delgado, suavemente encorvado.

Alas hialinas, de un blanquecino pálido, cada una con una veintena de manchas grandes, alguna de las cuales, en la mitad apical del ala muestran tendencia á unirse en bandas; venación pálida más obscura en las manchas; pelos largos, blanquizcos, pero mezclados con otros negros, especialmente en las manchas; campo subcostal sin venillas; las venillas costales sencillas, con ligeras indicaciones de las marginales rudimentarias entre ellas; sector principal del radio con 5 ramas en ambas alas; muy pocas venillas, de suerte que la malla ó reticulación es visiblemente clara; una pupila entre la 1.ª y la 2.ª rama del sector del radio; casi todas las venas apicales y marginales bifurcadas ó trifurcadas, con menudas venillas marginales rudimentarias.

♀ Longitud del cuerpo (sin el oviscapto) unos 3 milímetros; longitud del oviscapto 3 $^3/_4$ milímetros. Envergadura unos 14 mm.

Patria. Bee Spring, Kentucky (Estados Unidos).

Obs. El tipo existe en el museo de Zoología Comparada de Cambridge, donde lo vió Mr. Banks, quien añade que el sector del radio tiene 5 horquillas y está enlazado con el radio por medio de 3 ó 4 venillas; el procúbito (mediana) es sencillo hasta casi el extremo del ala, donde se ahorquilla; el cúbito se ahorquilla en el medio y se enlaza con el procúbito por dos venillas; la rama inferior del cúbito y la anal tienen varias ramas que llegan al margen posterior.

Tiene gran semejanza, dice Mac Lachlan, con los lepidópteros de la familia de los Síquidos.

INDICE

INTRODUCCIÓN

Págs.

Historia. 3
Bibliografía 4

PARTE DESCRIPTIVA

Caracteres de la familia 5
Posición taxonómica 7
Importancia de los caracteres 8
Biología. 8
Distribución geográfica 9
Cuadro de los géneros. 11
1. Género **Dilar** Ramb 12
Cuadro de las especies del género *Dilar* 12
1. *Dilar nevadensis* Ramb. 13
2. — *dissimilis* Nav. 17
3. — *Kolbei* Nav. 19
4. — *corsicus* Nav. 20
5. — *algericus* Nav. 22
6. — *turcicus* Hag. 23
7. — *corcyræus* Nav. 26
8. — *syriacus* Nav. 28
9. — *lineolatus* Nav. 29
10. — *Bolivari* Nav. 31
11. — *nepos* Nav. 32
2. Género **Lidar** Nav. 34
Cuadro de las especies del género *Lidar* 34
12. *Lidar meridionalis* Hag. 35
13. — *nemoroşus* Nav. 37
14. — *parthenopæus* Costa 38
15. — *pumilus* Nav. 40
3. Género **Fuentenus** Nav. 41
16. *Fuentenus campestris* Nav. 41
17. — *saldubensis* Nav. 43
18. — ? *lusitanicus* Nav 44
4. Género **Nepal** Nav. 45
19. *Nepal Harmandi* Nav. 45
20. — *Hornei* Mac Lachl. 47

Págs.

5. Género **Rexavius** Nav. 48
21. *Rexavius Nietneri* Hag. 48
22. — *japonicus* Mac Lachl. 49
6. Género **Nallachius** Nav. 50
23. *Nallachius Prestoni* Mac Lachl. 51
24. — *americanus* Mac Lachl. 51

EXPLICACIÓN DE LAS FIGURAS

Fig. 1.ª *Dilar nevadensis* Ramb.—♂. *a*. Antena.—*b*. Tórax.—*c*. Extremo del abdomen visto por detrás —*d*. Tarso.—*e*. Ala anterior.—*f*. Ala posterior.—*g*. Región de las pupilas del ala anterior.—♀. *h*. Ala anterior derecha.—*i*. Ala posterior izquierda.

Fig. 2.ª *Dilar dissimilis* Nav.—♂. *a*. Protórax.—*b*. Extremo del abdomen visto por detrás.—*c*. Ultimo segmento del tarso.—*e*. Ala anterior izquierda.—♀. *d*. Protórax.—*e*. Ala posterior derecha.

Fig. 3.ª *Dilar Kolbei* Nav. ♂.—*a*. Protórax.—*b*. Extremo del abdomen visto por detrás.—*c*. Id. visto por debajo.—*d*. Id. visto de lado.—*e*. Ala anterior.—*f*. Ala posterior.

Fig. 4.ª *Dilar corsicus* Nav. ♀.—*a*. Cabeza vista de frente.—*b*. Protórax.—*c*. Ala anterior.—*d*. Ala posterior.

Fig. 5.ª *Dilar algericus* Nav. ♂.— *a*. Protórax.—*b*. Ala anterior.

Fig. 6.ª *Dilar turcicus* Hag. ♂.—*a*. Antena.—*b*. Protórax.—*c*. Extremo del abdomen visto por detrás. —*d*. El mismo visto por debajo.—*e*. Ala anterior.—*d*. Ala posterior.

Fig. 7.ª *Dilar corcyræus* Nav. ♀.—*a*. Cabeza vista por delante.—*b*. Protórax. *c*. Ala anterior.—*d*. Ala posterior.

Fig. 8.ª *Dilar syriacus* Nav. ♂.—*a*. Protórax.—*b*. Ala anterior.

Fig. 9.ª *Dilar lineolatus* Nav. ♀.—*a*. Protórax.—*b*. Ala anterior.—*c*. Ala posterior.

Fig. 10. *Dilar Bolivari* Nav. ♂.—*a*. Antenas.—*b*. Protórax.—*c*. Extremo del abdomen visto por detrás.—*d*. Id. visto de lado.—*e*. Ala anterlor izquierda.—♀. *f*. Ala anterior derecha.

Fig. 11. *Dilar nepos* Nav. ♂.—*a*. Protórax.—*b*. Extremo del abdomen visto por detrás.—*c*. Id. visto por debajo.—*d*. Ala anterior.—*e*. Ala posterior.

Fig. 12. *Lidar meridionalis* Hag. ♂.—*a*. Artejos intermedios de la antena (con grande aumento).—*b*. Extremo del abdomen visto por detrás. —*c*. El mismo en preparación microscópica.

Fig. 13. *Lidar nemorosus* Nav. ♂.—*a*. Extremo del abdomen visto por detrás y por encima.—*b*. El mismo visto por detrás y por debajo.

Fig. 14. *Lidar parthenopœus* Costa, ♂.—*a*. Antena —*b*. Protórax.—*c*. Extremo del abdomen visto por detrás.—*d*. Ala anterior.—*e*. Id. posterior.

Fig. 15. *Lidar pumilus* Nav. ♂.—*a*. Antena.—*b*. Protórax.—*c*. Extremo del abdomen visto por detrás.—*d*. Id. visto por debajo.—*e*. Ala anterior izquierda.

Fig. 16. *Fuentenus campestris* Nav. ♂.—*a*. Extremo del abdomen visto por detrás.—*b*. El mismo visto de lado.—*c*. Id. por debajo.

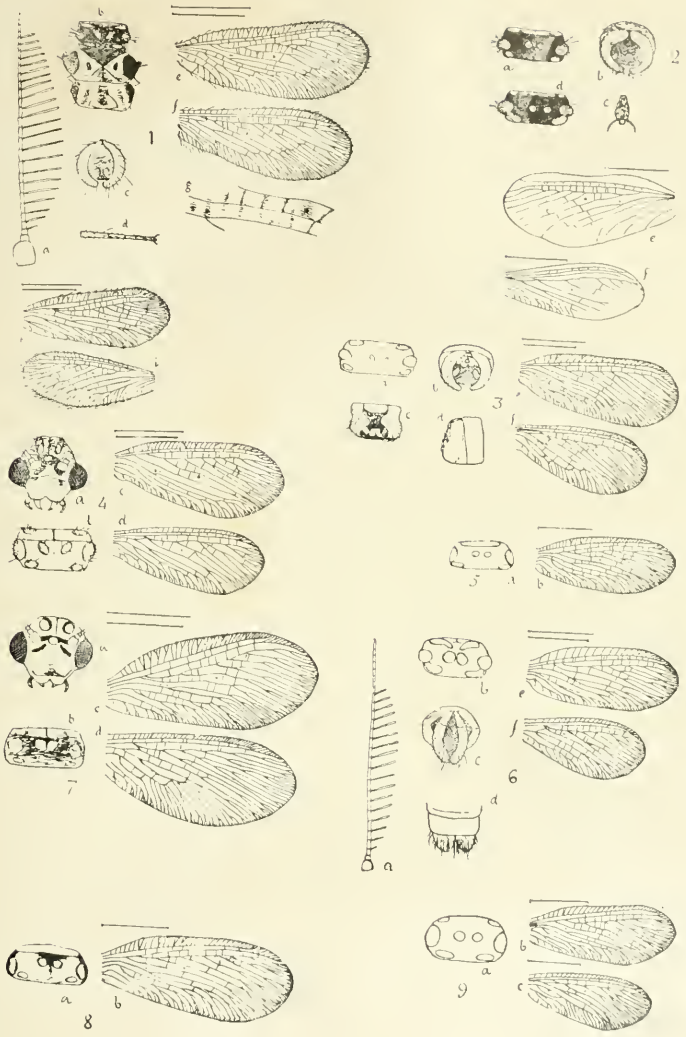
Fig. 17. *Fuentenus saldubensis* Nav. ♂.—*a*. Protórax.—*b*. Extremo del abdomen visto por detrás.—*c*. El mismo visto de lado.—*e*. El mismo en preparación microscópica.

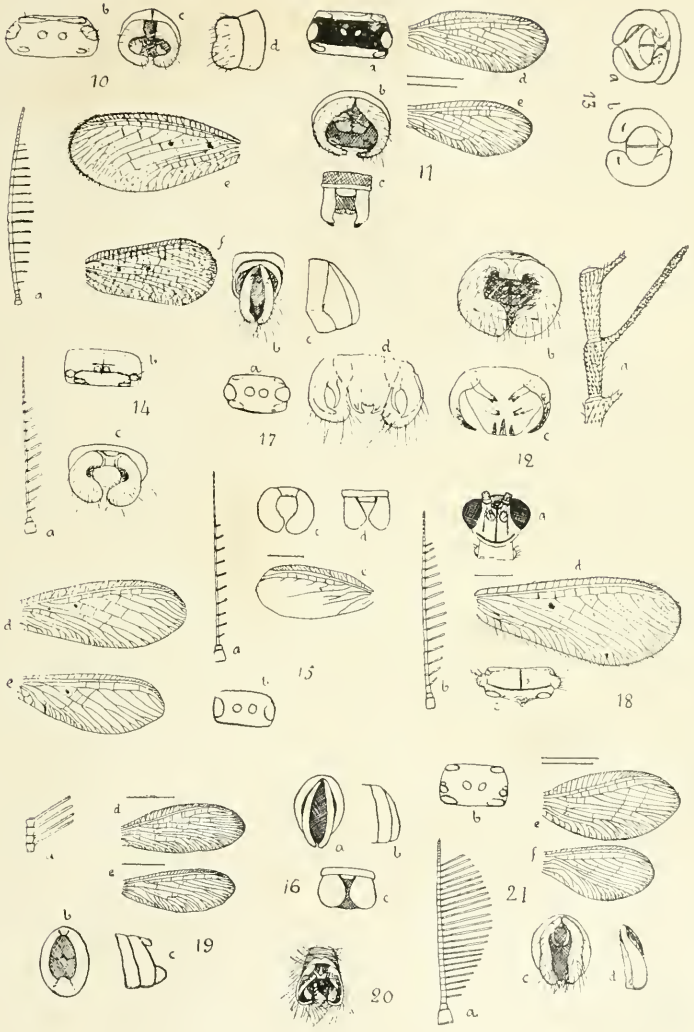
Fig. 18. *Fuentenus lusitanicus* Nav. ♂.—*a*. Cabeza y cuello.—*b*. Antena.—*c*. Protórax.—*d*. Ala posterior.

Fig. 19. *Nepal Harmandi* Nav. ♂.—*a*. Antena, artejos y ramos intermedios.—*b*. Extremo del abdomen visto por detrás.—*c*. Id. visto de lado.—*d*, *e*. Alas.

Fig. 20. *Nepal Hornei* Mac Lachl. ♂.—Extremo del abdomen.

Fig. 21. *Rexavius Nietneri* Hag. ♂.—*a*. Antena.—*b*. Protórax.—*c*. Extremo del abdomen visto por detrás.—*d*. Id. visto de lado.—*e*, *f*. Alas.


1
2
3
4
5
6
7
8
9



672.3

AS
302
B36
época 3
t.7

Academia de Ciencias y Artes
de Barcelona
Memorias

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY